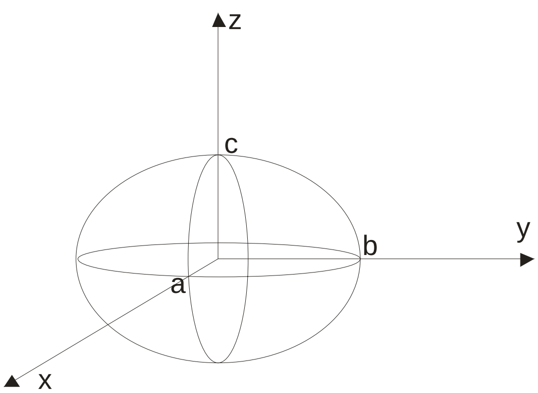
NEKE POVRŠI U R^3

Površi koje se najčešće sreću u zadacima su:

1. Elipsoidi
2. Hiperboloidi
3. Paraboloidi
4. Konusne površi
5. Cilindrične površi

1. **Elipsoidi**

Osnovna jednačina elipsoida (kanonska) je : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



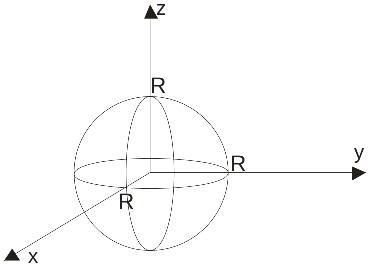
a,b i c su odsečci na x,y i z osi. Presek elipsoida sa koordinatnim ravnima uvek daje elipsu.

Ovaj elipsoid je centralni, to jest centar mu je u koordinatnom početku $O(0,0,0)$. Može se desiti da je centar van

koordinatnog početka, pa takav elipsoid ima formulu: $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}+\frac{(z-r)^2}{c^2}=1$, gde je centar u tački C(p,q,r).

Ako je $a=b=c$ i recimo $a=b=c$=R onda jednačina postaje **jednačina sfere** :

$x^2+y^2+z^2=R^2$ ovo je sfera sa centrom u koordinatnom početku $O(0,0,0)$, poluprečnika R.



Naravno, i sfera može imati centar van koordinatnog početka, pa je onda jednačina takve sfere:

$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2$ gde je centar u tački C(p,q,r).

Primer 1.

Nadji centar i poluprečnik sfere $x^2+y^2+z^2+4x-6y-10z-42=0$

Rešenje

Da bi ' sklopili ' sferu , radićemo slično kao i kod sklapanja jednačine kružnice, vršićemo dopune do punog kvadrata...

Najpre pretumbamo, sve uz x, pa uz y, pa uz z.

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y-10z-42=0$$
$$x^2+4x+y^2-6y+z^2-10z-42=0$$

Dodajemo i oduzimamo $(\frac{onaj\ \text{uz x}}{2})^2$, pa $(\frac{onaj\ \text{uz y}}{2})^2$ i $(\frac{onaj\ \text{uz z}}{2})^2$

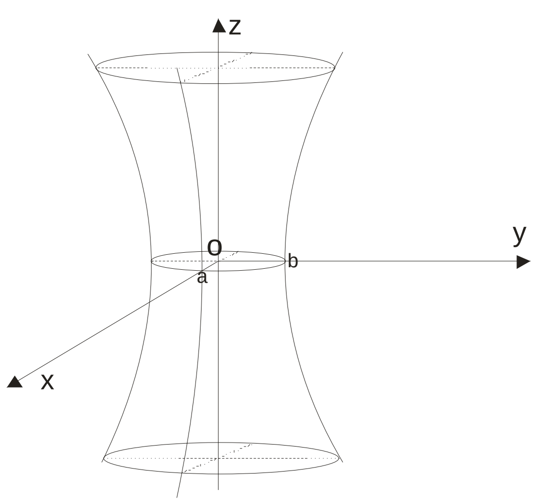
$$\underline{x^2+4x+4}-4+\underline{y^2-6y+9}-9+\underline{z^2-10z+25}-25-42=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-80=0$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=80$$

Odavde je C(-2,3,5) i $R^2=80 \to R=\sqrt{80}$

2. Hiperboloidi

Postoje dve vrste hiperboloida : jednograni i dvograni.

