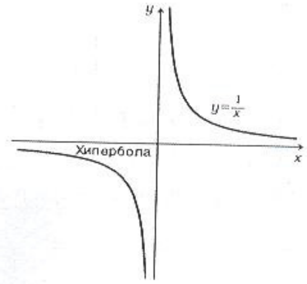
Основне особине реалне функције $f : D \to R$ $(D \subseteq R)$

Функција f је:

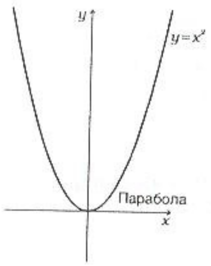
1-1–функција	$f : D \xrightarrow{1\text{-}1} R$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in D)(\forall x_2 \in D)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ $(\forall x_1 \in D)(\forall x_2 \in D)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
пресликавање скупа D **на** E	$f : D \xrightarrow{\text{на}} E$	$\Leftrightarrow$	$(\forall y \in E)(\exists x \in D)\ f(x) = y$.
Напомена. Ако $f : D \underset{\text{на}}{\xrightarrow{1\text{-}1}} E$, $E \subseteq R$, тада постоји инверзна функција $f^{-1} : E \underset{\text{на}}{\xrightarrow{1\text{-}1}} D$. Графици функција f и f^{-1} су симетрични у односу на симетралу првог и трећег кадранта, тј. у односу на праву $y = x$.			
Парност и непарност			
парна		$\Leftrightarrow$	1° домен D је симетричан у односу на тачку 0 (тј. ако $x \in D$, онда и $-x \in D$), 2° $(\forall x \in D)\ f(-x) = f(x)$
Напомена. График парне функције симетричан је у односу на $y-$осу. Функција **није парна** ако и само ако њен домен није симетричан у односу на 0 или, ако јесте, постоји број x из D такав да је $f(-x) \neq f(x)$.			
непарна		$\Leftrightarrow$	1° домен D је симетричан у односу на тачку 0 (тј. ако $x \in D$, онда и $-x \in D$), 2° $(\forall x \in D)\ f(-x) = -f(x)$
Напомена. График непарне функције симетричан је у односу на координатни почетак. Функција **није непарна** акко њен домен није симетричан у односу на 0 или, ако јесте, постоји број x из D такав да је $f(-x) \neq -f(x)$.			
Ограниченост			
ограничена одоздо		$\Leftrightarrow$	$(\exists m \in R)(\forall x \in D)\ m \leqslant f(x)$
ограничена одозго		$\Leftrightarrow$	$(\exists M \in R)(\forall x \in D)\ f(x) \leqslant M$
ограничена		$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(\exists m \in R)(\exists M \in R)(\forall x \in D)\ m \leqslant f(x) \leqslant M$ $(\exists M \in R)(\forall x \in D)\ \lvert f(x)\rvert \leqslant M$
Периодичност			
периодична		$\Leftrightarrow$	постоји позитиван број ω такав да за свако x из D важи: $x + \omega \in D$, $x - \omega \in D$ и $f(x+\omega) = f(x-\omega) = f(x)$.
Напомена. Број ω назива се **период** функције f. Свака периодична функција има бесконачно много периода. Ако међу тим периодима постоји најмањи, он се назива **основним периодом** функције.			
Знак			
позитивна на I, $I \subseteq D$		$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in I)\ f(x) > 0$
негативна на I, $I \subseteq D$		$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in I)\ f(x) < 0$
Напомена. Број x из D је **нула** функције f ако и само ако је $f(x) = 0$. Нулама функције одређене су тачке пресека графика функције f са $x-$осом.			
Монотоност на интервалу I $(I \subseteq D)$			
растућа на I	$f \nearrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$.
строго растућа на I	$f \uparrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
опадајућа на I	$f \searrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$.
строго опадајућа на I	$f \downarrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
Конвексност на интервалу I $(I \subseteq D)$			
конвексна на I	$f\cup$ на I	$\Leftrightarrow$	за произвољне x_1 и x_2 из I и произвољне бројеве $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ такве да је $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, важи $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$
конкавна на I	$f\cap$ на I	$\Leftrightarrow$	за произвољне x_1 и x_2 из I и произвољне бројеве $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ такве да је $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, важи $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$
Напомена. Ако уместо знака $\leqslant$ $(\geqslant)$ стоји знак $<$ $(>)$ за све $x_1 \neq x_2$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, функција f је **строго конвексна (конкавна)** на I			

1. $f : R \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$



– Функција f је 1-1-функција, и пресликава $R \setminus \{0\}$ **на** $R \setminus \{0\}$.
– Функција f је напарна: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),\ x \neq 0$.
– Функција f није ограничена одоздо (па није ни ограничена), нити је ограничена одозго .
– Функција f није периодична.
– Функција f нема нуле; позитивна је на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
– $f \downarrow$ на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$. **Функција није опадајућа на $R \setminus \{0\}$, тј. на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$!**
– $f\cup$ на $(0, +\infty)$; $f\cap$ на $(-\infty, 0)$.

