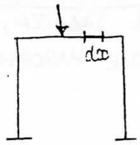
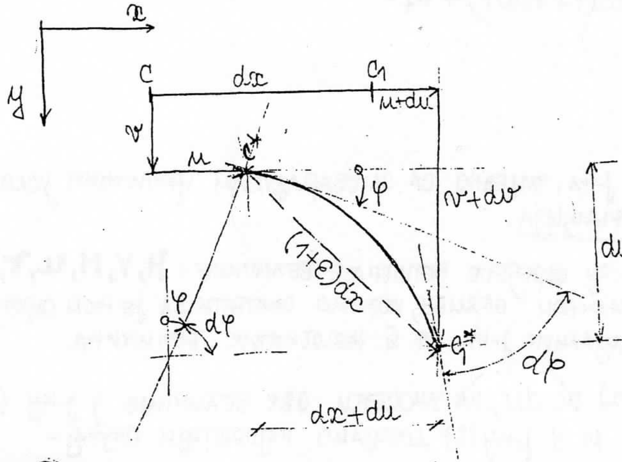
① ОСНОВНЕ Ј-НЕ ПРАВОГ ШТАПА ПО ТЕОРИЈИ КОНАЧНИХ ДЕФОРМАЦИЈА (Т III РЕДА)



– ИЗ НОСАЧА ИЗДВАЈАМО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО МАЛИ ЕЛЕМЕНТ ДУЖИНЕ dx



ИЗМЕЂУ ПОМЕРАЊА И ДЕФОРМАЦИЈА ПОСТОЈЕ СЛЕДЕЋЕ ВЕЗЕ (ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ):

$$\boxed{(1)\quad dx+du \cong (1+\varepsilon)dx\cos\varphi}$$

$$\boxed{(2)\quad dv \cong (1+\varepsilon)dx\sin\varphi}$$

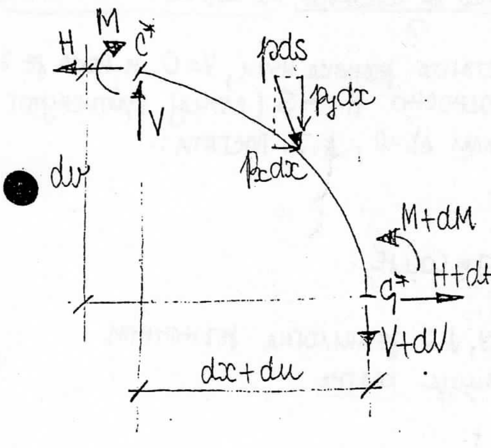
● ПОЛАЗНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ СУ:

- ШТАП ЈЕ ПРАВ ПРЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ $ds=dx,\ dy=0$
- НА НОСАЧ ДЕЛУЈЕ МРТВО ОПТЕРЕЋЕЊЕ (КОНЗЕРВАТИВНО)

→ МРТВО-КОНЗЕРВАТИВНО ОПТ. СЕ У ТОКУ ДЕФОРМАЦИЈЕ НЕ МЕЊА ПО ПРАВЦУ И ИНТЕНЗИТЕТУ, А МОЖЕ СЕ СМАТРАТИ ДА ЈЕ ЗАДАТО ПО ЕЛЕМЕНТУ ДУЖИНЕ НЕДЕФОРМИСАНОГ ШТАПА. ЊЕГОВ РАД НЕ ЗАВИСИ ОД ПУТАЊЕ НАПАДНИХ ТАЧАКА ТОКОМ ДЕФОРМАЦИЈЕ, ВЕЋ САМО ОД КРАЈЊИХ ПОЛОЖАЈА ТАЧАКА. (СНЕГ, ПОКРЕТНО ОПТ...)

АКО СЕ ОДБАЦИ ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ВЕЛИЧИНАМА ПОМЕРАЊА НАПАДНИХ ТАЧАКА СПОЉНИХ СИЛА, ОНДА СЕ УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ПОСТАВЉАЈУ **НА ДЕФОРМИСАНОМ ЕЛЕМЕНТУ ШТАПА.**

УСЛОВЕ РАВНОТЕЖЕ ПОСТАВЉАМО У ТАЧКИ C_1:



$$\Sigma H=0:\ \cancel{H}+dH+p_x dx-\cancel{H}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(3)\quad dH+p_x dx=0}$$

$$\Sigma V=0:\ \cancel{V}+dV+p_y dx-\cancel{V}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(4)\quad dV+p_y dx=0}$$

