Primena verovatnoće i statistike u hidrologiji

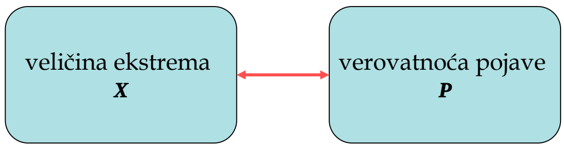
- Vodoprivredni sistemi/hidrotehničke mere se planiraju i projektuju za određene događaje u budućnosti za koje se ne zna kada će se dogoditi – zato se pri planiranju mora naznačiti verovatnoća da će se takav događaj dogoditi
  - verovatnoća da će se na prelivu brane javiti protok jednak ili veći od onog na koji je preliv projektovan
  - veroatnoća da će nivo vode u reci (u određenom profilu) prevazići kotu krune nasipa
  - verovatnoća da će vodozahvat (za industriju, navodnjavanje ili HE) ostati na suvom, tj. da će nivo vode u reci pasti ispod kote vodozahvata
  - verovatnoća da će protok u reci pasti ispod granice biološkog minimuma za određenu vrstu riba
  - itd.

Primena verovatnoće i statistike u hidrologiji

- Hidrološki procesi odvijaju se u prostoru i vremenu
  - delom predvidivo (deterministički)
  - delom nepredvidivo (slučajno, stohastički)
- Čisto slučajan proces: jedan podatak osmatranja ne zavisi od prethodnih ili narednih osmatranja – pogodno za ekstremne hidrološke pojave (velike/male vode)
- Statistički modeli u hidrologiji
  - modeli verovatnoće pojave hidroloških ekstrema
  - regresioni modeli (veze između dve ili više promenljivih)

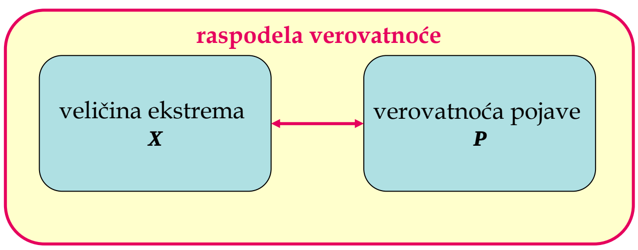
Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Hidrološki ekstremi (velike/male vode)
  - dešavaju se relativno retko (u poređenju sa neekstremnim događajima)
  - mogu se posmatrati kao slučajni događaji
  - veličina ("jačina") ekstrema povezuje se verovatnoćom pojave
    - što je veći ekstrem, manja je verovatnoća njegovog prevazilaženja



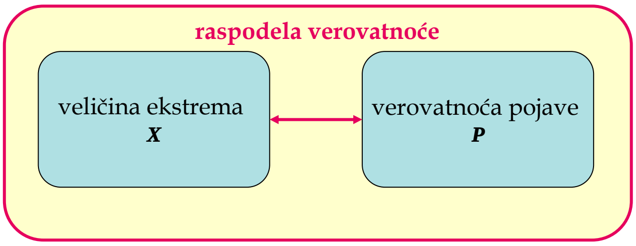
Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Veza između veličine ekstrema i verovatnoće = raspodela verovatnoće



Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Cilj statističke analize:
  - pronaći raspodelu verovatnoće ("model") koja dovoljno dobro opisuje vezu *X*-*P* u osmotrenom nizu podataka
  - uz pomoć odabrane raspodele, odrediti:
    - verovatnoću pojave zadatog ekstrema, $P(X)$
    - veličinu ekstrema zadate verovatnoće pojave, $X(P)$



Statistička analiza hidroloških ekstrema

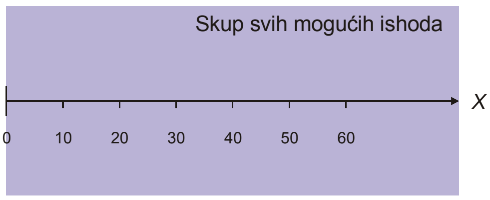
- Rezultati statističke analize koriste se za:
  - projektovanje objekata i sistema za zaštitu od poplava
    - analiza maksimalnih protoka, nivoa vode, kiša
  - analizu dugotrajnih sušnih perioda za potrebe vodosnabdevanja ili poljoprivrede
    - analiza minimalnih protoka, maksimalnih beskišnih perioda
  - analize kvaliteta voda i garantovanih ekoloških protoka
    - analiza minimalnih protoka

