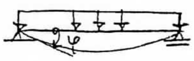
② ВАЖЕЊЕ ПРЕТПОСТАВКЕ У ЛИНЕАРНОЈ ТЕОРИЈИ (Т I РЕДА), ТЕОРИЈИ II Р, ЛИНЕАРИЗОВАНОЈ Т II РЕДА, ТЕОРИЈИ КОНАЧНИХ (ВЕЛИКИХ) ДЕФОРМАЦИЈА - Т III РЕДА

ОСНОВНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ:

а) ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ДЕФОРМАЦИЈАМА (ε, φ)

По овој претпоставци, дилатација ε и обртање попречног пресека φ су тако мале величине да је оправдано занемарити њихове квадрате и више степене

утицај смичућих сила занемарујемо | па немамо γ_t



$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$\varepsilon \ll 1, \varphi \ll 1$

$\cos\varphi \cong 1 \quad \sin\varphi \cong \varphi$

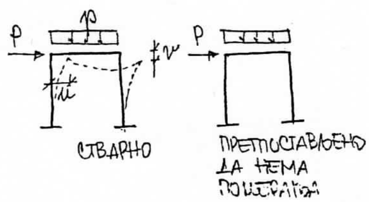
$\varepsilon \cdot \varphi \cong 0$

- ова претпоставка назива се и претпоставка о **геометријској линеарности** проблема

б) ПРЕТПОСТАВКА О МАЛИМ ВЕЛИЧИНАМА ПОМЕРАЊА НАПАДНИХ ТАЧАКА СПОЉНИХ СИЛА (u, v)

$u \to 0, v \to 0, \varphi \to 0$

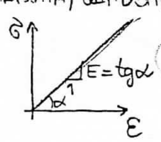
Ова претпоставка повлачи за собом исписивање услова равнотеже **на недеформисаном елементу штапа**, па се назива и претпоставка о **статичкој линеарности**.



- u и v су мале величине и са тим улазимо у прорачун
- у прорачуну узимамо да се носач није ни померио. При томе чинимо грешку, али минималну.

Када је нпр. у питању неки велики мост, померања не смемо занемарити јер су код њега померања велика, па је ту потребан тачнији прорачун.

в) ПРЕТПОСТАВКА О ЛИНЕАРНОМ ПОНАШАЊУ МАТЕРИЈАЛА: важи Хуков закон, веза између дилатација и напона, односно температурних промена је линеарна. Назива се и претпоставка о **физичкој линеарности**



$\sigma = E\varepsilon$

	ВАЖЕ ПРЕТПОСТАВКЕ					
	ЕЛАСТИЧНО (ЛИНЕАРНО) ПОНАШАЊЕ МАТЕРИЈАЛА			НЕЕЛАСТИЧНО (НЕЛИНЕАРНО) ПОНАШАЊЕ МАТЕРИЈАЛА		
ТЕОРИЈА КОНАЧНИХ (ВЕЛИКИХ) ДЕФОРМАЦИЈА	/	/	в	/	/	/
ТЕОРИЈА II РЕДА	а	/	в	а	/	/
ЛИНЕАРИЗОВАНА ТЕОРИЈА II РЕДА	а	/	в	а	/	/
ТЕОРИЈА I РЕДА	а	б	в	а	б	/

← НАЈТАЧНИЈА ТЕОРИЈА, АЛИ СЕ НЕ КОРИСТИ У ПРАКСИ

- линеаризована теорија II реда је најмање компликована теорија која нам даје тачан резултат.

За линеаризовану Т II реда важи још и претпоставка о производу статичких и деформацијских величина

$$S \times D = S_0 \times D$$

ТИР ТИР ТIР ТIР

1. штап је прав пре дефор. ($ds = dx, dy = 0$)
2. равна деформација
3. дејство конзервативних сила (мртво опт)
4. физичка линеарност
5. линеарна расподела температуре

!!!

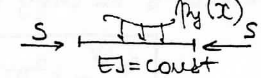
деформације су увек много мање од померања

7) МЕТОДА ПОЧЕТНИХ ПАРАМЕТАРА

ОСНОВНА Ј-НА СТАБИЛНОСТИ:

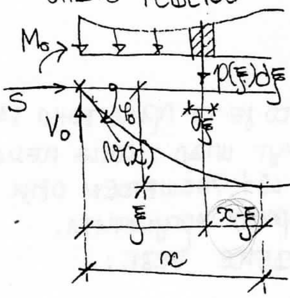
$$\boxed{v^{IV} + k^2 v'' = \frac{p_y}{EJ}} \qquad \boxed{k^2 = \frac{S}{EJ}} \quad \boxed{\left(k = \sqrt{\frac{S}{EJ}}\right)}$$

– Д.Ј. ПРАВОГ ШТАПА const поп. прес. који је оптерећен попречним опт. $p_y(x)$ и аксијалном силом притиска S на крају штапа, по Т II реда



ОПШТЕ РЕШЕЊЕ:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_h + v_p \\ v_h &= C_1 + C_2 kx + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx \\ v_p &= \int_0^x \frac{k(x-\xi) - \sin k(x-\xi)}{k \cdot S}\, p(\xi)\, d\xi \end{aligned}} \quad \xi \in [0, x]$$



ИНТЕГРАЦИОНЕ КОНСТАНТЕ ОДРЕЂУЈЕМО ИЗ ГРАНИЧНИХ УСЛОВА. ПРОБЛЕМ ЈЕ У ТОМЕ ШТО су НАМ ПОТРЕБНА 4 ГРАНИЧНА УСЛОВА.

