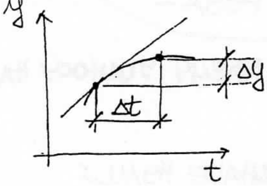
③ НУМЕРИЧКЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ СА 1. СТЕПЕНОМ СЛОБОДЕ.

МЕТОДА КОНАЧНИХ РАЗЛИКА

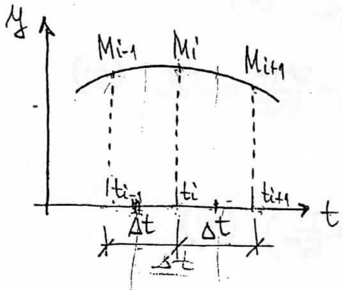


I извод ф-је $y=f(t)$ у односу на независну променљиву величину t одређује се количником прираштаја ф-је y и прираштаја независне променљиве t, уз услов да прираштај независно променљиве t тежи нули:

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

– врши се апроксимација нагиба $\frac{dy}{dt}$ нагибом $\frac{\Delta y}{\Delta t}$

– са порастом прираштаја Δt расте и грешка апроксимације количника $\frac{dy}{dt}$ количником $\frac{\Delta y}{\Delta t}$



– први извод ф-је → нагиб криве у тачки M_i: брзина

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_i=\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta t} \qquad (1)$$

– убрзање = II извод ф-је:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_i=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i+\frac{\Delta t}{2}}-\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_i=\frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}-\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{(\Delta t)^2} \qquad (2)$$

Ако се први и други извод убаце у д.ј-не кретања у низу тачака, тада ће се добити систем алгебарских ј-на по непознатим разликама померања у низу узастопних положаја масе у току времена. Ове разлике померања познате су као коначне разлике или коначне диференције, зато што се јављају у току коначних прираштаја времена.

Д.Ј. ПРИГУШЕНИХ ПРИНУДНИХ ОСЦИЛАЦИЈА: $\boxed{m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F(t)}$ (3)

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}\to(3):\ \boxed{m\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{(\Delta t)^2}+c\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta t}+ky_i=F_i} \qquad i=1,2,\dots,n \text{ тачака}$$

систем диференцних ј-на

– Ове ј-не се могу написати тако да се може одређивати померање y_{i+1} у тренутку t_{i+1} у зависности од већ одређених померања y_i и y_{i-1} у тренуцима t_i и t_{i-1}:

$$\frac{m}{(\Delta t)^2}y_{i+1}-\frac{2m}{(\Delta t)^2}y_i+y_{i-1}\frac{m}{(\Delta t)^2}+\frac{c}{2\Delta t}y_{i+1}-\frac{c}{2\Delta t}y_{i-1}+ky_i=F_i \Rightarrow \boxed{Ay_{i+1}-By_i-Cy_{i-1}=F_i}$$

$$y_{i+1}=\frac{1}{\frac{m}{(\Delta t)^2}+\frac{c}{2\Delta t}}\left[\left(\frac{2m}{(\Delta t)^2}-k\right)y_i+\left(\frac{c}{2\Delta t}-\frac{m}{(\Delta t)^2}\right)y_{i-1}+F_i\right]$$

– Овакав поступак одређивања померања у следећем тренутку времена, кад су познате 2 вредности предходних померања назива се интеграција корак по корак.

$$A_i=\frac{m}{(\Delta t)^2}+\frac{c}{2\Delta t} \qquad B_i=\frac{2m}{(\Delta t)^2}-k \qquad C_i=\frac{c}{2\Delta t}-\frac{m}{(\Delta t)^2}$$

– проблем y_1 се решава из $\dot{y}_0=\frac{y_1-y_{-1}}{2\Delta t}$ $\qquad y_{-1}=y_1-\dot{y}_0 2\Delta t$

$Ay_{i+1}-By_i-Cy_{i-1}=F_i$

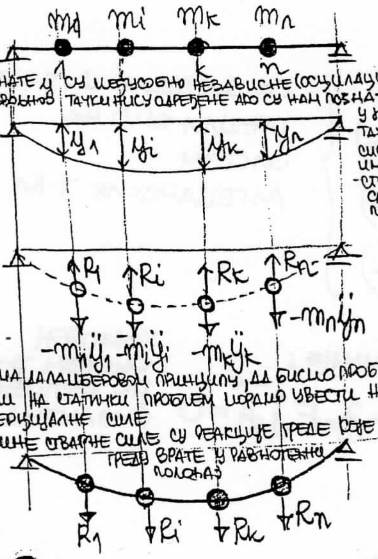
$i=0$: $Ay_1-By_0-C(y_1-\dot{y}_0 2\Delta t)=F_0 \Rightarrow \boxed{y_1=\frac{1}{A-C}\left(By_0+C\dot{y}_0 2\Delta t+F_0\right)}$

Решење је стабилно за $\Delta t<2\sqrt{\frac{m}{k}}$

Довољна тачност $\Delta t=\frac{2\pi}{20}\sqrt{\frac{m}{k}}$

8) ИЗВЕСТИ Ј-НЕ КРЕТАЊА ЗА СИСТЕМ СА ВИШЕ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ ЗА СЛУЧАЈ СЛОБОДНИХ НЕПРИГУШЕНИХ ОСЦИЛАЦИЈА КОРИШЋЕЊЕМ МАТРИЦА ФЛЕКСИБИЛНОСТИ

- ДА СМО МАСУ ПОСТАВИЛИ ИЗНАД ОСЛОНЦА, НЕ БИСМО ДОБИЛИ ИНЕРЦИЈАЛНЕ СИЛЕ ЈЕР ЈЕ ОСЛОНАЦ НЕПОМЕРЉИВ ПА НА ТОМ МЕСТУ НЕМАМО УБРЗАЊЕ.