2. $f : R \to R,\ f(x) = x^2$



– Функција f није 1-1-функција и пресликава R **на** скуп свих ненегативних бројева R_0^+.
– Функција f је парна: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
– Функција f је ограничена одоздо са 0 (или било којим негативним бројем): $0 \leqslant x^2 = f(x)$. Није ограничена одоздо, па није ни ограничена.
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0. Функција f је позитивна на $R \setminus \{0\}$, тј. на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
– Функција f је строго растућа на $[0, +\infty)$: $0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$. Функција f је строго опадајућа на $(-\infty, 0]$: $x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow x_2^2 < x_1^2$.
– Функција f је строго конвексна на R:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \alpha_1^2 x_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_2^2 x_2^2 \\ &= \alpha_1(1-\alpha_2)x_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_2(1-\alpha_1)x_2^2 \\ &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \alpha_1\alpha_2(x_1 - x_2)^2 < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \end{aligned}$$

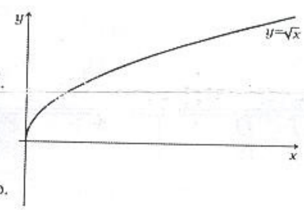
за $\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\ x_1 \neq x_2$.

Напомена. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto x^{2n},\ x \in R,\ n \in N$.

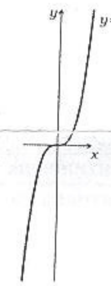
3. $f : R_0^+ \to R,\ f(x) = \sqrt{x};\ R_0^+ = [0, +\infty)$

– Функција f је 1-1-функција, и пресликава R_0^+ **на** R_0^+.
– Функција f није парна, нити је напарна (домен јој није симетричан у односу на 0).
– Функција f је ограничена одоздо: $0 \leqslant \sqrt{x},\ x \in R_0^+$, али није ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функција f је 0; позитивна је на $(0, +\infty)$: $0 < \sqrt{x}$, ако је $x > 0$.
– $f \uparrow$ на $R_0^+ = [0, +\infty)$.
– $f\cap$ на $[0, +\infty)$.

Напомена. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto \sqrt[2n]{x},\ x \geqslant 0,\ n \in N$.



4. $f : R \to R,\ f(x) = x^3$

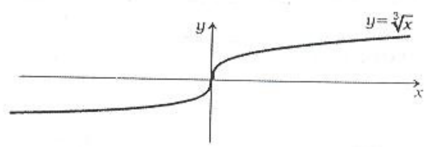


– Функција f је бијекција; $f : R \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} R$.
– Функција f је напарна: $(-x)^3 = -x^3$.
– Функција f није ограничена одоздо (па није ни ограничена), нити је ограничена одозго.
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0; позитивна је на $(0, +\infty)$: ако је $0 < x$, онда је $0 < x^3$; негативна је на $(-\infty, 0)$: ако је $x < 0$, онда је $x^3 < 0$.
– $f \uparrow$ на R.
– $f\cap$ на $(-\infty, 0]$; $f\cup$ на $[0, +\infty)$.

Напомена. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto x^{2n-1},\ x \in R,\ n \in N$.

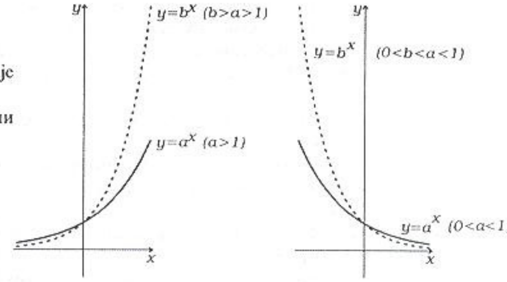
5. $f : R \to R,\ f(x) = \sqrt[3]{x}$ (Упоредити особине ове функције са особинама функције $x \mapsto x^3$.)

– Функција f је бијекција; $f : R \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} R$.
– Функција f је напарна: $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функција f је 0; позитивна је на $(0, +\infty)$: ако је $0 < x$, онда је $0 < \sqrt[3]{x}$; негативна је на $(-\infty, 0)$: ако је $x < 0$, онда је $\sqrt[3]{x} < 0$.
– $f \uparrow$ на R.
– $f\cup$ на $(-\infty, 0]$; $f\cap$ на $[0, +\infty)$.