СУШТИНА ОВЕ МЕТОДЕ ЈЕ У ТОМЕ ДА СЕ ИНТЕГРАЦИОНЕ КОНСТАНТЕ КОЈЕ НЕМАЈУ ЈАСНО ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ (C_1, C_2, C_3, C_4) ЗАМЕНЕ КОНСТАНТАМА КОЈЕ ИМАЈУ ЈАСНО ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ – v_0, φ_0, M_0, V_0 (УГИБ, НАГИБ, МОМЕНАТ И ТРАНСВЕРЗАЛНА СИЛА НА ПОЧЕТКУ ШТАПА) КАКО БИ СЕ ЛАКШЕ ДОШЛО ДО РЕШЕЊА. ОВЕ ВЕЛИЧИНЕ НАЗИВАМО **ПОЧЕТНИМ ПАРАМЕТРИМА ШТАПА.**

- $dv = \varphi\, dx \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{dv}{dx}}$

$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} \rightarrow \boxed{M = -EJ\frac{d\varphi}{dx} = -EJ\frac{d^2v}{dx^2}}$

$dM - V dx + H dv = 0$

$H = -S$

$V dx = dM - S dv \;/dx = \frac{dM}{dx} - S\frac{dv}{dx}$

$\boxed{V = -EJ\frac{d^3v}{dx^3} - S\frac{dv}{dx}}$

$v(x) = C_1 + C_2 kx + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx$

$v'(x) = C_2 k + C_3 k \cos kx - C_4 k \sin kx$

$v''(x) = -C_3 k^2 \sin kx - C_4 k^2 \cos kx$

$v'''(x) = -C_3 k^3 \cos kx + C_4 k^3 \sin kx$

- $v(x=0) = v_0 = C_1 + C_4 \longrightarrow C_1 = v_0 - C_4 \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = v_0 - \frac{M_0}{S}}$

$\varphi(x=0) = \varphi_0 = v'(x=0) = C_2 k + C_3 k \Rightarrow C_2 = \frac{\varphi_0 - C_3 k}{k} = \frac{\varphi_0}{k} - C_3 \quad \boxed{C_2 = -\frac{V_0}{Sk}}$

$k^2 = S/EJ$

$M_0 = -EJ v''(x=0) = -EJ(-C_4 k^2) = SC_4 \longrightarrow \boxed{C_4 = \frac{M_0}{S}}$

$V_0 = -EJ v'''(x=0) - S v'(x=0) = -EJ(-C_3 k^3) - S(C_2 k + C_3 k) = kSC_3 - S(\varphi_0 - C_3 k + C_3 k) = SkC_3 - S\varphi_0$

$C_3 = \frac{V_0 + S\varphi_0}{Sk} \qquad \boxed{C_3 = \frac{V_0}{Sk} + \frac{\varphi_0}{k}}$

$v(x) = v_0 - \frac{M_0}{S} - \frac{V_0}{Sk} kx + \left(\frac{V_0}{Sk} + \frac{\varphi_0}{k}\right)\sin kx + \frac{M_0}{S}\cos kx$

$$\boxed{v(x) = v_0 + \varphi_0 \frac{\sin kx}{k} - \frac{M_0}{S}(1 - \cos kx) - V_0 \frac{kx - \sin kx}{Sk} + v_p}$$

ЗА ШТАП ОПТЕРЕЋЕН САМО СИЛОМ ПРИТИСКА S:

$p(\xi) = 0 \Rightarrow v_p = 0$

$v = v_H$

$\varphi(x) = \varphi_0 \cos kx - M_0 \frac{k \sin kx}{S} - V_0 \frac{1 - \cos kx}{S} + v_p'$

$M(x) = \varphi_0 EJk \sin kx + M_0 \cos kx + V_0 \frac{\sin kx}{k} - EJ v_p''$

$k^2 M_0$

$V(x) = -EJv''' - Sv' = V_0 - \int_0^x p(\xi)\, d\xi$

ЗАТЕГНУТ ШТАП

Д.Ј. ПРАВОГ ШТАПА const поп.прес. који је опт. попречним опт. $p(x)$ и аксијалном силом затезања S на крају штапа:

$$\boxed{v^{IV} - k^2 v'' = \frac{p_y}{EJ}} \qquad k^2 = \frac{S}{EJ}$$

До општег р-ња ове ј-не можемо доћи на аналоган начин како је то приказано за притиснут штап. Користићемо, међутим, већ готово решење за притиснут штап у коме ћемо уместо S ставити -S, уместо k ставити $k \cdot i$ и уместо ω ставити ωi. Уношењем ових веза за притиснут штап, добијамо тригонометријске ф-је имагинарних аргумената. Између ових ф-ја и хиперболичких ф-ја реалних аргумената ∃ следеће везе:

$$\boxed{ch z = \cos iz} \qquad \boxed{sh z = -i \cdot \sin iz}$$

$$k^2 = \frac{S}{EJ} \quad k = \sqrt{\frac{S}{EJ}} \quad k_z = \sqrt{\frac{-S}{EJ}} = k \cdot i \qquad i^2 = -1$$

$$F_1^z(x) = 1$$

$$F_2^z(x) = \frac{\sin ikx}{ik} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{i \sin ikx}{k} = \frac{sh\,kx}{k}$$

$$F_3^z(x) = \frac{1-\cos ikx}{-S} = \frac{1-ch\,kx}{S}$$

$$F_4^z(x) = \frac{ikx - \sin ikx}{-ikS} \cdot \frac{i}{i} = \frac{kx - i\sin ikx}{kS} = \frac{kx - sh\,kx}{kS}$$

Утицаји у штапу могу се приказати у облику:

$$v(x) = v(0) + \varphi(0) F_2(x) + M(0) F_3(x) + V(0) F_4(x) - \int_0^x F_4(x-\xi) p(\xi) d\xi$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) ch\,kx - M(0) \frac{k\,sh\,kx}{S} + V(0) F_3(x) - \int_0^x F_3(x-\xi) p(\xi) d\xi$$