- ОРДИНАТЕ y СУ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНЕ (ОСЦИЛАЦИЈЕ У ПРОИЗВОЉНОЈ ТАЧКИ НИСУ ОДРЕЂЕНЕ АКО СУ НАМ ПОЗНАТЕ ОСЦИЛ. У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ ЈЕР СИСТЕМ ИМА n СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ ПОМЕРАЊА)
- ПРЕМА ДАЛАМБЕРОВОМ ПРИНЦИПУ, ДА БИСМО ПРОБЛЕМ ДИНАМИЧКЕ СВЕЛИ НА СТАТИЧКИ ПРОБЛЕМ МОРАМО УВЕСТИ НЕГАТИВНЕ ИНЕРЦИЈАЛНЕ СИЛЕ
- ЈЕДИНЕ СТВАРНЕ СИЛЕ СУ РЕАКЦИЈЕ ГРЕДЕ КОЈЕ ТЕЖЕ ДА ГРЕДУ ВРАТЕ У РАВНОТЕЖНИ ПОЛОЖАЈ

- ПОСМАТРАМО НОСАЧ ЗАНЕМАРЉИВЕ ТЕЖИНЕ СА n КОНЦЕНТРИСАНИХ МАСА. СИСТЕМ ИМА n СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ И ВРШИ СЛОБОДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ (КАД ЈЕ ~~ИЗВЕДЕН~~ ИЗ РАВНОТЕЖЕ).
- ПОТРЕБНО ЈЕ ОДРЕДИТИ СВЕ ОРДИНАТЕ $y_i(t), i=1,2,\dots,n$, КОЈИМА СУ ОДРЕЂЕНА КРЕТАЊА МАСА.
- НА СВАКУ МАСУ ДЕЛУЈЕ ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА $-m_i\ddot y_i$ И РЕСТИТУЦИОНА СИЛА R_i (ЈЕР МАСЕ СВОЈОМ КРУТОШЋУ ТЕЖЕ ДА СЕ ВРАТЕ У РАВНОТЕЖНИ ПОЛОЖАЈ)
- **УСЛОВИ ДИНАМИЧКЕ РАВНОТЕЖЕ:**

$$\left.\begin{aligned} R_1 + m_1\ddot y_1 &= 0\\ &\vdots\\ R_k + m_k\ddot y_k &= 0\\ &\vdots\\ R_n + m_n\ddot y_n &= 0\end{aligned}\right\}\quad \boxed{R_i + m_i\ddot y_i = 0},\ i=1,2,\dots,n \qquad (1)$$

$$R + M\ddot Y = 0 \longleftrightarrow Y+DM\ddot{Y}$$

АКО ЈЕ δ_{ik} ПОМЕРАЊЕ НА МЕСТУ i ПРИ СИЛИ $R_k=1{,}0$, ОНДА ЋЕ ПОМЕРАЊЕ НА МЕСТУ i УСЛЕД ДЕЛОВАЊА СВИХ РЕСТИТУЦИОНИХ СИЛА БИТИ ЈЕДНАКО:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}R_1 + \delta_{12}R_2 + \dots + \delta_{1n}R_n\\ y_2 &= \delta_{21}R_1 + \delta_{22}R_2 + \dots + \delta_{2n}R_n\\ &\vdots\\ y_n &= \delta_{n1}R_1 + \delta_{n2}R_2 + \dots + \delta_{nn}R_n\end{aligned}\right\}\quad \boxed{y_i = \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}R_k},\ i=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

$$Y = D\cdot R = DR =$$

$$(1) \rightarrow R_k = -m_k\ddot y_k \rightarrow (2) \rightarrow \boxed{y_i + \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}m_k\ddot y_k = 0}$$

СИСТЕМ ДИФ. Ј-НА КРЕТАЊА

- МАТРИЧНО

$$\boxed{Y + DM\ddot Y = 0}$$

- У РАЗВИЈЕНОМ ОБЛИКУ:

$$y_1 + \delta_{11}\ddot y_1 m_1 + m_2\delta_{12}\ddot y_2 + \dots + m_n\delta_{1n}\ddot y_n = 0$$
$$y_2 + m_1\delta_{21}\ddot y_1 + m_2\delta_{22}\ddot y_2 + \dots + m_n\delta_{2n}\ddot y_n = 0$$
$$\vdots$$
$$y_n + m_1\delta_{n1}\ddot y_1 + m_2\delta_{n2}\ddot y_2 + \dots + m_n\delta_{nn}\ddot y_n = 0$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\quad D = \begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & & \\ \delta_{21} & \delta_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}\end{bmatrix}\quad M = \begin{bmatrix} m_1 & & 0\\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & m_n\end{bmatrix}\quad \ddot Y = \begin{bmatrix}\ddot y_1\\ \ddot y_2\\ \vdots\\ \ddot y_n\end{bmatrix}$$

МАТР. ФЛЕКСИБИЛНОСТИ (ПОМЕРАЊА) МАТ. МАСА

МАТРИЧНО $R + DM\ddot Y = 0$

$Y = DR \rightarrow R = D^{-1}Y$

$D^{-1}Y + DM\ddot Y = 0 \Rightarrow \boxed{Y + DM\ddot Y = 0}$

ДА БИСМО РЕШИЛИ ПРОБЛЕМ СЛОБОДНИХ НЕПРИГУШЕНИХ ОСЦИЛАЦИЈА, **УВОДИМО ПП. ДА СВЕ МАСЕ ВРШЕ СИНХРОНЕ И СИНФАЗНЕ ХАРМОНИЈСКЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ. ТАКОЂЕ ФРЕКВЕНЦИЈЕ И ФАЗЕ СВИХ МАСА БИЋЕ ЈЕДНАКЕ. РАЗЛИКОВАЋЕ СЕ САМО ВЕЛИЧИНЕ АМПЛИТУДА, ДОК ЋЕ СВЕ МАСЕ ИСТОВРЕМЕНО ПРОЛАЗИТИ КРОЗ РАВНОТЕЖНИ ПОЛОЖАЈ.**

Р-ЊЕ ПП. У ОБЛИКУ: $y_i = A_i\sin(\omega t+\alpha)$ $\dot y_i = \omega A_i\cos(\omega t+\alpha)$ $\ddot y_i = -\omega^2 A_i\sin(\omega t+\alpha)$

$A = \begin{bmatrix} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_n\end{bmatrix}$ - ВЕКТОР АМПЛИТУДА

$$y_i + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} m_k \ddot{y}_k = 0 \Rightarrow A_i \sin(\omega t+\alpha) - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} m_k \omega^2 A_k \sin(\omega t+\alpha) = 0 \quad / : \sin(\omega t+\alpha)$$

$$\boxed{A_i - \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\omega^2 m_k A_k = 0}$$