Osnovni pojmovi iz verovatnoće

- Slučajna promenljiva
  - veličina koja se ponaša po nekom zakonu verovatnoće, tj. uzima određene vrednosti sa nekom verovatnoćom
- Ishodi ili realizacije
  - vrednosti koje uzima slučajna promenljiva
- Skup svih mogućih ishoda
  - oblast definisanosti slučajne promenljive
- Slučajni događaj
  - podskup skupa svih mogućih ishoda

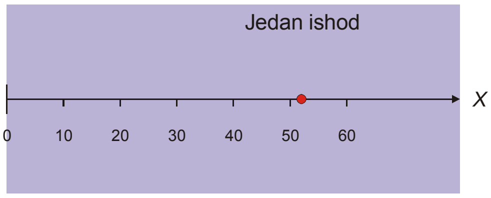
Osnovni pojmovi

- Primer:
  - Visina kiše kao slučajna promenljiva X
  - Skup svih mogućih ishoda: $0 \le X < \infty$



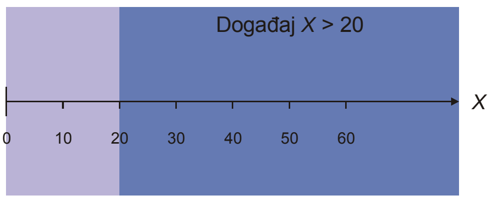
Osnovni pojmovi

- Primer:
  - Visina kiše kao slučajna promenljiva X
  - Skup svih mogućih ishoda: $0 \le X < \infty$
  - Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52$ mm



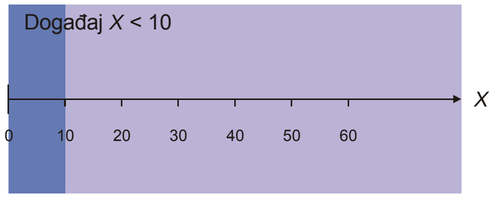
Osnovni pojmovi

- Primer:
  - Visina kiše kao slučajna promenljiva X
  - Skup svih mogućih ishoda: $0 \le X < \infty$
  - Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52$ mm
  - Slučajni događaj:
    $X > 20$ mm



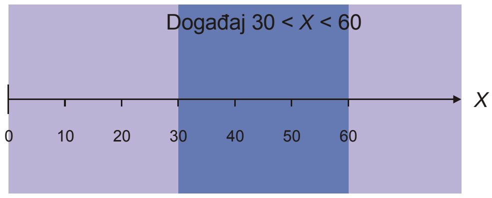
Osnovni pojmovi

- Primer:
  - Visina kiše kao slučajna promenljiva X
  - Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
  - Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52$ mm
  - Slučajni događaj:
    $X > 20$ mm, $X \leq 10$ mm



Osnovni pojmovi

- Primer:
  - Visina kiše kao slučajna promenljiva X
  - Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
  - Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52$ mm
  - Slučajni događaj:
    $X > 20$ mm, $X \leq 10$ mm, $30 \leq X \leq 60$ mm



Osnovni pojmovi

- Slučajne promenljive:
  - *prekidne ili diskretne*: skup svih mogućih ishoda = skup celih brojeva
    - broj dana u godini sa kišom većom od 10 mm
    - broj dana u godini sa temperaturom ispod 0^oC
    - broj talasa velikih voda u godini sa maksimalnim protokom većim od neke vrednosti
  - *neprekidne ili kontinualne*: skup svih mogućih ishoda = skup realnih brojeva
    - visina kiše
    - vodostaj (nivo vode)
    - protok
    - zapremine talasa velikih voda
    - nivo podzemnih voda

Zakon raspodele verovatnoće

- Ishodi ili realizacije i događaji se dešavaju sa određenom verovatnoćom, prema RASPODELI VEROVATNOĆE
- Raspodela verovatnoće za diskretnu slučajnu promenljivu