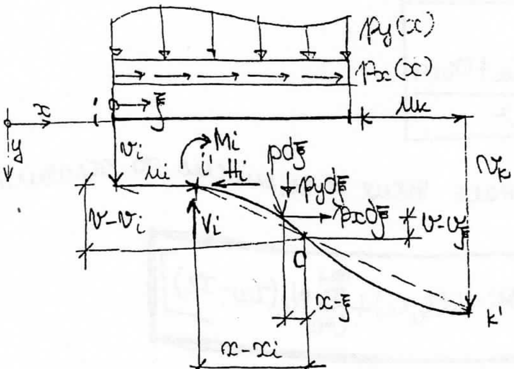
$$M(x) = -\varphi(0) EJk\, sh\,kx + M(0)\, ch\,kx + V(0) F_2(x) - \int_0^x F_2(x-\xi) p(\xi) d\xi$$

$$V(x) = V(0) - \int_0^x p(\xi) d\xi$$

F_1, F_2, F_3, F_4 представљају угибе, обртања, моменте и трансверзалне силе у пресеку x када делује одговарајућа јединична сила у пресеку $x=0$

(12) ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦНИ ПОСТУПАК

– ПРИМЕЊУЈЕМО ГА КАДА ЈЕ ШТАП ПРОМЕНЉИВОГ ПОП. ПРЕС. И КАДА ЈЕ N-СИЛА ПРОМЕНЉИВА ДУЖ ОСЕ ШТАПА. ($J \neq const$, $S \neq const$)



РАДИМО ПО Ⓣ II. РЕДА, Т.Ј. УСЛОВЕ РАВНОТЕЖЕ ПОСТАВЉАМО НА ДЕФОРМИСАНОМ ШТАПУ.

НЕ РАДИМО НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО МАЛОМ ЕЛЕМЕНТУ ВЕЋ НА НЕКОЈ КОНАЧНОЈ ДУЖИНИ.

– ξ ЈЕ ТЕКУЋА КООРДИНАТА

– ШТАП ЈЕ ХОРИЗОНТАЛАН ($y=0$) ПА НЕ ПОСМАТРАМО КООРДИНАТУ y НЕГО v ЈЕР НАМ ИОНАКО ТРЕБА ПОМЕРАЊЕ.

УОЧИМО ПРЕСЕК C:

$$M_c = M_i + V_i(x-x_i) - H_i(v-v_i) \underbrace{- \int_i^c p_y(x-\xi)d\xi + \int_i^c p_x(v-v_\xi)d\xi}_{\text{ОВО СМО РАНИЈЕ ЗАНЕМАРИВАЛИ ЈЕР ЈЕ БИЛО ВМV У ОДНОСУ НА ОСТАЛЕ ЧЛАНОВЕ ЈЕР СМО РАДИЛИ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО МАЛОМ ЕЛЕМЕНТУ}}$$

$\psi_{(x)} \; \alpha_t \frac{\Delta t}{h} = F(x)$

● $J(x) = J_c \psi(x)$, $\psi(x) = \psi$ Ф-ЈА ПРОМЕНЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИЈЕ ДУЖ ОСЕ ШТАПА

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EJ} - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \rightarrow 0 \quad \text{ТЕМПЕРАТУРУ ЗАНЕМАРУЈЕМО} \longrightarrow \quad M = -EJ\frac{d\varphi}{dx} = -EJ\frac{d^2v}{dx^2} = -EJv''$$

$$EJ_c\psi v'' = -M_i - V_i(x-x_i) + H_i(v-v_i) + \int_i^c p_y(x-\xi)d\xi - \int_i^c p_x(v-v_\xi)d\xi \quad / : EJ_c$$

$$\boxed{\psi v'' - \frac{H_i}{EJ_c}(v-v_i) + \frac{1}{EJ_c}\int_i^c p_x(v-v_\xi)d\xi = \frac{1}{EJ_c}\left[-M_i - V_i(x-x_i) + \int_i^c p_y(x-\xi)d\xi\right]}$$

Н-Д. Ј-НА ШТАПА ПО Ⓣ II РЕДА

– **САД НАМ СЕ КАО НЕПОЗНАТА ЈАВЉА УГИБ v**

– ОВО ЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА АЛИ ИСТОВРЕМЕНО И ИНТЕГРАЦИОНА Ј-НА (ЈАВЉА НАМ СЕ НЕПОЗНАТА ПОД ИНТЕГРАЛОМ) ПА ЈЕ ЗОВЕМО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОМ Ј-НОМ.

ОВУ Ј-НУ РЕШАВАМО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦНИМ ПОСТУПКОМ КОЈИМ ЋЕМО УМЕСТО ОВЕ ЈЕДНЕ ДОБИТИ СИСТЕМ АЛГЕБАРСКИХ Ј-НА. **ТАЈ ПОСТУПАК СЕ САСТОЈИ У ТОМЕ ШТО СЕ ИНТЕГРАЛНЕ, ОДНОСНО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ВЕЛИЧИНЕ ЗАМЕНЕ АЛГЕБАРСКИМ ИЗРАЗИМА.**

● ОВАЈ НУМЕРИЧКИ ПОСТУПАК СЕ САСТОЈИ У ТОМЕ ШТО ШТАП ДЕЛИМО НА n ДЕЛОВА. РАСПОДЕЉЕНО ОПТ. p_x И p_y ЗАМЕЊУЈЕМО КОНЦ. СИЛАМА W И P КОЈЕ ДЕЛУЈУ У УНАПРЕД ИЗАБРАНИМ ТАЧКАМА (ПОДЕЛОМ).

$$P_0 = \frac{\lambda}{6}(2p_{x,0} + p_{x,1}) \qquad W_0 = \frac{\lambda}{6}(2p_{y,0} + p_{y,1})$$

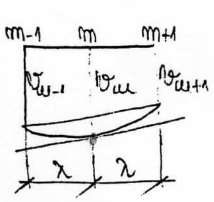
$$P_\ell = \frac{\lambda}{6}(p_{x,\ell-1} + 4p_{x,\ell} + p_{x,\ell+1}) \qquad W_\ell = \frac{\lambda}{6}(p_{y,\ell-1} + 4p_{y,\ell} + p_{y,\ell+1})$$

$$P_n = \frac{\lambda}{6}(p_{x,n-1} + 2p_{x,n}) \qquad W_n = \frac{\lambda}{6}(p_{y,n-1} + 2p_{y,n})$$