У РАЗВИЈЕНОМ ОБЛИКУ:

$$(*)\begin{cases} A_1 - \omega^2 m_1 \delta_{11} A_1 - \omega^2 m_2 \delta_{12} A_2 - \dots - \omega^2 m_n \delta_{1n} A_n = 0 \quad / \times \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \\ A_2 - \omega^2 m_1 \delta_{21} A_1 - \omega^2 m_2 \delta_{22} A_2 - \dots - \omega^2 m_n \delta_{2n} A_n = 0 \quad / \times \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \\ \vdots \\ A_n - \omega^2 m_1 \delta_{n1} A_1 - \omega^2 m_2 \delta_{n2} A_2 - \dots - \omega^2 m_n \delta_{nn} A_n = 0 \quad / \times \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \end{cases}$$

СА СИСТЕМА Д. Ј-НА ПРЕШЛИ СМО НА СИСТЕМ АЛГЕБАРСКИХ Ј-НА

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \left(m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 + \dots + \delta_{1n} m_n A_n = 0 \\ m_1 \delta_{21} A_1 + \left(m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right) A_2 + \dots + m_n \delta_{2n} A_n = 0 \\ \vdots \\ m_1 \delta_{n1} A_1 + m_2 \delta_{n2} A_2 + \dots + \left(m_n \delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2}\right) A_n = 0 \end{cases}$$

МАТРИЧНО: $\left[D_M - \frac{1}{\omega^2} E\right] \vec{A} = 0$ → ХОМОГЕН СИСТЕМ Ј-НА ПО НЕПОЗНАТИМ АМПЛИТУДАМА

УСЛОВ ЗА НЕТРИВИЈАЛНО Р-ЊЕ: $\det\left|D_M - \frac{1}{\omega^2}E\right| = 0$

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2\delta_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_1\delta_{n1} & & \dots & m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

ОДАВДЕ ДОБИЈАМО Р-ЊА ПО ω_i ПРИ ЧЕМУ НАЈМАЊУ ВРЕДНОСТ ОБЕЛЕЖАВАМО СА ω_1 (ПО АПСОЛУТНОЈ ВРЕДНОСТИ) А НАЈВЕЋУ СА ω_n. (СВОЈСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ МАТРИЦЕ D_M)

СА РЕШЕЊИМА ω_i СЕ ВРАЋАМО У СИСТЕМ Ј-НА (*) И ДОБИЈАМО НЕПОЗНАТЕ АМПЛИТУДЕ (СВОЈСТВЕНИ ВЕКТОРИ МАТРИЦЕ D_M)

$$\omega_1 \to \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ \vdots \\ A_n^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \omega_2 \to \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ \vdots \\ A_n^{(2)} \end{bmatrix}, \dots, \quad \omega_n \to \begin{bmatrix} A_1^{(n)} \\ A_2^{(n)} \\ \vdots \\ A_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

ОВЕ АМПЛИТУДЕ СУ ОДРЕЂЕНЕ ДО НА КОНСТАНТУ, ОДНОСНО **ОДРЕЂЕН ЈЕ САМО ОДНОС ИЗМЕЂУ АМПЛИТУДА.** АМПЛИТУДЕ НЕМАЈУ ИЗРАЖЕНУ КВАНТИТАТИВНУ ВРЕДНОСТ.

НА ОВАЈ НАЧИН ДОБИЛИ СМО СПЕКТАР Р-ЊА, ТЈ. n Р-ЊА И ОВА Р-ЊА СЕ НАЗИВАЈУ ТОНОВИ ОСЦИЛОВАЊА.

СТВАРНО КРЕТАЊЕ СИСТЕМА КАДА ГА ПОБУДИМО ДА ОСЦИЛУЈЕ ЈЕ ЛИНЕАРНА КОМБ. КРЕТАЊА СИСТЕМА ПО ОСНОВНИМ ТОНОВИМА.

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j A_{1(j)} \sin(\omega_j t + \alpha_j)$$

$$y_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j A_{2(j)} \sin(\omega_j t + \alpha_j)$$

$$\vdots$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j A_{n(j)} \sin(\omega_j t + \alpha_j)$$

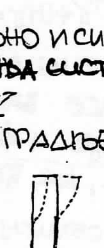
$\left.\begin{matrix} c_1, c_2, \dots, c_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{matrix}\right\}$ → УКУПНО $2n$ КОНСТАНТИ КОЈЕ ОДРЕЂУЈЕМО ИЗ ПОЧЕТНИХ УСЛОВА У ЗАВИСНОСТИ ОД ТОГА КАКО СМО ПОБУДИЛИ СИСТЕМ

$t=0: \begin{Bmatrix} y_1, y_2, \dots, y_n \\ \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n \end{Bmatrix}$ – ПОЧЕТНИ УСЛОВИ

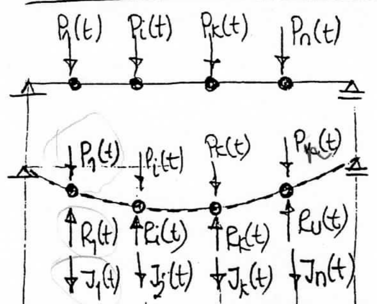
ПОШТО НЕМАМО ТАЧНО Р-ЊЕ, МИ ПП. ДА ЈЕ КРЕТАЊЕ СИНХРОНО И СИНФАЗНО, ДОБИЈЕМО n Р-ЊА И СТВАРНО Р-ЊЕ ДОБИЈАМО **КАО ЛИНЕАРНУ КОМБ. КРЕТАЊА СИСТЕМА ПРИ ОСНОВНИМ ТОНОВИМА.**

СТВАРНО Р-ЊЕ ЗА КРУТЕ СИСТЕМЕ (ОБЈЕКТИ ВИСОКОГРАДЊЕ – ЗГРАДЕ, БОЛНИЦЕ) БЛИСКО ЈЕ ПРВОМ ТОНУ ЗБОГ БРЗИХ ОСЦИЛАЦИЈА.

КОД ВИТКИХ, НЕКИХ ОБЈЕКАТА (ДИМЊАЦИ, ВОДОТОРЊЕВИ, ЗВОНИЦИ, ...) ЈАВЉАЈУ СЕ СПОРЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПА ЈЕ КОД ЊИХ БИТАН И 2. И 3. ТОН.