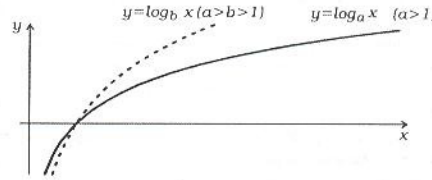
Напомена. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto \sqrt[2n-1]{x},\ x \in R,\ n \in N$.

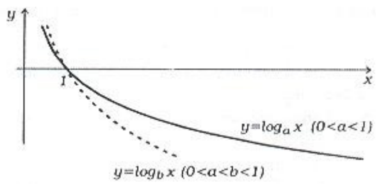
6. $f : R \to R,\ f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$



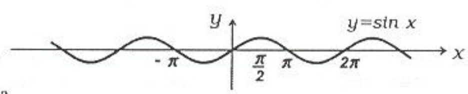
– Функција f је 1-1-функција, и пресликава R **на** $R^+ = (0, +\infty)$.
– Функција f није парна, нити је непарна (домен јој је симетричан, али за свако $x \neq 0$ је $a^{-x} \neq \pm a^x$).
– Функција f је ограничена одоздо: $0 < a^x$, али није ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Функција f нема нула и позитивна је на R: $0 < a^x, x \in R$.
– Ако је $a > 1$, $f \uparrow$ на R. Ако је $0 < a < 1$, $f \downarrow$ на R.
– $f \cup$ на R.

7. $f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_a x,\ (a > 0, a \neq 1, R^+ = (0, +\infty))$
– Функција f је 1-1-функција, и пресликава R^+ **на** R.
– Функција f није парна, нити је непарна.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго.
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 1. Ако је $a > 1$, функција f је позитивна на $(1, +\infty)$, а негативна на $(0, 1)$. Ако је $0 < a < 1$, функција f је позитивна на $(0, 1)$, а негативна на $(1, +\infty)$.
– Ако је $a > 1$, $f \uparrow$ на R^+. Ако је $0 < a < 1$, $f \downarrow$ на R^+.
– Ако је $a > 1$, $f \cap$ на R^+. Ако је $0 < a < 1$, $f \cup$ на R^+.

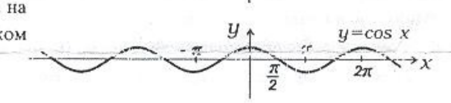




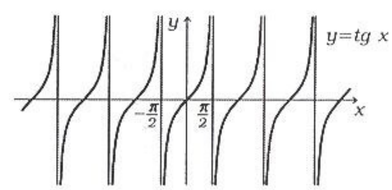
8. $f : R \to R,\ f(x) = \sin x,$
– Функција f није 1-1-функција, и пресликава R **на** $[-1, 1]$.
– Функција f је непарна: $\sin(-x) = -\sin x, x \in R$.
– Функција f је ограничена: $|\sin x| \leqslant 1, x \in R$.
– Функција f је периодична, са основним периодом 2π.
– Нула функције f има бесконачно много: $k\pi, k \in Z$. Функција f је позитивна на сваком од интервала $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in Z$. Функција f је негативна на сваком од интервала $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in Z$.
– $f \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$. $f \downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$.
– $f \cap$ на $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$. $f \cup$ на $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in Z$.



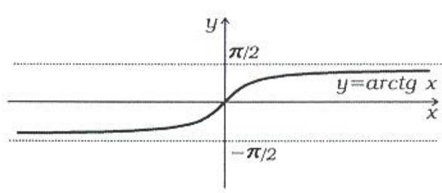
9. $f : R \to R,\ f(x) = \cos x,$
– Функција f није 1-1-функција, и пресликава R **на** $[-1, 1]$.
– Функција f је парна: $\cos(-x) = \cos x, x \in R$.
– Функција f је ограничена: $|\cos x| \leqslant 1, x \in R$.
– Функција f је периодична, са основним периодом 2π.
– Нула функције f има бесконачно много: $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Функција f је позитивна на сваком од интервала $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$. Функција f је негативна на сваком од интервала $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$.
– $f \uparrow$ на $[((2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in Z$. $f \downarrow$ на $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in Z$
– $f \cap$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$. $f \cup$ на $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in Z$.



10. $f : R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\} \to R,\ f(x) = \operatorname{tg} x,$
– Функција f није 1-1-функција; f пресликава $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\}$ **на** R.
– Функција f је непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\}$.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго.
– Функција f је периодична, са основним периодом π.
– Нула функције f има бесконачно много: $k\pi, k \in Z$. Функција f је позитивна на сваком од интервала $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$. Функција f је негативна на сваком од интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, $k \in Z$.
– $f \uparrow$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$, (али f **није растућа на свом домену**, који је унија ових интервала).
– $f \cup$ на $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$. $f \cap$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, $k \in Z$.