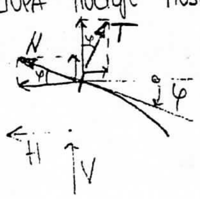
$$\Sigma M=0:$$

$$M+dM-M+Hdv-V(dx+du)-p_x dx\frac{dv}{2}+p_y dx\frac{dx+du}{2}=0$$

МАЛЕ ВЕЛИЧИНЕ ВИШЕГ РЕДА У ОДНОСУ НА ОСТАЛЕ У Ј-НИ И САД ИХ ВЕЋ МОЖЕМО ЗАНЕМАРИТИ

$$\boxed{(5)\quad dM+Hdv-V(dx+du)=0}$$

– ИЗМЕЂУ КОМПОНЕНАТА ПРИРОДНОГ СИСТЕМА КООРДИНАТА ВЕКТОРА УНУТРАШЊИХ СИЛА И ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТА ИСТОГ ВЕКТОРА ПОСТОЈЕ ПОЗНАТЕ ВЕЗЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ:



$$N=H\cos\varphi+V\sin\varphi$$

$$T=-H\sin\varphi+V\cos\varphi$$

Између деформацијских величина с једне стране и сила у пресецима и температурних промена с друге стране, ∃ одређене везе. Уз задржавање претпоставке о физичкој линеарности задатка, узимајући да су сагласно Hooke-овом закону дилатације линеарно пропорционалне напонима и температурним променама, ове везе гласе:

$$\boxed{(6)\quad \varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ} \qquad \varepsilon = \frac{1}{EF}(H\cos\varphi + V\sin\varphi) + \alpha_t t^\circ$$

$$\boxed{(7)\quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}}$$

Овај систем од 7 диференцијалних ј-на, заједно са одговарајућим граничним условима дефинише задатак теорије коначних деформација.

На располагању имамо 7 ј-на којима су одређене непознате величине: **H, V, M, u, v, φ и ε**, укупно 7 непознатих. Како је ј-на (6) дата у коначном облику, можемо сматрати да је њом одређена величина ε, па имамо систем од 6 диференцијалних ј-на са 6 непознатих величина.

Решимо ли ј-ну (1) по du и ј-ну (2) по dv, па уносећи ове величине у ј-ну (5) и решавајући ј-ну (7) по M, уносећи такође и M у ј-ну (5) добијамо најопштији случај - диференцијалну једначину еластичности:

$(1) \rightarrow du = (1+\varepsilon)dx\cos\varphi - dx$; $\quad (2) \rightarrow dv = (1+\varepsilon)dx\sin\varphi$

$(7) \rightarrow M = -EJ\varphi' - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} EJ$

$$(5)\quad -(EJ\varphi')' - \left(EJ\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)' + H(1+\varepsilon)dx\sin\varphi - V(\cancel{dx} + (1+\varepsilon)dx\cos\varphi - \cancel{dx}) = 0$$

$$\boxed{(EJ\varphi')' + \left(EJ\alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)' + (1+\varepsilon)\cancel{dx}(V\cos\varphi - H\sin\varphi) = 0}$$ **Д.Ј. ЕЛАСТИЧНОСТИ**

Поред непознате φ, фигуришу још и величине H и V. Како се вредности ових величина разликују од вредности ових величина одређених линеарном теоријом само за константу, не морамо их сматрати непознатим величинама. $H=0 \Rightarrow V=const$?

Ако су гранични услови такви да је ова константа једнака нули, $V=0$, и нека је задато само аксијално оптерећење на крајевима, тј. $p_x=0$, односно $H=-S$ (случај притиснутог штапа на крајевима), то ће у случају да је $\Delta t = const$ или $\Delta t = 0$, Д.Ј. постати:

$$(EJ\varphi')' + (1+\varepsilon)S\sin\varphi = 0$$

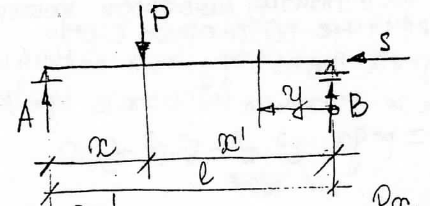
Ако је дилатација занемарљиво мала, $\varepsilon \simeq 0$ и $EJ = const$:

$$\varphi'' + \frac{S}{EJ}\sin\varphi = 0$$ - према Kirchoff-у, Д.Ј. је аналогна једначини коначних осцилација клатна

② ОСНОВНЕ Ј-НЕ ПО ТЕОРИЈИ II РЕДА И СУПЕРПОЗИЦИЈА УТИЦАЈА ПО Ⓣ II РЕДА

У ТЕОРИЈИ II РЕДА **ВАЖИ ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ДЕФОРМАЦИЈАМА**, АЛИ НЕ И ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ПОМЕРАЊИМА. ДАКЛЕ, ДЕФОРМАЦИЈЕ СЕ ЗАНЕМАРУЈУ АЛИ СЕ ПОМЕРАЊА МОРАЈУ УЗЕТИ У ОБЗИР.