10 ИЗВЕСТИ Ј-НЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА СА ВИШЕ СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ ЗА СЛУЧАЈ ДА СУ ПРИНУДНЕ СИЛЕ ХАРМОНИЈСКИ СИНХРОНЕ И СИНФАЗНЕ Ф-ЈЕ:



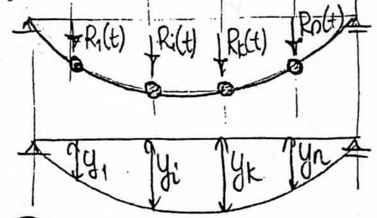
- ПОСМАТРАМО ГРЕДУ ЗАНЕМАРЉИВЕ ТЕЖИНЕ СА n КОНЦ. МАСА. ГРЕДА ВРШИ ПРИНУДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ПОД УТИЦАЈЕМ ХАРМОНИЈСКОГ ОПТЕРЕЋЕЊА:
- ИЗДВАЈАЊЕМ МАСА ИЗ НОСАЧА, МОЖЕ СЕ УТВРДИТИ ДА НА МАСЕ ДЕЛУЈУ: ~~НАСТУРБАЦИОНА~~

$P_i(t)$ - ПРИНУДНА ХАРМОНИЈСКА СИЛА (~~ПЕРТУРБАЦИОНА~~ СИЛА)

$R_i(t)$ - РЕСТИТУЦИОНА СИЛА (УТИЦАЈ ГРЕДЕ)

$J_i(t)$ - ИНЕРЦИЈАЛНЕ СИЛЕ (1) $J_i(t) = -m_i \ddot{y}_i, \; i=1,\dots,n$

- НА ГРЕДУ ДЕЛУЈУ ИСТЕ РЕСТИТУЦИОНЕ СИЛЕ, САМО СУПРОТНОГ СМЕРА



- У БИЛО КОМ ТРЕНУТКУ ВРЕМЕНА, ЗА СВАКУ МАСУ ВАЖИ **ДИНАМИЧКА Ј-НА РАВНОТЕЖЕ:**

$$(2) \quad R_i(t) = J_i(t) + P_i(t)$$

- ПОМЕРАЊЕ ТАЧКЕ i ИЗАЗВАНО ДЕЈСТВОМ СВИХ РЕСТИТУЦИОНИХ СИЛА:

$$(3) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k \delta_{ik}, \quad i=1,2,\dots,n$$

$\left\{ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \right\}$ - СИСТЕМ ОД $3n$ Ј-НЕ СА 3 НЕПОЗНАТЕ: $y_i, R_i(t), J_i(t)$

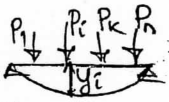
ПП. ПАРТИКУЛАРНО Р-ЊЕ ОБЛИКА: $y_i = C_i \sin pt, \; i=1,2,\dots,n$

$$\dot{y}_i = p \cdot C_i \cos pt \qquad \ddot{y}_i = -p^2 C_i \sin pt = -p^2 y_i \quad (4)$$

$$(4) \to (1): \; J_i(t) = m_i p^2 y_i \Rightarrow \boxed{y_i = \frac{J_i(t)}{m_i p^2}} \quad (5)$$

$$(5),(2) \to (3): \quad \frac{J_i(t)}{m_i p^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(J_k(t) + P_k(t)\right)\delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} P_k \delta_{ik} + \sum_{k=1}^{n} J_k \delta_{ik} \quad (6)$$

НЕКА ЈЕ $\sum_{k=1}^{n} P_k \delta_{ik} = \delta_{ip} \sin pt$, δ_{ip} - ПОМЕРАЊЕ НА МЕСТУ i УСЛЕД СВИХ СИЛА



$$(6) \to \quad \delta_{ip} \sin pt + \sum_{k=1}^{n} J_k \delta_{ik} - \frac{J_i}{m_i p^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} J_k \times \delta_{ik}^{*} + \delta_{ip} \sin pt = 0}$$

ГДЕ ЈЕ $\delta_{ik}^{*} = \delta_{ik}$ ЗА $i \neq k$

$\delta_{ii}^{*} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i p^2}, \; i=k$

У РАЗВИЈЕНОМ ОБЛИКУ:

$$\left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 p^2}\right) J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1n} J_n + \delta_{1p} \sin pt = 0$$
$$\delta_{21} J_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 p^2}\right) J_2 + \dots + \delta_{2n} J_n + \delta_{2p} \sin pt = 0$$
$$\vdots$$
$$\delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \dots + \left(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n p^2}\right) J_n + \delta_{np} \sin pt = 0$$

ИНТЕРЕСУЈУ НАС ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ СИЛЕ ($\sin pt = 1$ ИЛИ -1) ПА УВОЂЕЊЕМ ВРЕДНОСТИ $\sin pt$ ДОБИЈАМО ИНЕРЦИЈАЛНЕ СИЛЕ $J_1, J_2, \dots, J_n$

p - ФРЕКВЕНЦИЈА ПРОМЕНЉИВИХ СИЛА

- ПРИМЕНОМ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИЈЕ МОГУЋЕ ЈЕ ИЗРАЧУНАТИ БИЛО КОЈИ УТИЦАЈ У НОСАЧУ

$$Z(t) = Z_1 J_1(t) + Z_2 J_2(t) + \dots + Z_n J_n(t) + Z_p(t)$$

Z_i - УТИЦАЈ У НОСАЧУ УСЛЕД ЈЕДИНИЧНЕ ИНЕРЦИЈАЛНЕ СИЛЕ $J_i = 1$

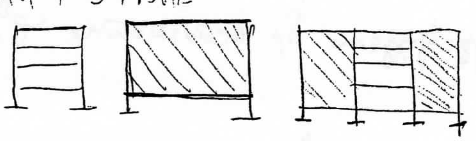
Z_p - СТАТИЧКИ УТИЦАЈ У НОСАЧУ УСЛЕД ДЕЈСТВА ЗАДАТОГ ДИНАМИЧКОГ ОПТЕРЕЋЕЊА.

ПЕРТУРБАЦИОНОГ

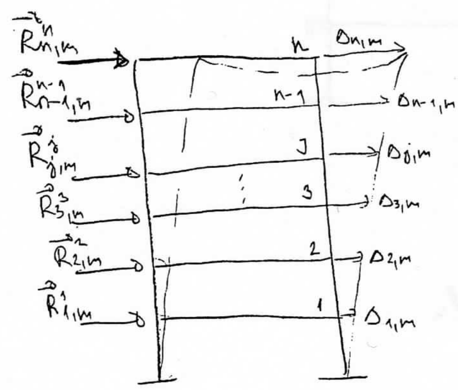
У ВИСОКОГРАДЊИ ПРИ АНАЛИЗИ НА ДЕЈСТВО ЗЕМЉОТРЕСА

Вертикални ел. у грађ. конст. могу се поделити у 3 групе

① линијски носачи (рамови)
② зидна платна
③ комбиноване к-је од рамова и зидних платна



