INTEGRALI ZADACI (VI-DEO)
Integracija nekih iracionalnih funkcija

Kad smo radili racionalna funkcije, videli smo da ,u principu, možemo odrediti integral svake racionalne funkcije.

Zato će nam kod integrala sa iracionalnom funkcijom prvi poso biti da ga pogodnom smenom ili na neki drugi način svedemo na integral racionalne funkcije.

Proučićemo tri metode za rešavanje:

i) **Rešavanje integrala tipa** $\int R[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}},.......(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}]dx$

ii) **Integracija diferencijalnog binoma**

iii) **Ojlerove smene**

Integrali tipa $\int R[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}},.......(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}]dx$

Ovde ćemo uzimati smenu $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$**, gde je k najmanji zajednički sadržalac za razlomke** $\frac{m}{n},.......,\frac{r}{s}$

$\boxed{\text{Primer 1.}}$ $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=?$

Ovde imamo samo $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ pa će nam smena biti $x=t^2$.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{vmatrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{vmatrix}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{tdt}{1+t}=\text{Kao trik dodamo i oduzmemo 1 u brojiocu}=$$

$$2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=2\left(\int\frac{\cancel{t+1}}{\cancel{1+t}}dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right)=2\left(\int dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right)=2(t-\ln|1+t|)+C\rightarrow\text{vratimo smenu}$$

$$=\boxed{2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C}$$

$\boxed{\text{Primer 2.}}$ $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = ?$

Sada imamo dva različita korena $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ i $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow$ smena je $x = t^6$, jer je 6 najmanji zajednički sadržalac za 2 i 3.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1-\sqrt[3]{t^6}}6t^5 dt = 6\int \frac{t^3}{1-t^2} \cdot t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{1-t^2}dt$$

Dobili smo integral racionalne funkcije , što nam je i bio cilj. Ovde je racionalna funkcija neprava, pa najpre moramo

podeliti polinome da dobijemo pravu racionalnu funkciju...

$$\frac{t^8}{1-t^2} = -\frac{t^8}{t^2-1}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{t^8} : (t^2-1) = t^6 + t^4 + t^2 + 1 \\ \underline{\pm \cancel{t^8} \mp t^6} \\ \quad \cancel{t^6} \\ \quad \underline{\pm \cancel{t^6} \mp t^4} \\ \qquad \cancel{t^4} \\ \qquad \underline{\pm \cancel{t^4} \mp t^2} \\ \qquad\quad \cancel{t^2} \\ \qquad\quad \underline{\pm \cancel{t^2} \mp 1} \\ \qquad\qquad 1 \rightarrow \text{ostatak} \end{array}$$

Pa je $\frac{t^8}{1-t^2} = -\frac{t^8}{t^2-1} = -(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1})$

$$6\int \frac{t^8}{1-t^2}dt = -6\int (t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1})dt = -6(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|) + C \rightarrow \text{ vratimo smenu } t = \sqrt[6]{x}$$

$$= \boxed{-6(\frac{\sqrt[6]{x}^7}{7} + \frac{\sqrt[6]{x}^5}{5} + \frac{\sqrt[6]{x}^3}{3} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|) + C}$$

<u>**Integracija diferencijalnog binoma**</u>

Pod ovom klasom integrala podrazumevamo integrale oblika $\boxed{\int x^m (a+bx^n)^p\,dx}$.

Podintegralni izraz se naziva *diferencijalni binom*.

Naš poso je da najpre dati integral "spakujemo" da bude ovakvog oblika a zatim da iz njega "pročitamo" vrednosti za

m,n,p a zatim i za ***a*** **i** ***b***.

U zavisnosti od vrednosti ovih brojeva razlikujemo **tri** situacije:

1) Ako je p-ceo broj , onda dizanjem binoma $(a+bx^n)$ na p-ti stepen, ovaj integral bude kao integral racionalne funkcije
2) Ako je $\frac{m+1}{n} \to$ ceo broj , smena je $a+bx^n = t^s$, gde je s imenilac razlomka p
3) Ako je $\frac{m+1}{n} + p \to$ ceo broj, tada je smena $ax^{-n} + b = t^s$, gde je s opet imenilac razlomka p

Posle smene, ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije kao što smo već pomenuli na početku fajla.