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P\{X = x_i\}$$

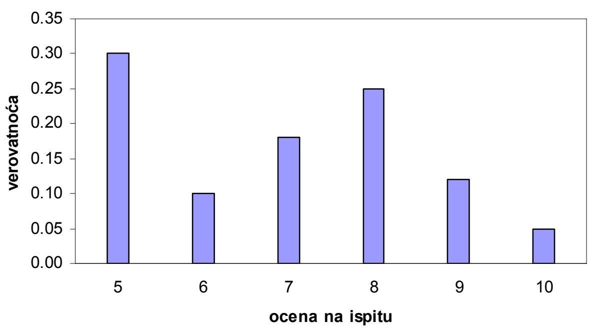
$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = \sum_i p_i = 1$$

Zakon raspodele verovatnoće za diskretnu slučajnu promenljivu

- Primer:
  - bacanje novčića $X:\begin{pmatrix} P & G \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
  - bacanje kocke $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$
  - ocena na ispitu $X:\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.30 & 0.10 & 0.18 & 0.25 & 0.12 & 0.05 \end{pmatrix}$

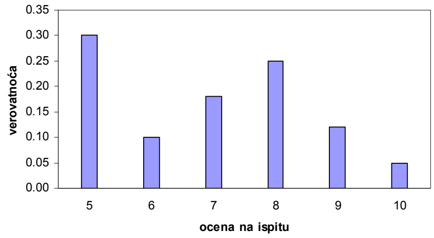
Zakon raspodele verovatnoće za diskretnu slučajnu promenljivu

- Grafički prikaz
  - ocena na ispitu



Zakon raspodele verovatnoće za diskretnu slučajnu promenljivu

- Primer događaja
  - ocena na ispitu
    - verovatnoća da se padne ispit: $P\{X = 5\} = 0.30$
    - verovatnoća da se položi ispit:
      $P\{X > 5\} = P\{X \geq 6\} = P\{X = 6 \text{ ili } X = 7 \text{ ili } X = 8 \text{ ili } X = 9 \text{ ili } X = 10\} =$
      $P\{X = 6\} + P\{X = 7\} + P\{X = 8\} + P\{X = 9\} + P\{X = 10\} =$
      $0.10 + 0.18 + 0.25 + 0.12 + 0.05 = 0.70$
      ili
      $P\{X \neq 5\} = 1 - P\{X = 5\} = 1 - 0.30 = 0.70$
    - verovatnoća za odličnu ocenu:
      $P\{X \geq 9\} = P\{X = 9\} + P\{X = 10\}$
      $0.12 + 0.05 = 0.17$



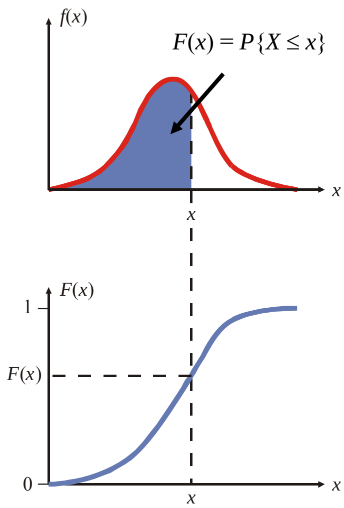
Zakon raspodele verovatnoće

- Raspodela verovatnoće za <u>kontinualnu</u> slučajnu promenljivu
  - funkcija gustine verovatnoće $f(x)$

    $$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$$

  - funkcija raspodele verovatnoće $F(x)$

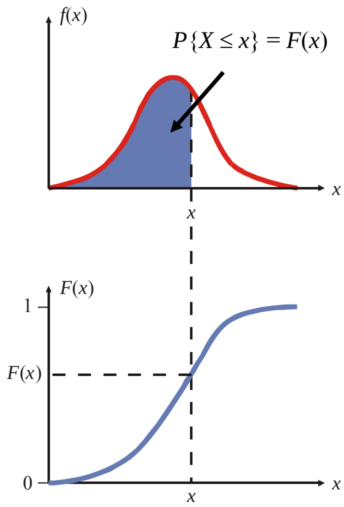
    $$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