- Матрица крутости успоставља везу изм. сила и померања која одговарају тим силама.
- При анализи на дејство земљотреса, занимају нас она померања где постоје сеизмичке с
- Масе вертикалних ел. концентришу се у нивоима таваница. Крутост ових ел. се одређује с обзиром на хоризонтална померања у нивоу таваница јер ће се ту јавити инерц. силе.



$$\boxed{\vec{R}_m = Z_m \cdot \Delta_m}$$

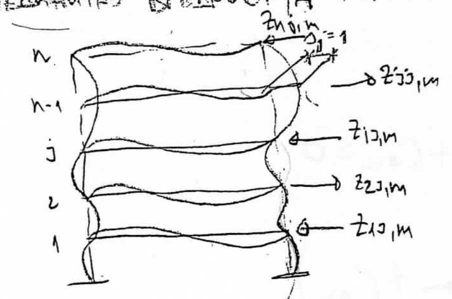
R_m – вектор хоризонталних сила у нивоима таваница
Z_m – матр. крутости (реакц.) верт. ел.
Δ_m – вектор хориз. пом. ел. у висини таванице

$$R_m = \begin{bmatrix} R_{1,m} \\ \vdots \\ R_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \Delta_m = \begin{bmatrix} \Delta_{1,m} \\ \Delta_{2,m} \\ \vdots \\ \Delta_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$Z_m = \begin{bmatrix} z_{11,m} & z_{12,m} & \cdots & z_{1j,m} & \cdots & z_{1n,m} \\ z_{21,m} & z_{22,m} & \cdots & z_{2j,m} & \cdots & z_{2n,m} \\ \vdots & & & & & \\ z_{j1,m} & z_{j2,m} & \cdots & z_{jj,m} & \cdots & z_{jn,m} \\ \vdots & & & & & \\ z_{n1,m} & z_{n2,m} & \cdots & z_{nj,m} & \cdots & z_{nn,m} \end{bmatrix}$$

j-та колона

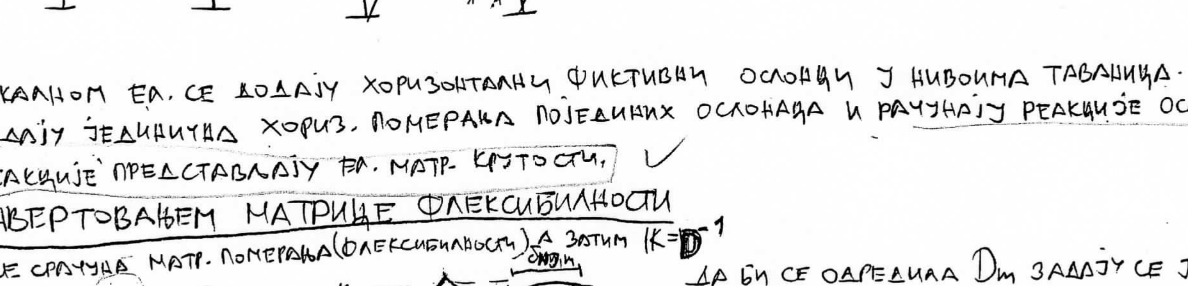
Елементи колоне J представљају хоризонталне силе које ~~морају~~ делују на вертикални ел. m у нивоима таваница тако да хоризонтално померање у нивоу таванице J има јединичну вредност, а хоризонтално померање у нивоима осталих таваница буде $= 0$.



ел. матрице се одређују из јединичног хориз. пом.

Овако дефинисана матрица крутости се рачуна на 3 начина:

1° На основу физичког значења елем. матрице крутости



Вертикалном ел. се додају хоризонтални фиктивни ослонци у нивоима таваница. Затим се задају јединична хориз. померања појединих ослонаца и рачунају реакције ослонаца. Те реакције представљају ел. матр. крутости.

2° Инвертовањем матрице флексибилности

Прво се срачуна матр. померања (флексибилности), а затим $K = D^{-1}$

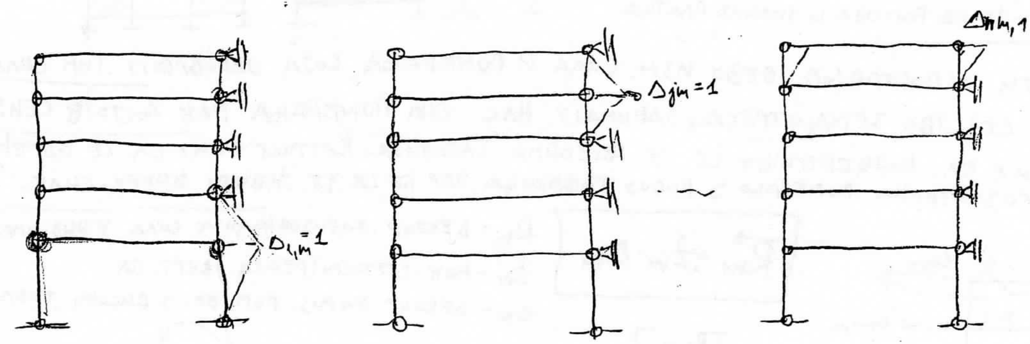
$$D_m = \begin{bmatrix} \delta_{11,m} & \cdots & \delta_{1j,m} & \cdots & \delta_{1n,m} \\ \vdots & & & & \\ \delta_{j1,m} & \cdots & \delta_{jj,m} & \cdots & \delta_{jn,m} \\ \vdots & & & & \\ \delta_{n1,m} & \cdots & \delta_{nj,m} & \cdots & \delta_{nn,m} \end{bmatrix}$$

Да би се одредила D_m задају се јединичне силе у нивоима појединих таваница и одређују се хоризонтална померања у нивоима таваница.

... хориз. пом. вертикалне ел. m у нивоима појединих

– За вертикалне ел. m напишемо јед. приближне методе деф.