Primer 3. $\int \sqrt{\frac{x}{1+x^3}}\,dx = ?$

Spakujemo podintegralnu funkciju:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Ovaj integral uporedjujemo sa $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$

$$m = \frac{1}{2}; n = 3; p = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad a = 1; b = 1$$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \to \text{ nije ceo broj!}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \to \text{ ceo broj !}$$

Znači, ovo je treća situacija. Uzmemo odgovarajuću smenu:

$a\cdot x^{-n}+b=t^{s}$

$m=\frac{1}{2}; n=3; p=-\frac{1}{2}$ i $a=1; b=1$

$a\cdot x^{-n}+b=t^{s}\to 1\cdot x^{-3}+1=t^{2}\to \boxed{x^{-3}+1=t^{2}}$ je smena

E , sad nije lako. Znamo da posle uvodjenja smene novi integral treba da bude sve " *po t* " .

Smenu diferenciramo (nadjemo izvod i izrazimo *dx*). Iz smene izražavamo one izraze koje ostanu *po x* a moramo da ih prebacimo da budu *po t*. Ovde vam je neophodna dobra matematička tehnika od ranije...

$$\int\sqrt{\frac{x}{1+x^{3}}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x^{3})^{-\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} x^{-3}+1=t^{2}\to\frac{1+x^{3}}{x^{3}}=t^{2}\to 1+x^{3}=t^{2}x^{3}\to x^{3}=\frac{1}{t^{2}-1}\\ -3x^{-4}dx=2tdt\to dx=\frac{2tdt}{-3x^{-4}}\to dx=\frac{x^{4}2tdt}{-3}\end{array}\right|=$$

$$\int\sqrt{\frac{\cancel{x}}{t^{2}x^{\cancel{3}}}}\frac{x^{4}2tdt}{-3}=\int\frac{1}{\cancel{t}\,\cancel{x}}\frac{x^{\cancel{4}}2\cancel{t}dt}{-3}=-\frac{2}{3}\int x^{3}dt=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{t^{2}-1}dt=$$

$$=-\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\to \text{Moramo da vratimo smenu...}$$

$$x^{-3}+1=t^{2}\to t=\frac{\sqrt{1+x^{3}}}{\sqrt{x^{3}}}$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{1+x^{3}}}{\sqrt{x^{3}}}-1}{\frac{\sqrt{1+x^{3}}}{\sqrt{x^{3}}}+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{1+x^{3}}-\sqrt{x^{3}}}{\cancel{\sqrt{x^{3}}}}}{\frac{\sqrt{1+x^{3}}+\sqrt{x^{3}}}{\cancel{\sqrt{x^{3}}}}}\right|+C=\boxed{-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^{3}}-\sqrt{x^{3}}}{\sqrt{1+x^{3}}+\sqrt{x^{3}}}\right|+C}$$

$\boxed{\text{Primer 4.}}$ $\int\frac{dx}{x^{3}\cdot\sqrt[3]{(1+x^{-1})}}=?$

Opet najpre spakujemo podintegralnu funkciju i odredimo vrednisti za ***m,n,p*** i za ***a*** **i** ***b***.

$$\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{(1+x^{-1})}}=\int x^{-3}\cdot(1+x^{-1})^{-\frac{1}{3}}dx \rightarrow \int x^m(a+bx^n)^p dx \rightarrow m=-3; n=-1; p=-\frac{1}{3}; \text{ i } a=1; b=1$$

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{-1}=2\rightarrow ceo\ broj$$

Ovde dakle imamo 2. situaciju:

Smena je : $a+bx^n=t^s\rightarrow \boxed{1+x^{-1}=t^3}$

$$\left|\begin{array}{l} 1+x^{-1}=t^3\rightarrow x=\frac{1}{t^3-1} \\ -x^{-2}dx=2tdt\rightarrow dx=-x^2\cdot 2tdt \end{array}\right|$$

$$\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{(1+x^{-1})}}=\int\frac{-\cancel{x^2}\cdot 2tdt}{x^{\cancel{3}}\cdot\sqrt[3]{t^3}}=-2\int\frac{\cancel{t}dt}{x\cdot\cancel{t}}=-2\int\frac{dt}{x}\rightarrow \text{zamenimo x koje smo gore izrazili...}$$

$$=-2\int\frac{dt}{\frac{1}{t^3-1}}=-2\int(t^3-1)dt=-2(\frac{t^4}{4}-t)+C\rightarrow \text{moramo da vratimo smenu...}$$

Iz $1+x^{-1}=t^3\rightarrow t^3=1+\frac{1}{x}\rightarrow \boxed{t=\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}}$, pa je

$$-2(\frac{t^4}{4}-t)+C=-2(\frac{\sqrt[3]{(\frac{1+x}{x})^4}}{4}-\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}})+C=-2(\frac{\frac{1+x}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}}{4}-\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}})+C$$

$$=-2\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}(\frac{\frac{1+x}{x}}{4}-1)+C=\boxed{-2\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}(\frac{1+x}{4x}-1)+C}$$

Naravno , ako vaš profesor traži napakujte rešenje kakvo on voli...