ИНТЕГРАЛЕ ЗАМЕЊУЈЕМО СУМАМА, А ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕ ЗАМЕЊУЈЕМО КОНАЧНИМ ВРЕДНОСТИМА Т.Ј. КОНАЧНИМ РАЗЛИКАМА; ТАКО СИСТЕМ ДИФ. Ј-НА ПРЕЛАЗИ У СИСТЕМ АЛГЕБАРСКИХ

$$P_\ell = \frac{\lambda}{6}(p_{x,\ell-1} + 4p_{x,\ell} + p_{x,\ell+1}) \rightarrow \int_i^c p_x(v-v_\xi)d\xi = \sum_{\ell=0}^{m-1} P_\ell(v_m - v_\ell)$$

$$W_\ell = \frac{\lambda}{6}(p_{y,\ell-1} + 4p_{y,\ell} + p_{y,\ell+1}) \rightarrow \int_i^c p_y(x-\xi)d\xi = \sum_{\ell=0}^{m-1} W_\ell(x_m - x_\ell)$$



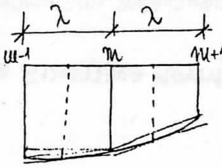
– НЕКА НАМ ЈЕ ДАТА Ф-ЈА УГИБА v, У ФИЗИЧКОМ СМИСЛУ I ИЗВОД Ф-ЈЕ ПРЕДСТАВЉА НАГИБ ТАНГЕНТЕ НА ГРАФИК Ф-ЈЕ.

– НАГИБ tg МОЖЕМО ПРИБЛИЖНО ДА ОДРЕДИМО АКО ПОСМАТРАМО ДУЖ $\overline{v_{m-1}v_{m+1}}$

– ЗА ДОВОЉНО МАЛО λ, НУМЕРИЧКА ВРЕДНОСТ I. ИЗВОДА У ТАЧКИ m ЈЕ: $\boxed{(v_m)' \cong \frac{v_{m-1} - v_{m+1}}{2\lambda}}$

вредност се назива и диференција због чега се ово и зове диференцни поступак

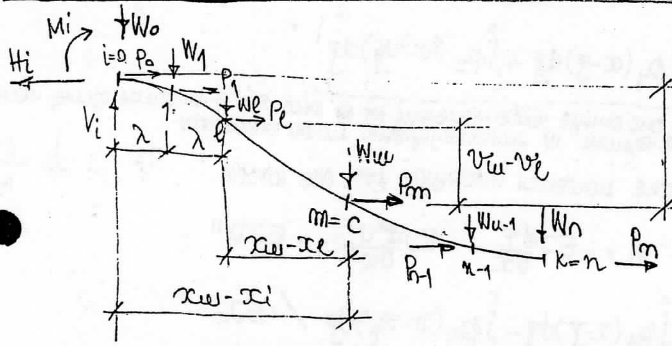
Сада II извод можемо да посматрамо као I извод првог извода:



$$\boxed{(v_m)'' = \frac{\frac{v_{m-1}-v_m}{\lambda} - \frac{v_m-v_{m+1}}{\lambda}}{\lambda} = \frac{v_{m-1}-2v_m+v_{m+1}}{\lambda^2}}$$

На овај начин смо изводе показали као разлике, тј. количнике неких ф-ја, али смо то условили малим λ.

$$(*)\quad \boxed{\Psi_m \frac{v_{m-1}-2v_m+v_{m+1}}{\lambda^2} - \frac{H_i}{EJ_c}(v_m-v_i) + \frac{1}{EJ_c}\sum_{l=0}^{m-1} P_l (v_m-v_l) = \frac{1}{EJ_c}\left[-M_i - V_i(x_m-x_i) + \sum_{l=0}^{m-1} W_l (x_m-x_l)\right]}$$



$m=0,1,\dots,n \to$ j-на (*) можемо да напишемо $(n+1)$ и (+) 4 гранична услова $\to$ $\Sigma\ n+5$ j-на

— Основне непознате:

вертикална померања у изабраним тачкама … $n+3$ $(v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$

2 статичке величине V_i, M_i … 2

$\Sigma\ n+5$ непознатих

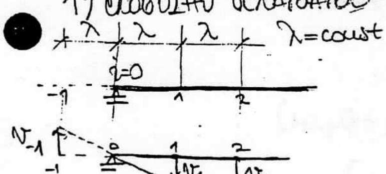
(*) При разматрању проблема стабилности, попречни оптерећење утицаји и температурни утицај ~~промене~~ $c_y=0$.

$P_y=0$ $W_l=0$

$\Delta t^o=0$ $F(x)=0$

Хомогени гранични услови $\left.\begin{matrix} M_i=0 \\ V_i=0 \\ W_l=0 \end{matrix}\right\}$ проблем стабилности

1°) слободно ослањање

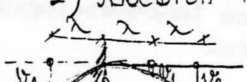


$v_0=0$

$M_0=0 \quad M_0=-EJv_0''=0 \Rightarrow v_0''=0$

$(v_0)'' = \frac{v_{-1}-2v_0+v_1}{\lambda^2}=0 \Rightarrow \boxed{v_{-1}=-v_1}$

2°) уклештен крај



$v_0=0$

$\varphi_0=0 \to (v_0)' = \frac{v_{-1}-v_1}{2\lambda}=0 \Rightarrow \boxed{v_{-1}=v_1}$

15 ЕНЕРГЕТСКА МЕТОДА. ПРИМЕНА НА ОДРЕЂИВАЊЕ КРИТИЧНЕ СИЛЕ ИЗВИЈАЊА ПРОСТЕ ГРЕДЕ

За разлику од методе линеарних алгебарских ј-на која се може применити само код система са коначним бројем степени слободе, енергетска метода је општег карактера, **примењује се и код система са коначним и код система са ∞ бројем степени слободе.**

Базира се на ставу да су **рад унутрашњих и рад спољашњих сила једнаки ако се систем налази у равнотежи.**