– прво одређујемо бр. непознатих $\varphi, \Delta \rightarrow \Delta$ је хоризонтално померање на нивоу товарења



УВОДИМО ОСЛОНЦЕ ДА БИСМО ДОПУСТИЛИ УВЕК САМО ЈЕДАН ПАРАМЕТАР СЛОБОДЕ ПОМ.-РЕШ.

$$Z_m \Delta_m = \vec{R}_m$$

(1) $A_m \cdot \vec{\varphi}_m + B_m \cdot \vec{\Delta}_m + A_{0m} = 0 \qquad / \cdot A_m^{-1} \Rightarrow \varphi_m$

(2) $B_m' \vec{\varphi}_m + C_m \vec{\Delta}_m + C_{0m} = 0$

(1) $\varphi_m = -A_m^{-1} \cdot B_m \Delta_m - A_m^{-1} A_{0m}$

(2)⇒1 $-B_m' A_m^{-1} B_m \Delta_m - B_m' A_m^{-1} A_{0m} + C_m \Delta_m + C_{0m} = 0$

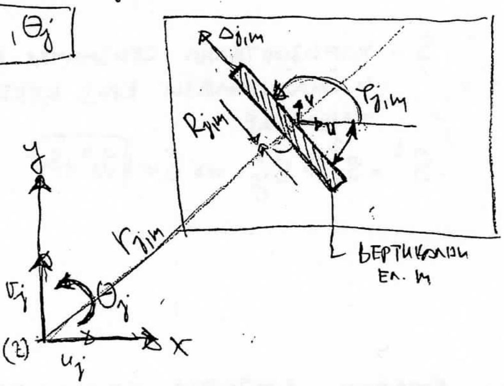
$$\underbrace{\left(C_m - B_m' A_m^{-1} B_m\right)}_{Z_m} \Delta_m = \underbrace{\left(B_m' A_m^{-1} A_{0m} + C_{0m}\right)}_{\vec{R}_m}$$

$$Z_m' \vec{\Delta}_m = \vec{R}_m$$

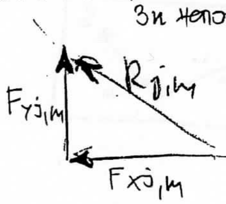
АНАЛИЗА

Условне јед. које дефинишу понашање просторне констр. под дејством статич. и динам. опт. изводе се под п.п. да су таванице ∞ круте у својој равни, тако да је померање сваке таванице j у хоризонталној равни дефинисано са 3 параметра

$\boxed{u_j, v_j, \theta_j}$



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix}$$ – вектор непознатих померања и обртање целе К-је 3n непознатих



померање верт. ел. $\Delta_{jim} = u_j \cdot \cos\varphi_{jim} + v_j \sin\varphi_{jim} + \theta_j \cdot r_{jim}$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1,m} \\ \vdots \\ \Delta_{n,m} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi_{1,m} & \sin\varphi_{1,m} & r_{1,m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & & \\ & & & & \cdots & & & \\ & & \cdots & & & \cos\varphi_{n,m} & \sin\varphi_{n,m} & r_{n,m} \end{bmatrix}}_{a_m \text{ матрица трансформације}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad \boxed{\Delta_m = a_m \cdot u}$$

Веза изм. верт. ел. и таванице се може приказати преко хоризонталног ослонца чији се правац ослањају равни таванице поклапа са правцем верт.

$$F_{j,m} = \begin{bmatrix} F_{xj,m} \\ F_{yj,m} \\ M_{oj,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{j,m} \\ \sin\varphi_{j,m} \\ r_{jim} \end{bmatrix} \cdot R_{jim}$$

$R_{j,m}$ – реакција овог ослонца

F_{jim} – компоненте ове реакције у x и y правцу

M_{ojim} – моменат реак. R_{jim} око коорд. поч.

$$F_m = \begin{bmatrix} F_{1,m} \\ F_{2,m} \\ \vdots \\ F_{o,m} \\ \vdots \\ F_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1,m} \\ F_{y1,m} \\ M_{o1,m} \\ \vdots \\ F_{xn,m} \\ F_{yn,m} \\ M_{on,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{1,m} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\varphi_{1,m} & & \vdots & & \\ r_{1m} & & \cos\varphi_{jim} & \cdots & 0 \\ 0 & & \sin\varphi_{jim} & \cdots & 0 \\ 0 & & r_{jim} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \cos\varphi_{n,m} \\ 0 & & 0 & & \sin\varphi_{n,m} \\ & & & & M_{on,m} \\ & & & & r_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1m} \\ \vdots \\ R_{jim} \\ \vdots \\ R_{nm} \end{bmatrix}$$

$F_m = a_m^T \times R_m$ $\quad R_m = Z_m \cdot \overset{a_m \cdot u}{\Delta_m}$ $\quad Z_m$ – матр. крутости верт. ел. m

$R_m = Z_m \cdot a_m \cdot u$

Ако опт. делује у нивоима таваница има хориз. правац

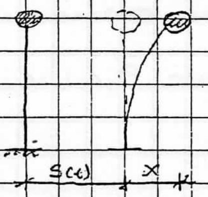
$$p^T = [X_1, Y_1, M_1 \ldots, X_n, Y_n, M_n]$$

услов равнотеже! $\sum F_m = P$ $\quad \sum a_m^T Z_m a_m u = P \Rightarrow K \times u = P$

$K = \sum_{m=1}^{n} a_m^T \cdot Z_m \cdot a_m$ – матр. крутости целе к-је.

13. Одређивање сеизмичких сила применом спектралне анализе

Метод спектралне анализе се најчешће користи при анализи грађевинских објеката, и биће објашњен на примеру са једним степеном слободе



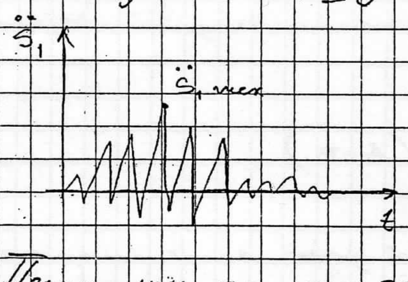
понашање овог

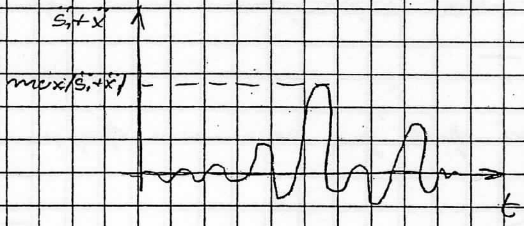
* Диференцијална јна којом је описано осцилаторно понашање овог система са једним степеном слободе при дејству земљотреса:

$$m\ddot{x} + c\cdot\dot{x} + k\cdot x = -m\cdot\ddot{s} \Rightarrow \underline{m\cdot(\ddot{s}+\ddot{x}) + c\cdot\dot{x} + k\cdot x = 0}$$

