BROJNI REDOVI – ZADACI (I DEO)

Posmatrajmo brojni red $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima.

Suma reda $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je parcijalna suma.

Tražimo $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Ako dobijemo $\lim_{n\to\infty} S_n$ =S (broj) onda red **konvergira**, a ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ ili ne postoji, onda red **divergira.**

Parcijalne sume su u stvari:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&... \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n \\
&...
\end{aligned}
$$

<u>Primer 1.</u>

Za dati red $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} + ...$ odrediti S_n i naći $\lim_{n\to\infty} S_n$.

<u>Rešenje:</u>

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$$

Da bi našli graničnu vrednost, podsetićemo se trika sa rastavljanjem racionalne funkcije koji smo koristili kod integrala.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} ..../*(3n-2)\cdot(3n+1) \\
&1 = A(3n+1) + B(3n-2) \\
&1 = 3An + A + 3Bn - 2B \\
&1 = (3A+3B)n + A - 2B ....\textit{uporedjivanje}
\end{aligned}
$$

Podsetite se ovog trika u fajlu integrali zadaci IV deo.

$3A+3B=0$

$\underline{A-2B=1........................ / *(-3)}$

$3A+3B=0$

$\underline{-3A+6B=-3}$

$9B=-3 \to \boxed{B=-\frac{1}{3}} \to \boxed{A=\frac{1}{3}}$

$$\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{3n-2}+\frac{-\frac{1}{3}}{3n+1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})$$

Sad se vraćamo na zadatak i ovo primenjujemo na svaki sabirak datog reda:

$$S_n=\frac{1}{3}[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+....+(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2})+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})]$$

$$S_n=\frac{1}{3}[1\cancel{-\frac{1}{4}}\cancel{+\frac{1}{4}}\cancel{-\frac{1}{7}}\cancel{+\frac{1}{7}}\cancel{-\frac{1}{10}}+....+\cancel{\frac{1}{3n-5}}\cancel{-\frac{1}{3n-2}}\cancel{+\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1})]$$

$$S_n=\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3n+1})]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3n+1})]=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}[1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{3n+1}}}_{teži\ 0})]=\frac{1}{3}$$

$\boxed{S=\frac{1}{3}}$

Naravno, trebate obnoviti I granične vrednosti funkcija(nizova) jer nam je to znanje ovde neophodno!

Primer 2.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$

Rešenje:

Ovde nam je posao lak! Važi teorema:

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira, onda je $\lim_{n\to\infty}a_n$ =0, to jest ako je $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ onda red sigurno ne konvergira.

Dakle, tražimo $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$ a znamo da je $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$, pa smo sigurni da ovaj niz divergira.

Primer 3.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

Rešenje:

Prvo ćemo ispitati: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{\infty}=0$. Da li ovo znači da red konvergira? **NE!**

Može konvergirati ili divergirati, ova teoremica nam pomaže u situaciji kad ne dobijemo 0 za rešenje, i onda smo sigurni da red divergira. Ovako moramo ispitivati dalje, a ideja je da dokažemo da je suma neograničena, odnosno da je $\lim_{n\to\infty}S_{\Theta}=\pm\infty$, gde je S_{Θ} podniz niza S_n koji je uvek rastući.

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{3}$$

$$S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$$

.......*itd*

$$S_{2^m}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+.......+\frac{1}{2\cdot 2^m-1}$$

grupišimo sabirke na sledeći način:

$$S_{2^m}=(\frac{1}{1}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}).......+(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+3}+...+\frac{1}{2\cdot 2^m-1})$$

Očigledno je da važi:

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{3}>1\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}\\ ....\\ \frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+3}+...+\frac{1}{2\cdot 2^m-1}>\frac{2^{m-1}}{2^{m+1}}=\frac{1}{4}\end{array}}$$

Kad ovo vratimo gore , dobijamo nejednakost:

$$S_{2^m}>1+\frac{m-1}{4}$$

Potražimo ovde graničnu vrednost $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{m-1}{4})=\infty$ a to nam govori da niz **divergira**!

Primer 4.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Rešenje:

I ovde je slična situacija kao malopre: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$.