Jednograni hiperboloid ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ i izgleda :

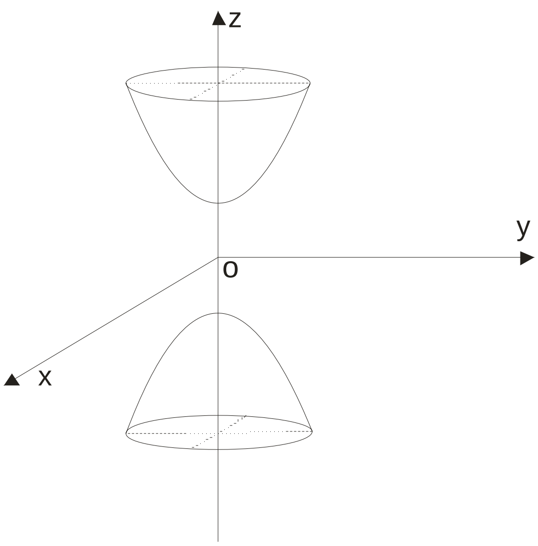


Vidimo da se on " prostire " duž z – ose, a može biti i duž x -ose ili y- ose, gde bi se onda menjao znak minus u

jednačini hiperboloida: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ili $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Za početni jednograni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ važi da on u preseku sa ravni z = 0 daje elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ koja se naziva *grlo hiperboloida.*

Dvograni hiperboloid ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ i izgleda:

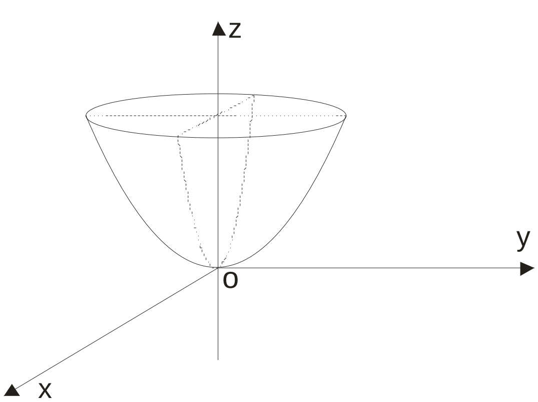


Vidimo da se i on nalazi duž z- ose. (opet zbog onog minusa)

3. <u>Paraboloidi</u>

Postoje dve vrste paraboloida : eliptički i hiperbolički.

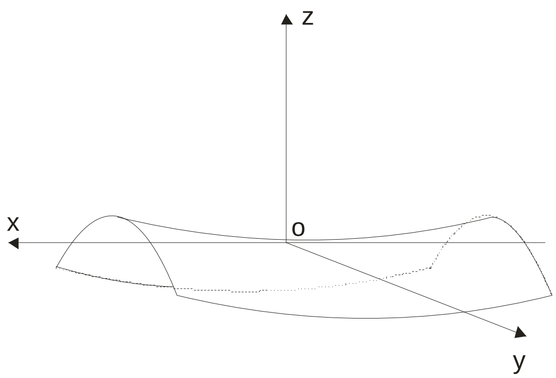
Eliptički paraboloid ima jednačinu $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ i izgleda :



Najčešće se u zadacima zadaje takozvani rotacioni paraboloid , kod koga je $p = q$ i njegova jednačina je onda:

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

Hiperbolički paraboloid (kao sedlo) ima jednačinu $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ a izgleda:



4. Konusne površi

Neka je D kriva u R^3 i V tačka u R^3. Skup pravih koji sadrže tačku V i tačke krive D nazivamo konusna površ.

Kriva D je *direktrisa* te konusne površi a svaka prava koja prolazi kroz tačku V i tačke krive D je *generatrisa*.

Posmatramo direktrisu $D:\{ \begin{matrix} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{matrix}$ i tačku V(a, b ,c) .