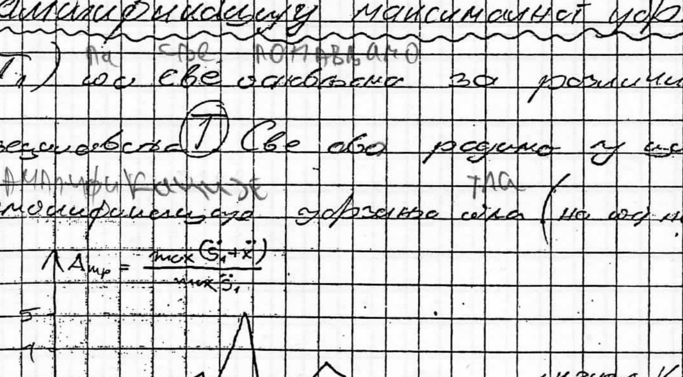
- Кружна фреквенција и период осциловања од датих израза:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\varepsilon^2}}$ $\quad \varepsilon = \frac{c}{2m}$, а пошто не знамо какав ће земљотрес задесити нашу конструкцију ми претпостављамо $\ddot{s}_1(t)$:





- Пошто нам за наш објекат треба максимална вредност инерцијалних сила, ми усвајамо максималну вредност убрзања $max(\ddot{x}+\ddot{s})$. На основном дијаграму максималне вредности макс. убрзања поделиму са вредношћу максималног убрзања тла и на тај начин добијамо **амплификацију максималног убрзања тла** (за период осциловања T_1) па све понављамо то све понављамо за различиту крутост, односно период осциловања (T). Све ово радимо у циљу добијања max вредности амплификације амплификације убрзања тла (на тај начин добијамо криву K_1)

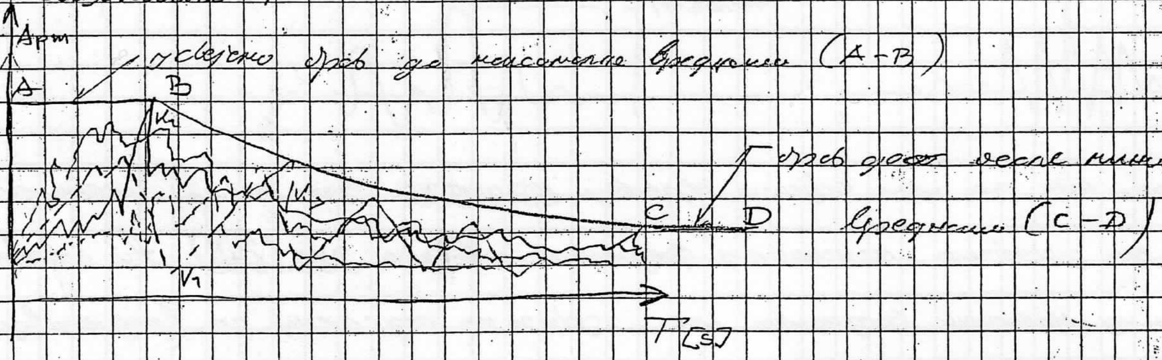


* Периоде осциловања објек. узимамо у интервалу од 1s–3s, јер су у том интервалу периоди осциловања већ. објеката

– Ова крива (K_1) представља уочљиву линију за амплификацију максималног убрзања тла услед промене пропусних система, и њу зовемо СПЕКТАР АМПЛИФИКАЦИЈЕ УБРЗАЊА ТЛА $\ddot{S}$.

– Овај поступак добијања криве (K_1), при претпостављеном земљотресу $\ddot{S}_1(t)$ треба поновити за неки други земљотрес $\ddot{S}_2(t)$ и на тај начин добијамо другу криву (K_2).

– Све ове криве се могу обухватити једном заједничком линијом обвојницом која представља линија вероватних максималних амплитуда убрзања система. Ову линију користимо за одређивање максималних сеизмичких сила чија динамичка карактеристика задата периодом осциловања T



12. Одређивање сеизмичких сила применом директне динамичке анализе

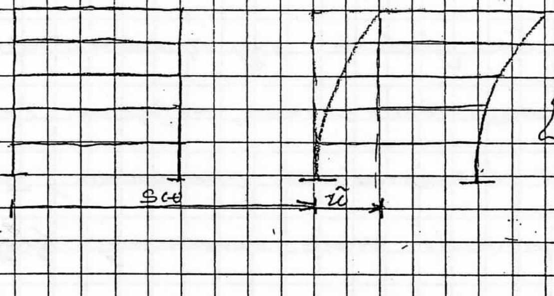
– При земљотресу, односно при динамичком померању ослонца, укупно померање се састоји од померања објекта као крутог тела и релативног померања $\tilde{u}$.

Укупне хоризонталне инерцијалне силе у овом случају су:

$$\tilde{J} = \tilde{J}_s + \tilde{J}_{\tilde{u}}$$

$\tilde{J}_s$ – инерц. силе услед померања објекта као крутог тела

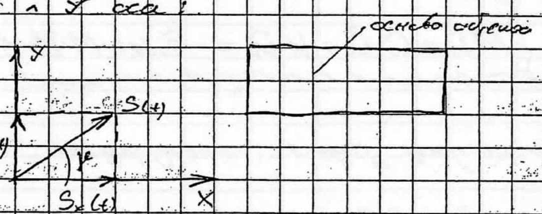
$\tilde{J}_{\tilde{u}}$ – инерц. силе услед релативног померања објекта



$$\boxed{\tilde{J}_{\tilde{u}} = -M\ddot{\tilde{u}}}$$

– Динамичко оптерећење сила S(t) има произвољан правац у односу на објекат, па га можемо разложити у правцу x и y оса:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ 0 \end{bmatrix} = S(t)\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} = S(t)\cdot b$$



– Разматра се објекат као круто тело, да је свим тачкама саопштено исто померање, па вектор померања за цео објекат гласи:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad b_j = b = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \ldots, n \text{ бр. таваница}$$

– Израз за инерцијалну силу гласи:

$\tilde{J}_s = -\ddot{S}(t)\cdot M\cdot B$, а укупна инерцијална сила је: $\tilde{J} = \tilde{J}_{\tilde{u}} + \tilde{J}_s$

$\tilde{J} = -M\ddot{\tilde{u}} - \ddot{S}(t)\cdot M\cdot B$, заменом овог израза у ј-ну: $K\cdot\tilde{u} = \vec{P} + \vec{\tilde{J}}$, водећи рачуна да је при динамичком померању ослонца $\vec{P} = 0$, добија се ј-на принудних осцилација дискретног система услед дејства динамичког померања ослонца – земљотреса:

$$\boxed{K\cdot\tilde{u} + M\cdot\ddot{\tilde{u}} = -\ddot{S}(t)\cdot M\cdot B}$$

– Поступак директне динамичке анализе се састоји у решавању преходне диф. ј-не, прво се налазе непознате (ū), да се на основу њих прорачуна „комплетан одговор" конструкције, односно остале статичке и деформацијске величине.