Koristimo sličan trik kao u prethodnom zadatku:

Posmatramo niz parcijalnih suma $S_k, k\in N$ koji je uvek rastući. Njegov podniz $S_{2^m}, m\in N$ je:

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{2}$$
$$S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$.......itd$$
$$S_{2^m}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

Grupišemo članove ali tako da možemo zaključiti od čega su veći:

$$S_{2^m}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+...+(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m})$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\ ....\\ \frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}\end{array}}$$

Ako vratimo ove nejednakosti gore, dobijamo:

$$S_{2^m}>1+\frac{m}{2}$$

I ovde je $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{m}{2})=\infty$, a to opet govori da dati red divergira.

Košijev (Cauchyev) kriterijum

Potreban i dovoljan uslov da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira jeste da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N = N(\varepsilon)$

tako da za $n > 0 \wedge p > 0$ važi: $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$

Primer 5.

Koristeći Košijev kriterijum dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Rešenje:

U prethodnom primeru smo dokazali da ovaj red divergira. Sad nam je posao da to dokažemo preko Košijevog kriterijuma.

Uzmimo da je p = n. Onda imamo:

$$\left|S_{n+n} - S_n\right| = \left|S_{2n} - S_n\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots\dots + \frac{1}{2n}$$

Kako je :

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$$
....

Ovo vratimo gore i dobijamo:

$$\left|S_{n+n} - S_n\right| = \left|S_{2n} - S_n\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots\dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Da smo na početku uzeli da je, recimo, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ a radom smo dobili da je $\varepsilon > \frac{1}{2}$, možemo zaključiti da red divergira.

Primer 6.

Koristeći Košijev kriterijum dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergira.

Rešenje:

Uzmimo, slično kao malopre da je $\varepsilon=\frac{1}{4}$ i uzmimo da je p = n

$$|S_{n+n}-S_n|=|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+.......+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

Sad razmišljamo:

$$(n+1)(n+2)<(n+2)^2\rightarrow\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{(n+2)^2}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}<\frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}}\rightarrow\boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}<\frac{1}{n+2}}$$

$$(n+2)(n+3)<(n+3)^2\rightarrow\frac{1}{(n+2)(n+3)}<\frac{1}{(n+3)^2}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}<\frac{1}{\sqrt{(n+3)^2}}\rightarrow\boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}<\frac{1}{n+3}}$$

....

I tako dalje.

Imamo:

$$|S_{n+n}-S_n|=|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+.......+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}>$$

$$>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{4}$$

Dokazali smo da ovaj red divergira.

Poredbeni kriterijum :

Važi za dva reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

i) Ako je $a_n < b_n$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

ii) Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

iii) Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = M$, ($M \neq 0$) M je konačan broj onda redovi istovremeno konvergiraju ili divergiraju

Ovde se najčešce za uporedjivanje koristi red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za k>1 konvergira, a za k$\leq$ 1 divergira

Primer 7.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Rešenje:

Razmišljamo:

$2n-1 > n$ počevši od n=2, pa je onda

$$\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n}$$

Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan, to je divergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ po poredbenom kriterijumu.

[Ako je $a_n < b_n$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan]

Neki profesori rade ovo direktno:

$$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n} \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

Onda je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$, pa zaključujemo da dati red divergira.

Primer 8.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

Rešenje:

Mi ćemo upotrebljavati onaj brži način, a vi naravno radite kako vaš profesor zahteva...

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n(n+1)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ kad } n \to \infty .$$

Oznaka $\sim$ nam znači da se ovi izrazi ponašaju slično kad $n \to \infty$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira pa konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Naravno , mogli smo koristiti i poredbeni kriterijum, gde bi uzimali red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ za uporedjivanje.

Primer 9.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

Rešenje:

Ovde ćemo izvršiti najpre racionalizaciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Sad razmišljamo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\cdot 2n^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{2n^{\frac{5}{6}}}} \quad \text{kad } n \to \infty$$

Dakle, posmatramo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2}\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}}$, koji divergira, a onda divergira i početni red, jer

ovde se najčešce za uporedjivanje koristi red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za k>1 konvergira, a za k$\leq$ 1 divergira

Primer 10.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{n}$

Rešenje:

Ovde ćemo iskoristiti da je $\sin\frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha}{n}$ kad $n \to \infty$

Onda imamo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n} = \alpha \cdot \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ a znamo da ovaj red divergira, pa divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{n}$.

Primer 11.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

Rešenje:

Kad $n \to \infty$ već smo videli da je $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ i $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} \sim n$, zato imamo:

$$\frac{n \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira , pa divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$.

U sledećem fajlu nastavljamo sa kriterijumima za konvergenciju…

www.matematiranje.com