Neka tačka M(x,y,z) pripada konusnoj površi ako i samo ako pripada nekoj pravoj koja je odredjena vrhom V(a, b ,c) i nekom tačkom $A(\alpha,\beta,\gamma)$ sa direktrise *D.*

Praktično, mi radimo sledeće: koordinate tačke $A(\alpha,\beta,\gamma)$ zamenimo u direktrisu $\begin{matrix} F_1(\alpha,\beta,\gamma)=0 \\ F_2(\alpha,\beta,\gamma)=0 \end{matrix}$ i u jednačinu prave kroz dve tačke (kroz V i A) : $\frac{x-a}{\alpha-a} = \frac{y-b}{\beta-b} = \frac{z-c}{\gamma-c}$ (ovo inače važi i zbog kolinearnosti odgovarajućih vektora)

Iz dobijenih jednačina $\begin{matrix} F_1(\alpha,\beta,\gamma)=0 \\ F_2(\alpha,\beta,\gamma)=0 \end{matrix}$ i $\frac{x-a}{\alpha-a} = \frac{y-b}{\beta-b} = \frac{z-c}{\gamma-c}$ eliminišemo α,β i γ i dobijamo jednačinu konusne površi.

Primer 2.

Napisati jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački V(0,0,2) a direktrisa je kriva $D: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

Rešenje

Radimo kao u opisanom postupku…

$A(\alpha,\beta,\gamma)$ pripada direktrisi, pa je $D: \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \gamma=1 \end{cases}$ i $\frac{x-0}{\alpha-0}=\frac{y-0}{\beta-0}=\frac{z-2}{\gamma-2} \to \boxed{\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{\gamma-2}}$

Odavde moramo eliminisati α,β i γ…

Iz

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{\gamma-2} \to \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{1-2} \to \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{-1}$$

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{z-2}{-1} \to \boxed{\alpha=\frac{-x}{z-2}}$$

$$\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{-1} \to \boxed{\beta=\frac{-y}{z-2}}$$

smo izrazili α i β , sad ovo menjamo u direktrisu:

$$\boxed{\alpha=\frac{-x}{z-2}}\boxed{\beta=\frac{-y}{z-2}}$$

$$\alpha^2+\beta^2=9$$

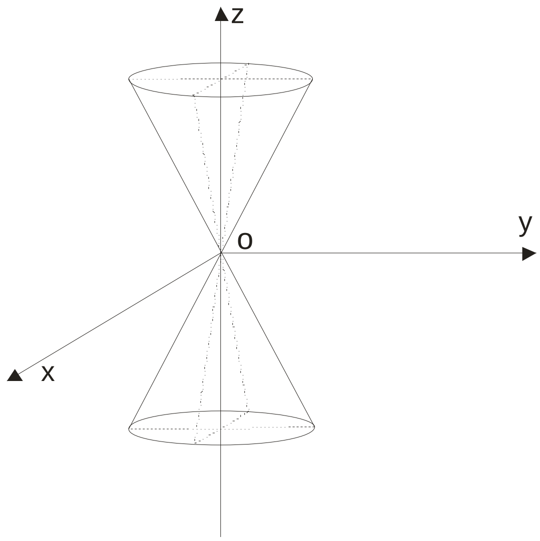
$$\left(\frac{-x}{z-2}\right)^2+\left(\frac{-y}{z-2}\right)^2=9$$

$$\frac{x^2}{(z-2)^2}+\frac{y^2}{(z-2)^2}=9$$

$$x^2+y^2=9(z-2)^2$$

I dobili smo jednačinu tražene konusne površi.

Još jedna stvar: u zadacima se najčešće pojavljuje *eliptički* konus koji ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ a izgleda :



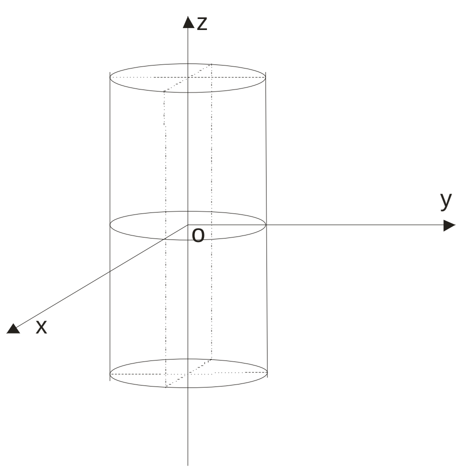
Naravno , često se u vezi sa integralima javlja i konus kod koga je $a = b = c = 1$, to jest $x^2 + y^2 = z^2$