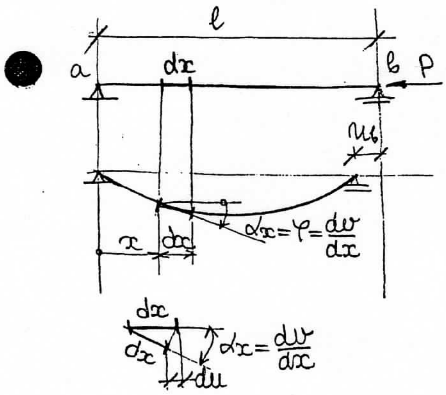
1° претпостави се облик извијања носача

2° одређујемо рад спољашњих A_s и рад унутрашњих сила A_u на деформисаном носачу

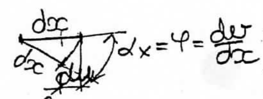
$$\boxed{A_s + A_u = 0}$$

3° из претходног изразимо $\boxed{\text{опт. у ф-ји померања } P = f(y_1, y_2, \dots)}$ и тражимо min опт. за претпостављени облик извијања $\frac{\partial P}{\partial y_i} = 0$

*** ПРИМЕР ПРОСТЕ ГРЕДЕ *** важно је како претпоставимо облик извијања



рад спољашњих сила: $\boxed{A_s = P \times u_b}$



$$du = dx - dx\cos\alpha_x = dx(1-\cos\alpha_x)$$

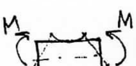
у питању су мала померања: $\cos\alpha_x \approx 1 - \frac{\alpha_x^2}{2!} + \dots$

$$du = dx\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\alpha_x^2}{2}\right) = dx\frac{\alpha_x^2}{2} = dx\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_b = \int_a^b du = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}$$ – укупно померање тачке b

$$\boxed{A_s = P \cdot u_b = \frac{P}{2}\int_0^l v'^2 dx}$$ – укупан рад спољашњих сила

рад унутрашњих сила:



рад N и T-сила можемо да занемаримо јер су знатно мањи од рада M

рад је = површини испод дијаграма

$$A_u = \frac{1}{2}\int_0^l M\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0 M v'' dx$$

$$M = -EJ\frac{d\varphi}{dx} = -EJ\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_u = -\frac{1}{2}\int_0^l EJ v''^2 dx}$$

$$A_s + A_u = 0 \Rightarrow A_s = -A_u \Rightarrow \frac{P}{\cancel{2}}\int_0^l v'^2 dx = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^l EJ v''^2 dx \Rightarrow \boxed{P_{kr} = \frac{EJ\int_0^l v''^2 dx}{\int_0^l v'^2 dx}}$$ критична сила

a) ако претпоставимо **$v(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$**

$$v'(x) = \frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l} \qquad v''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$P_{cr} = \frac{EJ\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{l}dx} = \dots \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}}$$

добили смо тачно р-ње јер смо претпоставили тачан облик извијања

Проблем се јавља код љуски, плоча и сл. где се јављају моменти у 2 правца па не знамо тачно систем извијања. Наша решења су трансцедентне ф-је (б) ПРЕТПОСТАВИМО ДА ЈЕ Ф-ЈА ПОМЕРАЊА $v(x)$ Ф-ЈА КВАДРАТНЕ ПАРАБОЛЕ

$v(x) = ax(l-x)$

$\left.\begin{array}{l} v'(x) = \ldots \\ v''(x) = \ldots \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{12EJ}{l^2}}$

ДОБИЛИ СМО 20% ВЕЋУ КРИТИЧНУ СИЛУ
ИСПАДА ДА НОСАЧ МОЖЕ ДА НОСИ 20% ВЕЋЕ ОПТ.
НЕГО ШТО СТВАРНО МОЖЕ.

ОВО ЈЕ БИТНО ДА БИСМО ДОШЛИ ДА ИЗВЕДЕМО МАТРИЦУ КРУТОСТИ.

ТАЧНО РЕШЕЊЕ ЈЕ УВЕК НЕКА СИНУСНА Ф-ЈА.

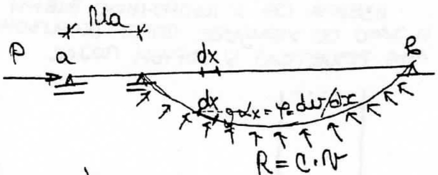
МНОГО ЈЕ ЛАКШЕ ИЋИ ПРЕКО АЛГЕБАРСКИХ Ј-НА.

ТРАНСЦЕДЕНТНЕ Ф-ЈЕ НЕ МОЖЕМО ЛАКО ДА РЕШАВАМО НА РАЧУНАРУ ДОК АЛГЕБАРСКЕ МОЖЕМО.

16. СТАБИЛНОСТ ШТАПА НА ЛИНЕАРНО ЕЛАСТИЧНОЈ ПОДЛОЗИ

Претпоставимо да је испод греде еластична подлога (нпр. тло) тако да до извијања долази нешто касније.

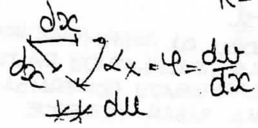
Разматрамо проблем стабилности просте греде која је целом дужином ослоњена на линеарно еластичну подлогу.



$R = Cv$ – реакција подлоге је пропорционална померању v

C – крутост подлоге

– коеф. крут. подл. C бројно је једнак реакцији подлоге по јединици дужине штапа која се појави при јединичном померању подлоге управно на недеформисану осу штапа.