– Једначину смо добили под претпоставком да се конст. при земљотресу понаша еластично, међутим при јаким земљотресима долази до њеног нееластичног понашања, што доводи до тога да матрица крутости (K) нема константну вредност. Пошто конструкција увек има неко пригушење, ми у ј-ну ћемо уводимо и матрицу пригушења што је обично вискозно пригушење $C=2\xi\omega\cdot M$

$$\boxed{M\ddot{u}+C\cdot\dot{u}+K\cdot u=-\ddot{\xi}(t)\cdot M\cdot B}$$

– За случај једног стандардног објекта ова анализа је веома компликована, те се не примењује у динамичким прорачунима већ метод спектралне анализе.

(19.)

19) ОДРЕЂИВАЊЕ СЕИЗМИЧКИХ СИЛА ПРЕМА ПРАВИЛНИКУ

• Објекти високоградње рачунају се на дејство хориз. сеизм. сила најмање у 2 ортогонална правца.

• Прорачун се спроводи применом:

1) методе динамичке анализе (само за веома значајне објекте у области могућих јаких земљотреса)

2) методе еквивалентног статичког оптерећења

* Метода екв. стат. опт. заснива се на спектралној анализи. Коришћењем одговарајуће спектралне криве, одређује се замењујуће стат. опт. — хоризонтално, које делује у нивоу сваке таванице и одражава динамичке карактеристике објекта и осциловање тла.

Укупна хориз. сеизмичка сила: $\boxed{S = K \times G}$

G — укупна тежина објекта

K — укупни сеизмички коеф. за хоризонтални правац

$G = \Sigma$ сталног опт. + вероватно корисно (50% покретног обично, али се процењује у зависности од врсте објекта) + снег.

$K = K_o \times K_s \times K_d \times K_p \geq 0,02$

K_o, K_s и K_p су описног карактера и читају се из таблица

• K_o је коеф. категорије објекта (уводи повећање коеф. сигурности при земљотресу за важније објекте ($K_o>1$) и смањење за неважне објекте ($K_o<1$))

$K_o =$
- 1,5 (биоскопске дворане, факултети, позоришта)
- 1,0 (стамбене зграде, хотели)
- 0,75 (пољопривредно-производне зграде)

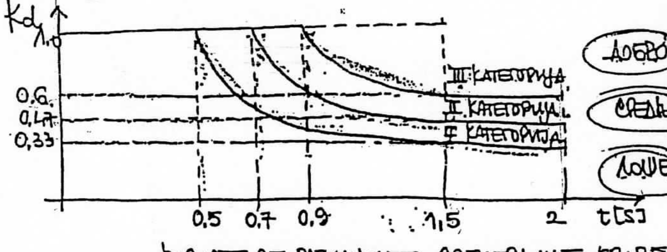
K_p — коеф. пригушења
— омогућава корекцију за нестандардне објекте
(ако објекти имају мање пригушење од оног са којим је рачунат спектар или имају мању способност деформације, за њих је $K_p>1$)

$K_p =$
- 1,0 — све савремене АБ, Fe и дрвене к-је сем доле наведених
- 1,3 — к-је од АБ зидова и Fe к-је са дијагоналама
- 1,6 — зидане к-је ојачане вертикалним серклажима од АБ, врло високе и витке к-је (високи инд. димњаци, антене, водоторњеви и др. к-је са основним периодом осц. $T \geq 2s$)
- 2,0 — к-је са флексибилним приземљем или спратом, тј. наглом променом крутости и к-је од обичних зидова

K_s — коеф. сеизмичности
— зависи од интензитета земљотреса

Степен MCS	K_s
VII	0.025
VIII	0.050
IX	0.100

• K_d — коеф. динамичности који се одређује на бази спектра одговора (прорачунава се).



Кат. тла		Коеф. Kd	Граничне вредности коефицијента Kd
Добро	I	$K_d = \frac{0,5}{T}$	$1,0 \geq K_d \geq 0,33$
Средње	II	$K_d = \frac{0,7}{T}$	$1,0 \geq K_d \geq 0,47$
Лоше	III	$K_d = \frac{0,9}{T}$	$1,0 \geq K_d \geq 0,60$

Користе се различите спектралне криве којима се уводи утицај локалног квалитета тла. Код меканог тла је повећање инерцијалних сила највеће, слабија тла преносе већа убрзања на објекат, зато лошем тлу одговара највећи K_d.

• K_d је нормиран и не зависи од стварног земљотреса. Због тога је уведен K_s који зависи од интензитета земљотреса. Његове вредности су нормиране у односу на убрзање земљине теже g (према MCS скали).

Када се израчуна сила S која делује на објекат, рачунају се силе S_i које делују у нивоу таваница:

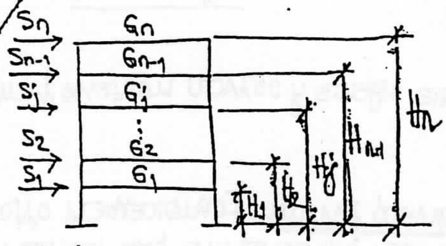
$$S_i = S \cdot \frac{G_i H_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i H_i}$$

S_i — сеизм. сила у i-том спрату

G_i — тежина i-тог спрата

H_i — висина

n — бр. спратова



За објекте који имају више од 5 спратова виши тонови могу бити од значаја на расподелу сеизмичких сила по висини објекта.

То се прописима приближно узима у обзир тако што се 85% од укупне силе распоређује према претходном изразу за S_i, а 15% силе се узима да делује на врху објекта.

При јачим земљотресима долази до прекорачења границе еластичности у к-ји и тиме до њеног нееластичног понашања. Међутим, јаки земљотреси спадају у тзв. изузетна опт. која се не јављају тако често. За таква изузетна опт. дозвољава се да се к-ја понаша нееластично као и да дође до одређених оштећења која неће угрозити стабилност објекта. Ово нееластично понашање је обухваћено коеф. Kd.

Системи са више степени слободе имају компликованије понашање али се показало да се анализа може спровести као за 1 степ. слободе.