<u>Ojlerove smene</u>

Ojlerove smene upotrebljavamo za rešavanje integrala oblika $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

To znači da se u imeniocu ovog integrala nalazi $\sqrt{ax^2+bx+c}$ pa **plus ili minus** neki linearni polinom po x.

Pazite, integrale oblika $\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešavamo smenom $mx+n=\frac{1}{t}$ i tako izbegnemo Ojlera…

Prva Ojlerova smena

U integralu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ posmatramo ax^2+bx+c .

Ako je $\boxed{a>0}$ uvodimo smenu $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t}$. Da li ćemo izabrati plus ili minus ispred $\sqrt{a}$ zavisi od konkretnog zadatka . Postupak je na dalje isti za oba znaka(recimo da smo uzeli plus):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=+\sqrt{a}x+t \text{.......................} \textit{kvadriramo}$$
$$ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x+t)^2$$
$$\cancel{ax^2}+bx+c=\cancel{ax^2}+2\sqrt{a}\cdot x\cdot t+t^2 \qquad \text{odavde izrazimo x}$$
$$bx-2\sqrt{a}\cdot x\cdot t=t^2-c$$
$$x(b-2\sqrt{a}\cdot t)=t^2-c$$
$$\boxed{x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}}$$

Sad diferenciramo, pazimo, na desnoj strani je izvod količnika …

Integral se svede na integraciju racionalne funkcije koja je *po t.*

Druga Ojlerova smena

Ako je u posmatranom integralu $\boxed{c>0}$, uvodimo smenu $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t\pm\sqrt{c}}$. Kao i u prethodnom slučaju, zavisno od zadatka , biramo plus ili minus ispred $\sqrt{c}$.

Ako recimo izaberemo plus , dalje radimo(i za minus bi radili isto):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t+\sqrt{c} \text{........................} \textit{kvadriramo}$$
$$ax^2+bx+\cancel{c}=x^2\cdot t^2+2x\cdot t\cdot\sqrt{c}+\cancel{c}$$
$$ax^2+bx-x^2\cdot t^2-2x\cdot t\cdot\sqrt{c}=0$$
$$x^2(a-t^2)+x(b-2\cdot t\cdot\sqrt{c})=0 \text{.......................izvučemo x kao zajednički}$$
$$x\cdot[x(a-t^2)+(b-2\cdot t\cdot\sqrt{c})]=0 \text{.........................} A\cdot B=0\Leftrightarrow A=0\vee B=0$$
$$x=0\vee x(a-t^2)+(b-2\cdot t\cdot\sqrt{c})=0$$
$$x(a-t^2)+b-2\cdot t\cdot\sqrt{c}=0$$
$$x(a-t^2)=2\cdot t\cdot\sqrt{c}-b$$
$$\boxed{x=\frac{2\cdot t\cdot\sqrt{c}-b}{a-t^2}}$$

Kao i u prvoj Ojlerovoj smeni x je izraženo kao funkcija *od t,* pa će po logici stvari i dx i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ takodje biti funkcije *od t*. Diferenciramo, vratimo se u integral i dobijemo integraciju racionalne funkcije.

<u>Treća Ojlerova smena</u>

Ova smena se koristi kad je diskriminanta za ax^2+bx+c pozitivna , odnosno kad ova kvadratna jednačina ima različita, realna rešenja. Tada je $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Uvodimo smenu $\boxed{\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\cdot t}$ ili $\boxed{\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_2)\cdot t}$.

Opet zavisi sve od konkretnog zadatka da li ćemo uzeti jednu ili drugu smenu...

Ako recimo uzmemo :

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\cdot t \text{.............}\textit{kvadriramo}$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)=(x-x_1)^2\cdot t^2 \text{......................... sve prebacimo na levu stranu}$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)-(x-x_1)^2\cdot t^2=0$$
$$(x-x_1)[a(x-x_2)-(x-x_1)\cdot t^2]=0 \to a(x-x_2)-(x-x_1)\cdot t^2=0$$
$$ax-ax_2-x\cdot t^2+x_1\cdot t^2=0$$
$$ax-x\cdot t^2=ax_2-x_1\cdot t^2$$
$$x(a-t^2)=ax_2-x_1\cdot t^2$$
$$\boxed{x=\frac{ax_2-x_1\cdot t^2}{a-t^2}}$$

Na dalje isto kao i kod prve i druge smene...dobijemo racionalnu funkciju itd.