– при равнотежном стању збир радова унутрашњих и спољашњих сила је једнак нули:

$$\boxed{A_s + A_u = 0}$$

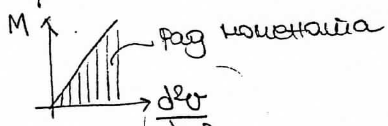
$$du = dx - dx\cos\alpha_x = dx(1-\cos\alpha_x)$$

Реч је о малим угловима

$$\cos\alpha_x \cong 1 - \frac{\alpha_x^2}{2!} + \dots$$

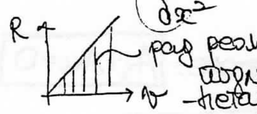
$$du = dx\left(1 - 1 + \frac{\alpha_x^2}{2}\right) = dx\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \frac{1}{2}$$

$$\boxed{A_s = P u_a = \frac{P}{2}\int_0^l v'^2 dx}$$



$$A_u^M = \frac{1}{2}\int_0^l M \frac{d^2v}{dx^2} dx = -\frac{EJ}{2}\int_0^l v''^2 dx$$

$$M = -EJ\frac{d\varphi}{dx} = -EJ\frac{d^2v}{dx^2}$$



$$A_u^R = -\frac{1}{2}\int_0^l R v\, dx = -\frac{C}{2}\int_0^l v^2 dx$$

$$\boxed{A_u = -\frac{1}{2}\left\{EJ\int_0^l v''^2 dx + C\int_0^l v^2 dx\right\}}$$

$$A_s + A_u = 0 \Rightarrow A_s = -A_u$$

$$\frac{P}{\cancel{2}}\int_0^l v'^2 dx = \frac{1}{\cancel{2}}\left\{EJ\int_0^l v''^2 dx + C\int_0^l v^2 dx\right\}$$

$$\boxed{P_{kr} = \frac{EJ\int_0^l v''^2 dx + C\int_0^l v^2 dx}{\int_0^l v'^2 dx}}$$

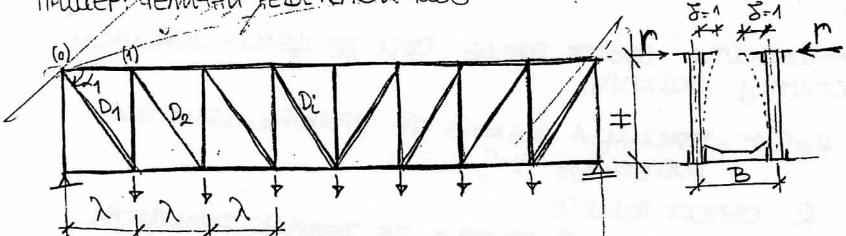
Постојање линеарно-ел. подлоге повећава вредност P_{kr}, да ње нема $\rightarrow C\int_0^l v^2 dx = 0$

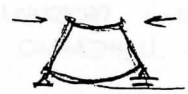
Реактивне силе $R = Cv$ и M расту од 0 до своје пуне вредности, па је зато њихов рад на одговарајућем померању = половини производа силе и померања.

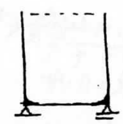
За одређивање P_{kr} потребно је знати колики је број полуталаса који зависи од коефицијената крутости подлоге C. Тражимо вредност C при којој $\exists$ једнаке могућности за извијање са 1 и 2 полуталаса, 2 и 3, ...

(17) СТАБИЛНОСТ ПРИТИСНУТОГ ПОЈАСА РЕШЕТКАСТОГ НОСАЧА

ПРИМЕР: ЧЕЛИЧНИ РЕШЕТКАСТИ МОСТ



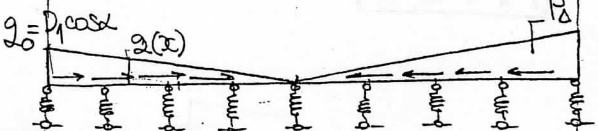




ПОЛУРАМОВИ ОД ПОПРЕЧНИХ НОСАЧА И ВЕРТИКАЛА ПРИДРЖАВАЈУ ПРИТИСНУТИ ПОЈАС И СПРЕЧАВАЈУ ПОМЕРАЊА УПРАВНА НА РАВАН РЕШЕТКЕ

- ГОРЊИ ПОЈАС ЈЕ ПРИТИСНУТ, N_{max} НА СРЕДИНИ, N_{min} НАД ОСЛОНЦИМА
- ГОРЊИ ПОЈАС МОЖЕ ДА СЕ ИЗВИЈЕ ВАН РАВНИ РЕШЕТКЕ, ПА ЋЕМО ГА ПОСМАТРАТИ КАО ШТАП ОПТ. РАСПОДЕЉЕНИМ АКСИЈАЛНИМ ОПТЕРЕЋЕЊЕМ.

$q_0 = P_1 \cos\alpha$



РЕАКЦИЈЕ ПОЛУРАМОВА ЗАМЕЊУЈЕМО РАСПОДЕЉЕНИМ РЕАКЦИЈАМА ЕЛАСТИЧНЕ ПОДЛОГЕ СА КОЕФИЦИЈЕНТОМ КРУТОСТИ $C = r/\lambda$.

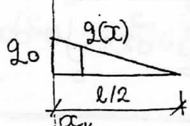
r – ХОРИЗОНТАЛНА СИЛА КОЈА ОСТВАРИ ЈЕДИНИЧНО ПОМЕРАЊЕ ПОЛУРАМА У ВИСИНИ ГОРЊЕГ ПОЈАСА РЕШЕТКЕ

ЕЛАСТИЧНИ ОСЛОНЦИ ПРЕДСТАВЉАЈУ КРУТОСТ НА ХОРИЗОНТАЛНА РАЗМИЦАЊА (ПРИМИЦАЊА).

$$\boxed{q_0 = P_1 \cos\alpha}$$

$$\boxed{P_s = \frac{q_0 l}{4} = \sum_{i=1}^{4} D_i \cos\alpha_i}$$ – ЗБИР СВИХ ХОРИЗ. СИЛА НА ПОЛОВИНИ НОСАЧА

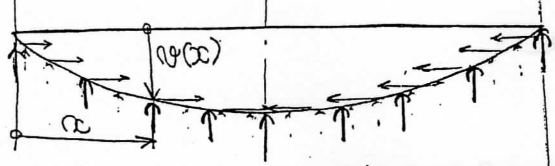
$(q_0) : (l/2) = (q(x)) : (\frac{l}{2} - x) \Rightarrow q(x) = \frac{q_0}{l/2} \cdot (\frac{l}{2} - x) \Rightarrow$