* ТЕОРИЈА I РЕДА *

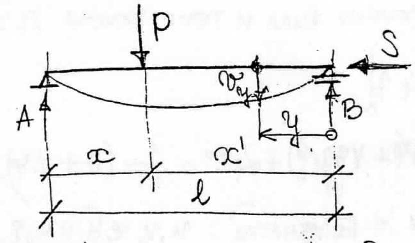


$$A=\frac{Px'}{l} \qquad B=\frac{Px}{l}$$

$$M_y^{I}=B\times y=\frac{Px}{l}y$$

* ТЕОРИЈА II РЕДА *

– ПОМЕРАЊЕ У ХОРИЗОНТАЛНОМ ПРАВЦУ СМО ЗАНЕМАРИЛИ



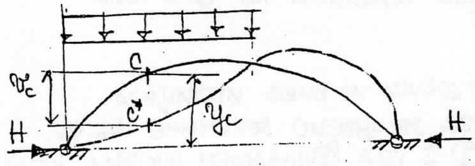
$$A=\frac{Px'}{l} \qquad B=\frac{Px}{l}$$

$$M_y^{II}=By+Sv_y=\frac{Px}{l}\times y+Sv_y=M_y^{I}+S\times v_y$$

УКОЛИКО РАЗМАТРАМО РАВНОТЕЖУ НЕДЕФОРМИСАНОГ ШТАПА (Ⓣ I РЕДА) СИЛА S НЕЋЕ ДАТИ МОМЕНАТ. АКО РАЗМАТРАМО РАВНОТЕЖУ НА ДЕФОРМИСАНОМ ШТАПУ (Ⓣ II РЕДА) СИЛА S ЋЕ ДАВАТИ МОМЕНАТ. КАКО ЈЕ $\boxed{\text{S ЧЕСТО ВЕОМА ВЕЛИКА СИЛА}}$, ТО И ПОРЕД МАЛЕ ВРЕДНОСТИ ПОМЕРАЊА v_y, ПРОИЗВОД $S\cdot v_y$ МОЖЕ БИТИ ДОВОЉАН, А ЧЕСТО И ВЕОМА ЗНАЧАЈАН ЈЕР И ОН УТИЧЕ НА ДАЉЕ ПОВЕЋАЊЕ УГИБА v_y.

ТЕОРИЈА II РЕДА ЈЕ ИНТЕРЕСАНТНА (ЗНАЧАЈНА) КАД ПОСТОЈЕ ВЕЛИКЕ АКСИЈАЛНЕ СИЛЕ И КОД НОСАЧА СА ИЗРАЖЕНОМ ДЕФОРМАБИЛНОШЋУ (ТЗВ. МЕКАНИ СИСТЕМИ), НПР. КОД МОСТОВА ВЕЛИКИХ РАСПОНА, КОД КОЈИХ СЕ ЈАВЉАЈУ ЗНАЧАЈНА ПОМЕРАЊА КОЈА СЕ МОРАЈУ УЗЕТИ У ОБЗИР.

ПРИМЕР ①:



– ИЗРАЗ ЗА МОМЕНАТ ПО Ⓣ I РЕДА: $\boxed{M_c^{I}=M_{co}-H\times y_c}$

H – ХОРИЗОНТАЛНИ ПОТИСАК

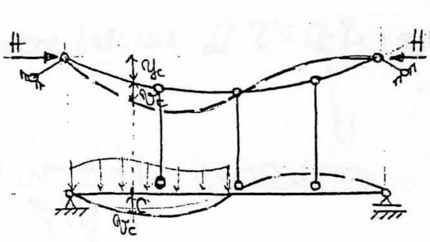
M_{co} – МОМЕНАТ У ПРЕСЕКУ C ПРОСТЕ ГРЕДЕ

– ИЗРАЗ ЗА МОМЕНАТ ПО Ⓣ II РЕДА $\boxed{M_c^{II}=M_{co}-H\times y_c+H\times v_c=M_c^{I}+H\times v_c}$