11. $f : R \to R,\ f(x) = \operatorname{arctg} x,$
– Функција f је 1-1-функција; f пресликава R **на** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
– Функција f је непарна: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in R$.
– Функција f је ограничена: $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0. Функција f је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
– $f \uparrow$ на R.
– $f \cap$ на $(0, +\infty)$. $f \cup$ на $(-\infty, 0)$.



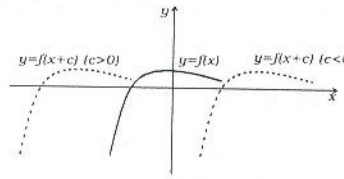
• Најчешћи тип проблема је: *Испитати особине и нацртати график функције* $y = f(x)$, где је $f(x)$ неки израз. Наравно, навођењем само израза $f(x)$ није задата функција, јер нису задати домен и кодомен; али за домен (област дефинисаности), ако није другачије речено, узимамо скуп свих реалних бројева x за које израз $f(x)$ има смисла, тј. за које су све операције које учествују у формирању тог израза изводљиве, а за кодомен (скуп вредности), ако није другачије речено, узимамо скуп R реалних бројева.

Користећи график G_f функције f, дат једначином $y = f(x)$, лако се могу нацртати графици разних других функција.

$\boldsymbol{y = f(x + c)}$

Ако је $c > 0$, график $y = f(x+c)$ добијамо транслацијом графика G_f у смеру $x-$осе.

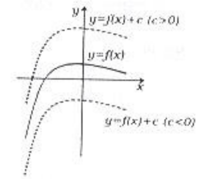
Ако је $c < 0$, график $y = f(x+c)$ добијамо транслацијом графика G_f у смеру супротном од смера $x-$осе.



$\boldsymbol{y = f(x) + c}$

Ако је $c > 0$, график $y = f(x) + c$ добијамо транслацијом графика G_f у смеру $y-$осе.

Ако је $c < 0$, график $y = f(x) + c$ добијамо транслацијом графика G_f у смеру супротном од смера $y-$осе.

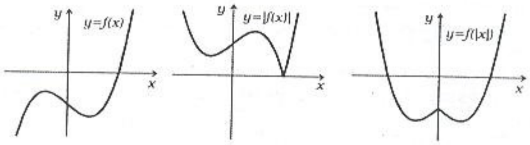


$\boldsymbol{y = |f(x)|}$

График $y = |f(x)|$ добијамо тако што део графика G_f који се налази испод $x-$осе (има негативне ординате) пресликамо симетрично у односу на $x-$осу.

$\boldsymbol{y = f(|x|)}$

График $y = f(|x|)$ добијамо тако што део графика G_f који се налази десно од $y-$осе (има позитивне апсцисе) пресликамо симетрично у односу на $y-$осу.



• Линеарна функција: $\boldsymbol{f : R \rightarrow R, f(x) = ax + b}$ $(a, b \in R, a \neq 0)$.

– Функција f је бијекција скупа R на себе и њена инверзна функција $f^{-1} : R \xrightarrow[\text{на}]{1\text{-}1} R$ дата је са $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

– Ако је $b \neq 0$, функција f није парна, нити је непарна. Ако је $b = 0$, линеарна функција је непарна.

– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго (па није ни ограничена).

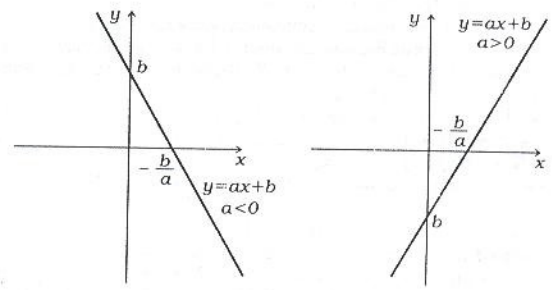
– Функција f није периодична.

– Нула функције f је $-\frac{b}{a}$. Ако је $a > 0$, функција f је позитивна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, негативна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$. Ако је $a < 0$, функција f је позитивна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, негативна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

– Ако је $a > 0$ функција је строго растућа на свом домену: $f \uparrow R$; ако је $a < 0$ функција f је строго опадајућа на свом домену.

– Функција f је и конвексна и конкавна на R.

– График функције f је права одређена тачкама $(0, b)$ и $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.



• Карактеристични положаји графика квадратне функције: $\boldsymbol{f : R \rightarrow R, f(x) = ax^2 + bx + c}$ $(a, b, c \in R, a \neq 0)$