$\Rightarrow q(x) = \frac{q_0 \cdot 2}{l} \times \left(\frac{l}{2} - x\right)$

$$\boxed{q(x) = q_0 \frac{l-2x}{l}}$$

- ПРЕТПОСТАВЉАМО СИСТЕМ ИЗВИЈАЊА У ХОРИЗОНТАЛНОЈ РАВНИ



ПРИМЕНА ЕНЕРГЕТСКЕ МЕТОДЕ: $\boxed{A_s + A_u = 0}$

$$\boxed{A_u = -\frac{EJ}{2}\int_0^l v''^2 dx - \frac{C}{2}\int_0^l v^2 dx}$$

A_u = РАДУ МОМЕНАТА САВИЈАЊА ПРИ ОБРТАЊУ ПРЕСЕКА + РАД РЕАКЦИЈА ОСЛОНАЦА НА ОДГОВАРАЈУЋИМ ПОМЕРАЊИМА

A_s = РАДУ АКСИЈАЛНОГ ТРОУГАОНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА НА ХОРИЗОНТАЛНОМ ПРАВЦУ

$$A_s = \frac{1}{2}\int_0^l q_x dx \int_0^{x} (v')^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ q_0 \frac{l-2x}{l} \int_0^x (v')^2 dx \right\} dx$$

(одговарајуће хоризонтално померање)

$$A_s = -A_u \Rightarrow \boxed{q_{0,crit} = \frac{EJ\int_0^l (v'')^2 dx + C\int_0^l v^2 dx}{\int_0^l \left\{ \frac{l-2x}{l} \int_0^x (v')^2 dx \right\} dx}} \Rightarrow \boxed{N_{crit} = \frac{q_{0,crit}\, l}{4}}$$

ТИМОШЕНКО ЈЕ ПРЕТПОСТАВИО УГИБЕ У ВИДУ ОД ТРИГОНОМЕТРИЈСКОГ РЕДА И ДАО ТАБЛИЦУ:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} \Rightarrow N_{crit} = \frac{EJ\pi^2}{(\mu l)^2}$$

крутост

$\frac{Cl^4}{16EJ}$	10	100	....
μ			

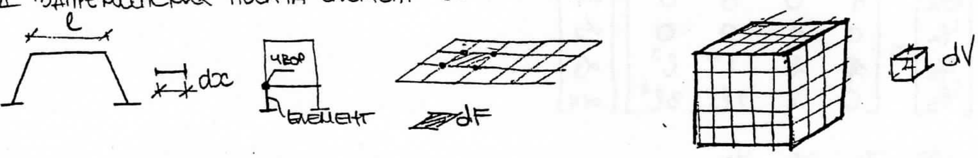
22. ПРИМЕНА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА. ИЗБОР НЕПОЗНАТИХ. ИЗБОР Ф-ЈА ПОМЕРАЊА. ПОСТУПАК ОДРЕЂИВАЊА ГЕОМЕТРИЈСКИХ МАТРИЦА КРУТОСТИ.

FEM (Finite Element Method) – елементи коначне дужине

МКЕ се више користи у статици к-ја и теорији површинских носача, али се њеном применом могу решити и проблеми стабилности и Т II реда.

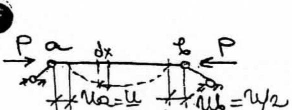
У суштини, ово је ПМД по Т II реда, односно тачна метода деф-ја по Т I реда.

Носач посматрамо као систем коначних елемената који су међусобно спојени чворовима. Код линијских носача, ти елементи су штапови, код површинских система елементи су плоче, а код запреминских носача елемент је елемент запремине.



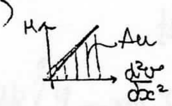
Chough, Turner и Martin су 1956. год. издали свој први научни рад на ову тему. Ово је најмоћнија рачунска метода у последњих 50 година и сви рачунарски програми данас се базирају на њој. Не постоје научни докази да се овом методом добијају тачна решења, али знамо да су та решења довољно тачна за практичну примену.

Применом ове методе можемо решити и проблеме стабилности:

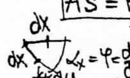


$$\boxed{A_s = P u = \frac{P}{2}\int_a^b v'^2 dx}$$

ЕНЕРГЕТСКА МЕТОДА (посматрано деформисан положај) : $A_s + A_u = 0$



$$\boxed{A_u = \frac{1}{2}\int_a^b M \frac{d^2v}{dx^2}dx = -\frac{EJ}{2}\int_a^b v''^2 dx}$$



$\alpha_x = \varphi = \frac{dv}{dx}$

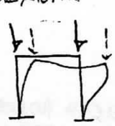
$u = \int_a^b du = \int_a^b dx \frac{\alpha_x^2}{2} = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$

$\cos\alpha_x \approx 1 - \frac{\alpha_x^2}{2!} + \dots$

$du = dx - dx\cos\alpha_x = dx(1-\cos\alpha_x) = dx\left(1 - 1 + \frac{\alpha_x^2}{2}\right) = dx\frac{\alpha_x^2}{2}$

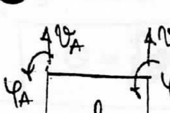
$$\boxed{\frac{P}{2}\int_a^b v'^2 dx - \frac{EJ}{2}\int_a^b v''^2 dx = 0}$$

МКЕ није унео ништа ново; он се базира на овој класичној ј-ни, само избегава њено решавање.



Извијање носача биће описано бочним померањем.

За основне непознате бирамо померање ⊥ на осу штапа и обртања на крајевима штапа, а истезање штапа нас не интересује јер је оно у реалним к-јама мало а овде нам само компликује прорачун.



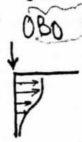
– користимо елемент дужине l и кад одредимо v_A, φ_A, v_B и φ_B знаћемо све што се дешава унутар штапа.