$\boxed{\text{Primer 5.}}$ $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=?$

Najpre proverimo da li kvadratna funkcija pod korenom ima rešenja:

$$x^2+x+1=0 \to x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \to \text{nema realna rešenja!}$$

Ovde je *a=1, c=1.* Možemo uzeti prvu ili drugu Ojlerovu smenu.

Recimo uzmemo prvu.

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$ Kad zamenimo *a=1* dobijamo

$$\sqrt{x^2+x+1}=\pm x+t$$

Da li da biramo minus ili plus?

Kako je u imeniocu podintegralne funkcije $x+\sqrt{x^2+x+1}$, bolje je izabrati **minus** jer će posle ti *x-sevi* da se potiru:

$$x+\sqrt{x^2+x+1}=x+(-x+t)=\cancel{x}\cancel{-x}+t=t$$

Ne bi bila greška ni da uzmemo plus ali onda komplikujemo situaciju i sami sebi pravimo posao...

$\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$ kvadriramo

$x^2+x+1=(-x+t)^2$

$\cancel{x^2}+x+1=\cancel{x^2}-2tx+t^2$ sve sa x prebacimo na levu stranu

$x+2tx=t^2-1$

$x(1+2t)=t^2-1$

$\boxed{x=\frac{t^2-1}{2t+1}}$ diferenciramo(izvod)

$dx=\left(\frac{t^2-1}{2t+1}\right)^{`}dt$ pazi , moramo izvod količnika

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$dx=\frac{4t^2+2t-2t^2+2}{(2t+1)^2}dt$$

$$dx=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$$

$$\boxed{dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt}$$

Vraćamo se u integral:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt}{x-x+t}=\int\frac{\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt}{t}=\int\frac{2(t^2+t+1)}{t\cdot(2t+1)^2}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt$$

Dobili smo racionalnu funkciju . Postupak njenog rešavanja je detaljno objašnjen u jednom od prethodnih fajlova sa zadacima iz integrala.

Izvlačimo racionalnu funkciju:

$$\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}\text{.............................}/\cdot t\cdot(2t+1)^2$$
$$t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+Ct$$
$$t^2+t+1=A(4t^2+4t+1)+2Bt^2+Bt+Ct$$
$$t^2+t+1=4At^2+4At+A+2Bt^2+Bt+Ct$$
$$t^2+t+1=t^2(4A+2B)+t(4A+B+C)+A$$

uporedjujemo:

$$4A+2B=1$$
$$4A+B+C=1$$
$$\underline{A=1}$$
$$4+2B=1\rightarrow 2B=-3\rightarrow \boxed{B=-\frac{3}{2}}$$
$$4-\frac{3}{2}+C=1\rightarrow \boxed{C=-\frac{3}{2}}$$

Vratimo se u razlaganje:

$$\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}=\frac{1}{t}+\frac{-\frac{3}{2}}{2t+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{(2t+1)^2}$$

Sad integral od svakog posebno...

$$\int\frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt=\int\frac{1}{t}dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{2t+1}dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(2t+1)^2}$$

Ovaj treći ćemo rešiti *na stranu*...

$$\int\frac{dt}{(2t+1)^2}=\left|\begin{matrix}2t+1=z\\2dt=dz\\dt=\frac{1}{2}dz\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z^2}=\frac{1}{2}\int z^{-2}dz=\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2z}=\boxed{-\frac{1}{2(2t+1)}}$$

Sada je:

$$\int \frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt = \int \frac{1}{t}dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{2t+1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(2t+1)^2}$$

$$= \ln|t| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+1| - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2(2t+1)}\right) + C$$

$$= \ln|t| - \frac{3}{4}\ln|2t+1| + \frac{3}{4(2t+1)} + C$$

Dakle rešenje ovog integrala *po t* je:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{t^2+t+1}{t\cdot(2t+1)^2}dt = 2\left(\ln|t| - \frac{3}{4}\ln|2t+1| + \frac{3}{4(2t+1)}\right) + C$$

Moramo da vratimo *t*.

Iz $\sqrt{x^2+x+1} = -x+t \rightarrow \boxed{t = x+\sqrt{x^2+x+1}}$

$$2\left(\ln|t| - \frac{3}{4}\ln|2t+1| + \frac{3}{4(2t+1)} + C\right) =$$

$$\boxed{2\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{4}\ln\left|2(x+\sqrt{x^2+x+1})+1\right| + \frac{3}{4(2(x+\sqrt{x^2+x+1})+1)}\right) + C}$$

Ako vaš profesor zahteva vi malo ovo prisredite...