$M_c^{II}>M_c^{I}$ – ПРОРАЧУН ПО Ⓣ I РЕДА НИЈЕ НА СТРАНИ СИГУРНОСТИ; ТАЧНИЈИ ЈЕ ПРОРАЧУН ПО Ⓣ II РЕДА (УВЕК)

{ОВДЕ ГОВОРИМО САМО О ИЗВИЈАЊУ; ОВО НИЈЕ КРИТИЧАН ПОЛОЖАЈ, ВЕЋ САМО НЕКА ПРЕДКРИТИЧНА ФАЗА}

ПРИМЕР②: ВИСЕЋИ МОСТ



$$M_c^{I}=M_{co}-Hy_c$$

$$M_c^{II}=M_{co}-H(y_c+v_c)=M_{co}-Hy_c-Hv_c=M_c^{I}-Hv_c$$

$M_c^{II}<M_c^{I}$ – ОВДЕ ЈЕ ПРОРАЧУН ПО Ⓣ I РЕДА НА СТРАНИ СИГУРНОСТИ АЛИ СМО ЗАТО ПРЕДИМЕНЗИОНИСАЛИ НОСАЧ

КАКО СУ ОБИЧНО У ПИТАЊУ ВЕОМА ВЕЛИКИ РАСПОНИ ОВАКВИХ МОСТОВА, ТО ЋЕ ТАЧНИЈИ ПРОРАЧУН ДАТИ И ЕКОНОМИЧНИЈА РЕШЕЊА

* ОСНОВНЕ Ј-НЕ *

ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ПОМЕРАЊА И ДЕФОРМАЦИЈА ПО Ⓣ II РЕДА:

$$du+dx=(1+\varepsilon)dx\cos\varphi$$
$$dv=(1+\varepsilon)dx\sin\varphi$$

– УВОДИМО ПОМ: $\varepsilon\ll1,\ \varphi\ll1 \Rightarrow \cos\varphi=1,\ \sin\varphi=\varphi,\ \varepsilon\times\varphi=0$:

$$du+\cancel{dx}=\cancel{dx}\cos\varphi+\varepsilon dx\cos\varphi=\cancel{dx}+\varepsilon dx \rightarrow \boxed{(1)\ du=\varepsilon dx}$$

$$dv=dx\sin\varphi+\varepsilon dx\sin\varphi=\varphi dx+\underbrace{\varepsilon\varphi}_{0}dx \Rightarrow \boxed{(2)\ dv=\varphi dx}$$

УР НА ДЕФОРМИСАНОМ ЕЛЕМЕНТУ ПОСТАВЉЕНИ У ТАЧКИ i_1:

(3) $dH + p_x dx = 0$
(4) $dV + p_y dx = 0$
(5) $dM - V(dx + du) + H dv = 0$

ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ДЕФ-ЈА И ПРЕСЕЧНИХ СИЛА И ТЕМП. ПРОМЕНА УЗ ЗАДРЖАВАЊЕ П.П. О ФИЗИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА:

(6) $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$

(7) $\varepsilon = \frac{1}{EF}(H\underbrace{\cos\varphi}_{1} + V\underbrace{\sin\varphi}_{\varphi}) + \alpha_t t^0 = \frac{1}{EF}(H + V\cdot\varphi) + \alpha_t t^0$

→ величине по теорији II реда једнаке производу тих величина где је статичка непозната одређена Т I реда $\underset{H,V}{S^{II}} \cdot \underset{u,v,\varphi}{D^{II}} = S^{I}\cdot D^{II} = S_0 \cdot D$

– СИСТЕМ ОД 7 Ј-НА СА 7 НЕПОЗНАТИХ: $u, v, \varphi, H, V, M, \varepsilon$.

* ЛИНЕАРИЗОВАНА Т II РЕДА *

– ОСНОВНЕ Ј-НЕ Т II РЕДА

(1) $du = \varepsilon dx$
(2) $dv = \varphi dx$
(3) $dH + p_x dx = 0$
(4) $dV + p_y dx = 0$
(5) $dM - \underline{V}(dx + \underline{du}) + \underline{H dv} = 0$
(6) $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$
(7) $\varepsilon = \frac{1}{EF}(H + \underline{V\varphi}) + \alpha_t t^0$

ОВАЈ СИСТЕМ Ј-НА ЈЕ НЕЛИНЕАРАН ЈЕР СЕ НЕПОЗНАТЕ МНОЖЕ ИЗМЕЂУ СЕБЕ ПА СЕ НЕ МОЖЕ РЕШИТИ.