ОСНОВНЕ НЕПОЗНАТЕ: $v_A, \varphi_A, v_B, \varphi_B$ $\qquad \varphi_A = \left(\frac{dv}{dx}\right)_A \quad \varphi_B = \left(\frac{dv}{dx}\right)_B$

ВЕКТОР НЕПОЗНАТИХ $q = \begin{Bmatrix} v_A \\ \varphi_A \\ v_B \\ \varphi_B \end{Bmatrix}$

2881860

Сад треба одредити која је то ф-ја која описује ово померање. Chough, Turner и Martin су користили полиноме: $v(x) = 1\alpha_1 + x\alpha_2 + x^2\alpha_3 + x^3\alpha_4$ (кубна ф-ја)



– ми унапред знамо да ово неће бити полином, већ нека трансцедентна ф-ја. У Т I реда ово би било тачно решење, а у Т II реда тражимо неку трансцедентну ф-ју.

– ипак се усваја приближно р-ње преко полинома, јер је најлакше за програмирање.

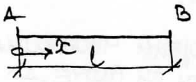
Ф-ЈЕ ОБЛИКА: $v(x) = \alpha_1 + x\alpha_2 + x^2\alpha_3 + x^3\alpha_4 = [S_1]\cdot\{\alpha\}$ – померања

$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = 0 + \alpha_2 + 2x\alpha_3 + 3x^2\alpha_4 = [S_2]\cdot\{\alpha\}$ – обртања

$\frac{d^2v}{dx^2} = 0 + 0 + 2\alpha_3 + 6x\alpha_4 = [S_3]\cdot\{\alpha\}$ – потребно због M

$$\{\alpha_1\} = \begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{Bmatrix}$$
ВЕКТОР α

$$\left.\begin{aligned}[S_1] &= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]\\ [S_2] &= [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2]\\ [S_3] &= [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x]\end{aligned}\right\}$$ МАТРИЦЕ РЕДОВЕ S_i



$$v_A = v(0) = 1\alpha_1 \qquad v_B = v(l) = \alpha_1 + l\alpha_2 + l^2\alpha_3 + l^3\alpha_4$$
$$\varphi_A = v'(0) = 1\alpha_2 \qquad \varphi_B = \alpha_2 + 2l\alpha_3 + 3l^2\alpha_4$$

МАТРИЧНО:

$$q = A \times \alpha \qquad \begin{bmatrix} v_A\\ \varphi_A\\ v_B\\ \varphi_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & l & l^2 & l^3\\ 0 & 1 & 2l & 3l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times q = \alpha$$

$$A^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_A & \varphi_A & v_B & \varphi_B \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l}\\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$v(x) = [S_1] \times \{\alpha\} = [S_1] \times [A]^{-1} \times \{q\}$$
$$\varphi(x) = [S_2] \times \{\alpha\} = [S_2] \times [A]^{-1} \times \{q\}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = [S_3] \times \{\alpha\} = [S_3] \times [A]^{-1} \times \{q\}$$

Ј-НА ПО ЕНЕРГЕТСКОЈ МЕТОДИ: $\int_A^B \frac{d^2v}{dx^2} EJ \frac{d^2v}{dx^2}\,dx - P\int_A^B \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = 0$

ВРШИ СЕ ТРАНСФОРМАЦИЈА + МАТРИЦЕ РАДИ МНОЖЕЊА

МАТРИЧНО: $\int_A^B \left([S_3][A]^{-1}\{q\}\right)^T EJ\,[S_3][A]^{-1}\{q\}\,dx - P\int_A^B \left([S_2][A]^{-1}\{q\}\right)^T \times [S_2][A]^{-1}\{q\}\,dx = 0$

$(AB)^T = B^T A^T \Rightarrow \int_A^B \{q\}^T [A]^{-1T}[S_3]^T EJ [S_3][A]^{-1}\{q\}\,dx - P\int_A^B \{q\}^T [A]^{-1T}[S_2]^T[S_2][A]^{-1}\{q\}\,dx = 0$

$$\{q\}^T \times \Big[\underbrace{\int_A^B [A]^{-1T}[S_3]^T EJ [S_3][A]^{-1}\,dx}_{[K]} - P\underbrace{\int_a^b [A]^{T-1}[S_2]^T[S_2][A]^{-1}\,dx}_{[K_g]}\Big]\{q\} = 0$$

$[K]$ – МАТРИЦА КРУТОСТИ (ПО Т I Р)

$[K_g]$ – ГЕОМЕТРИЈСКА МАТРИЦА КРУТОСТИ (ПО Т II РЕДА) – ОДНОСИ СЕ НА ДЕФОРМИСАН ПОЛОЖАЈ ШТО ПОДРАЗУМЕВА ДА ЈЕ ГЕОМЕТРИЈА ИЗМЕЊЕНА

ПРОБЛЕМ СТАБИЛНОСТИ ДЕФИНИСАНО НА СЛЕДЕЋИ НАЧИН: $\{[K] - P[K_G]\}\{q\} = 0$

А ПРОБЛЕМ Т II РЕДА: $\{[K] - P[K_G]\}\{q\} = \{Q\}$
(ПОРЕД АКСИЈАЛНОГ Ј И ПОПРЕЧНО ОПТ)

$$[K] = \int_A^B [A]^{-1T}[S_3]^T EJ [S_3][A^{-1}]\,dx \qquad K = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l\\ & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ & & 12 & -6l\\ \text{СИМЕТ.} & & & 4l^2\end{bmatrix}$$

попречно опт.

– иста је као у Т I реда само је овде добијена енергетским поступком

$$[K_g] = \int_A^B [A]^{-1T}[S_2]^T[S_2][A]^{-1}\,dx \qquad K_G = \frac{1}{10l}\begin{bmatrix} 12 & l & -12 & l\\ & 4l^2/3 & -l & -l^2/3\\ & & 12 & -l\\ \text{СИМЕТ.} & & & 4l^2/3\end{bmatrix}$$