

## POVRŠINSKI INTEGRALI

### Površinski integral prve vrste

i) Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ zadata jednačinama:

$$x=x(u,v)$$

$$y=y(u,v)$$

$$z=z(u,v)$$

gde  $(u,v)$  pripada D a funkcija  $f(x,y,z)$  je definisana i neprekidna na površi S, onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}dudv$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

ii) Ako jednačina površi S ima oblik  $z=z(x,y)$ , gde je  $z=z(x,y)$  jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy \quad \text{ i }$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ i } \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

### Površinski integral druge vrste

Ako je S glatka dvostrana površ na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, određena smerom normale  $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  i  $z=z(x,y)$  tada je:

$$\cos \alpha = \frac{p}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \cos \beta = \frac{q}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\pm \sqrt{1+p^2+q^2}}$$

( Da li ćemo uzeti + ili – zavisi od ugla koji normala gradi sa pozitivnim delom z-ose:

Ako je taj ugao oštar, onda mora biti  $\cos \gamma > 0$  pa uzimamo minus ispred korena,  $\cos \gamma = \frac{-1}{-\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Ako je taj ugao tup, onda je  $\cos \gamma < 0$ , pa uzimamo + ispred korena  $\cos \gamma = \frac{-1}{+\sqrt{1+p^2+q^2}}$  )

a  $P=P(x,y,z)$   $Q=Q(x,y,z)$  i  $R=R(x,y,z)$  tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)ds$$

Površinski integral druge vrste **zavisi** od orijentacije krive

**Prelaskom na drugu stranu površi menja se znak**

## STOKSOVA FORMULA

Ako su  $P, Q, R$  neprekidne diferencijabilne funkcije a  $L$  zatvorena, deo po deo glatka kriva koja je granica deo po deo dvostrane površi  $S$ , tada je:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

pri čemu su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  koordinate normale površi  $S$  koja je orijentisana na onu stranu u odnosu na koju se obilazak krive  $L$  vrši u suprotnom smeru od smera kretanja kazaljke na satu.

## FORMULA OSTROGRADSKOG

Ako je  $S$  deo po deo glatka površ, koja ograničava oblast  $V$ , a  $P, Q$  i  $R$  neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti  $V \cup S$ , onda važi formula:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

gde su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  kosinusi pravca spoljašnje normale površi  $S$ .

[www.matematiranje.com](http://www.matematiranje.com)