ВРШИМО ЛИНЕАРИЗАЦИЈУ ОСНОВНИХ Ј-НА ПО Т II РЕДА ПОЛАЗИМО ОД ПРЕТПОСТАВКЕ **ДА ЈЕ ПРОИЗВОД СТАТИЧКЕ И ДЕФОРМАЦИЈСКЕ НЕПОЗНАТЕ ЈЕДНАК ПРОИЗВОДУ ИСТИХ НЕПОЗНАТИХ**, ГДЕ ЈЕ СТАТИЧКА НЕПОЗНАТА ОДРЕЂЕНЕ ПРЕМА ЛИНЕАРНОЈ ТЕОРИЈИ (Т I РЕДА).

$\boxed{S\cdot D \cong S_0 \cdot D}$

S_0 – СТАТИЧКА ВЕЛИЧИНА ПО Т I РЕДА

Ј-не од (3)÷(6) се не мењају у односу на Т великих п-ја

(1) $du = \varepsilon dx$
(2) $dv = \varphi dx$
(3) $dH + p_x dx = 0$
(4) $dV + p_y dx = 0$
(5*) $dM + H_0 dv - V dx - V_0 du = 0$
(6) $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$
(7) $\varepsilon = \frac{1}{EF}(H + V_0\cdot\varphi) + \alpha_t t^0$

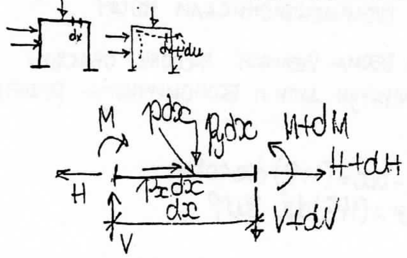
РЕШЕЊЕ СЕ ДОБИЈА ИЗ ВИШЕ ИТЕРАЦИЈА. У I ИТЕРАЦИЈИ УБАЦУЈЕМО ВЕЛИЧИНЕ H_0, V_0 ДОБИЈЕНЕ ПО Т I РЕДА. РЕШАВАЊЕМ СИСТЕМА ДОБИЈАМО ВЕЛИЧИНЕ H^I И V^I СА КОЈИМА УЛАЗИМО У II ИТЕРАЦИЈУ. ПОСТУПАК СЕ ПОНАВЉА ДОК СЕ НЕ ДОБИЈУ РЕШЕЊА ТРАЖЕНЕ ТАЧНОСТИ (ТАЧНА РЕШЕЊА).

ЛИНЕАРИЗАЦИЈА СЕ МОЖЕ ВРШИТИ И ДРУГАЧИЈЕ: $S\cdot D \cong S\cdot D_0$ АЛИ ОВАЈ ПОСТУПАК НИЈЕ ТАКО ЕФИКАСАН.

* ТЕОРИЈА I РЕДА (ЛИНЕАРНА Т) *

уводи се и ПОМП

отпадају Vdu и Hdv и $V\cdot\varphi$

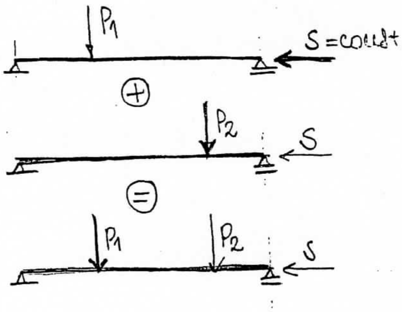


(1) $du = \varepsilon dx \approx 0$
(2) $dv = \varphi dx$
(3) $dH + p_x dx = 0$
(4) $dV + p_y dx = 0$
(5) $dM - V dx = 0$
(6) $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$
(7) $\varepsilon = \frac{H}{EF} + \alpha_t \cdot t^0$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ СЕ ПОСТАВЉАЈУ **НА НЕДЕФОРМИСАНОМ ЕЛЕМЕНТУ**

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ

- Суперпозиција се може вршити само за попречна оптерећења штапа **при const аксијалној сили**



Величине свих деформација и момената линеарно зависе од попречног оптерећења уколико се аксијална сила не мења. Деформационе величине и моменти произвољног попречног пресека при константној аксијалној сили S, изазвани произвољним системом попречних сила P, су једнаке суми деформација односно момената од дејства појединачно сваке силе при истој аксијалној сили.

$$\boxed{Z_1(P_1,S)+Z_2(P_2,S)=Z_{12}(P_1+P_2,S)}$$