5. Cilindrične površi

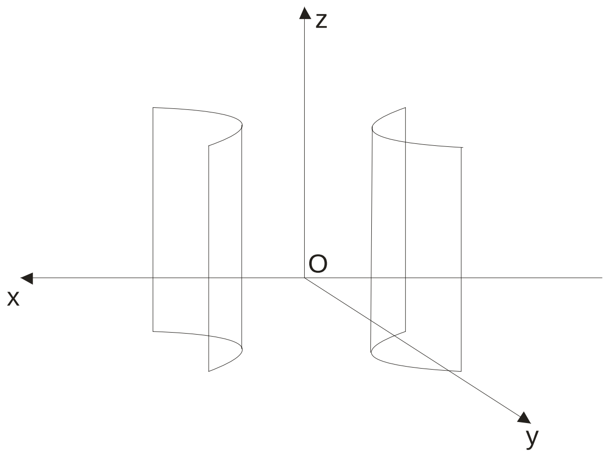
Neka su u R^3 dati vektor $\vec{p}$ i kriva *K*. Unija svih pravih u R^3 koje su paralelne sa datim vektorom $\vec{p}$ i seku krivu *K* naziva se *cilindrična površ*.

Tri najpoznatije cilindrične površi su :

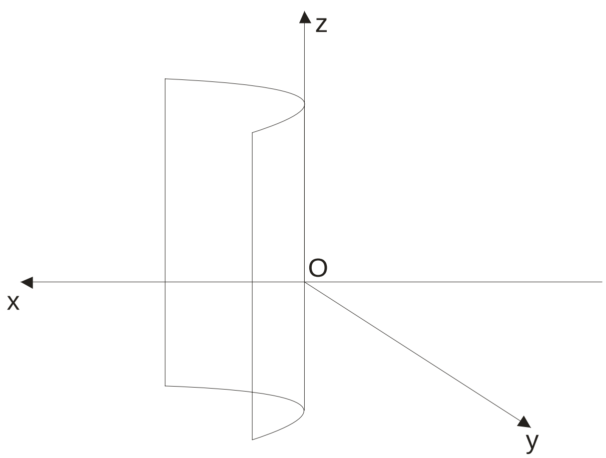
i) *eliptički cilindar* koji ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i izgleda :



ii) *hiperbolički cilindar* koji ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i izgleda :



iii) *parabolički cilindar* koji ima jednačinu $y^2 = 2px$ i izgleda:



Jednačinu cilindrične površi izvodimo na sledeći način:

Neka su nam dati vektor $\vec{p}=(l,m,n)$ i kriva K : $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ (direktrisa)

Uočimo tačku $A(\alpha,\beta,\gamma)$ koja zadovoljava:

$$\begin{matrix} F(\alpha,\beta,\gamma)=0 \\ G(\alpha,\beta,\gamma)=0 \end{matrix} \quad \text{i} \quad \frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

Odavde eliminišemo α,β i γ .

Primer 3.

Odrediti jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa krug $D:\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ a generatrisa je paralelna vektoru $\vec{p}=(1,1,1)$.

Rešenje:

Ako tačka $A(\alpha,\beta,\gamma)$ pripada direktrisi onda je $\begin{matrix} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \gamma=1 \end{matrix}$ i $\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-\gamma}{1}$

Iz

$$\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-\gamma}{1} \wedge z=0 \to \frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-0}{1} \to x-\alpha=y-\beta=z$$
$$x-\alpha=z \to \boxed{\alpha=x-z}$$
$$y-\beta=z \to \boxed{\beta=y-z}$$

Ovo zamenimo u

$$\alpha^2+\beta^2=1$$

I dobijamo traženu jednačinu cilindrične površi $\boxed{(x-z)^2+(y-z)^2=1}$

www.matematiranje.com