Zakon raspodele verovatnoće za kontinualnu slučajnu promenljivu

- Verovatnoće događaja

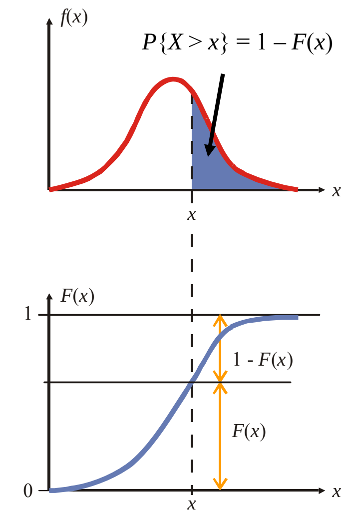
$P\{X \leq x\} = F(x)$



Zakon raspodele verovatnoće za kontinualnu slučajnu promenljivu

- Verovatnoće događaja

$P\{X > x\} = 1 - P\{X \leq x\} = 1 - F(x)$



Zakon raspodele verovatnoće za kontinualnu slučajnu promenljivu

- Verovatnoće događaja

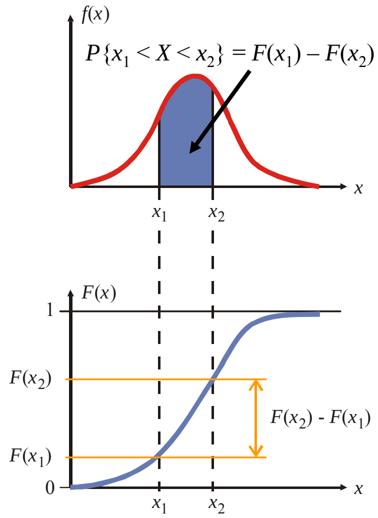
$P\{x_1 < X < x_2\} =$

$= 1 - P\{X < x_1\} - P\{X > x_2\} =$

$= 1 - P\{X > x_2\} - P\{X < x_1\} =$

$= P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\}$

$= F(x_2) - F(x_1)$



Zakon raspodele verovatnoće za kontinualnu slučajnu promenljivu

- Primer:
  - eksponencijalna raspodela:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_0^x f(u)du = \int_0^x e^{-u}du = -e^{-u}\Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

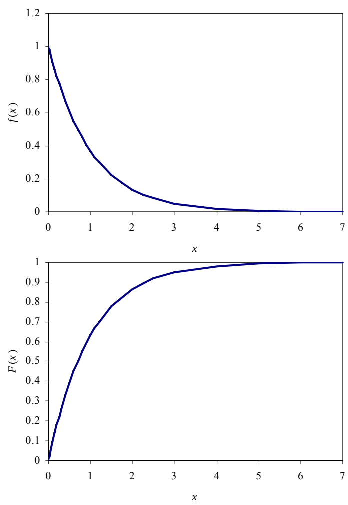
$$P\{X \leq 1\} = F(1) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

$$P\{1 < X < 2\} = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} =$$
$$= 0.368 - 0.135 = 0.233$$

$$P\{2 < X < 3\} = F(3) - F(2) = 1 - e^{-3} - 1 + e^{-2} =$$
$$= 0.135 - 0.050 = 0.085$$

$$P\{X > 3\} = 1 - F(3) = 1 - 1 + e^{-3} = 0.050$$

$$P\{X \leq 1\} + P\{1 < X < 2\} + P\{2 < X < 3\} + P\{X > 3\} =$$
$$= 0.632 + 0.233 + 0.085 + 0.050 = 1.000$$



Osobine raspodela verovatnoće

- Momenti raspodele
  - momenti oko koordinatnog početka

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

  - momenti oko sredine

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

Osobine raspodela verovatnoće

- Mere centralne tendencije
  - srednja vrednost
    - težište gustine raspodele:

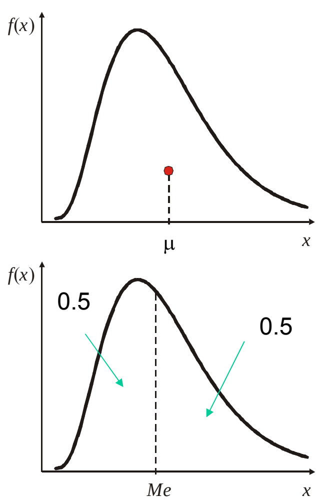
$$\mu'_1 = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx$$

    - iz uzorka:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

  - medijana:

$$F(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = 0.5$$



Osobine raspodela verovatnoće

- Mere odstupanja od srednje vrednosti
  - disperzija (varijansa):

$$\mu_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

    - iz uzorka:

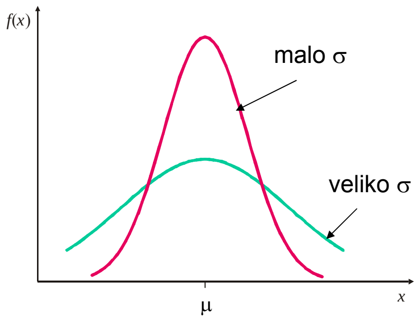
$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

    - standardna devijacija:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

    - koeficijent varijacije:

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} \qquad c_v = \frac{S}{\bar{x}}$$



Osobine raspodela verovatnoće

- Asimetrija raspodele
  - treći momenat:

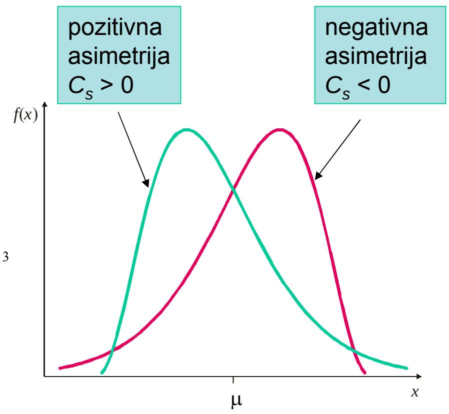
$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx$$

    - koeficijent asimetrije:

$$C_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

    - iz uzorka:

$$c_s = \frac{N}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{S^3}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3$$



Način izražavanja veze X-P

vrednost slučajne promenljive x

VEROVATNOĆA:

funkcija raspodele ili verovatnoća neprevazilaženja $F(x) = P\{X \le x\}$

verovatnoća prevazilaženja $P\{X > x\} = 1 - F(x)$

- velike vode (maksimumi)
  - $P\{X \le x\} = F(x) \rightarrow$ obezbeđenost
  - $P\{X > x\} = 1 - F(x) \rightarrow$ rizik, neobezbeđenost
- male vode (minimumi)
  - $P\{X \le x\} = F(x) \rightarrow$ rizik, neobezbeđenost
  - $P\{X > x\} = 1 - F(x) \rightarrow$ obezbeđenost

Povratni period

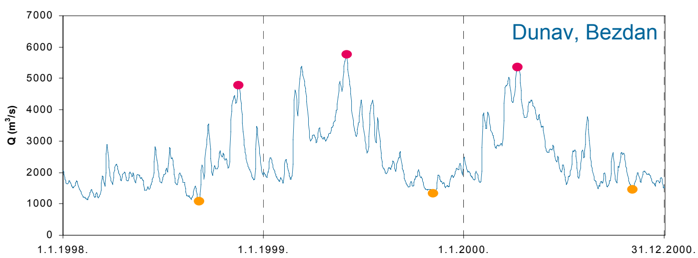
- Definiše se kao recipročna vrednost verovatnoće kritičnog događaja
  - predstavlja način izražavanja verovatnoće kritičnog događaja
  - predstavlja prosečan broj godina između dva prevazilaženja vrednosti
  - izražava se u godinama
- velike vode (maksimumi) $T(x) = \dfrac{1}{P\{X > x\}} = \dfrac{1}{1 - F(x)}$
  - primer:
    $T(200\ m^3/s) = 50$ god. znači da će se protok od $200\ m^3/s$ prevazići jednom u 50 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/50 = 0.02 = 2\%$)
- male vode (minimumi) $T(x) = \dfrac{1}{P\{X \le x\}} = \dfrac{1}{F(x)}$
  - primer:
    $T(0.4\ m^3/s) = 20$ god. znači da će se protok manji od $0.4\ m^3/s$ javiti jednom u 20 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/20 = 0.05 = 5\%$)

Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Uslovi koje hidrološki nizovi ekstrema moraju da ispune:
  - nezavisni podaci (slučajnost)
  - jednako raspoređeni, "istorodni" (homogenost)
- Smatra se da uzorci formirani od vrednosti godišnjih ekstrema u opštem slučaju ispunjavaju ove uslove
- Ispunjavanje uslova proverava se pomoću odgovarajućih statističkih testova

Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Vrste hidroloških nizova:
  1. Nizovi godišnjih ekstrema
     - godišnji minimumi (male vode)
     - godišnji maksimumi (velike vode, padavine)

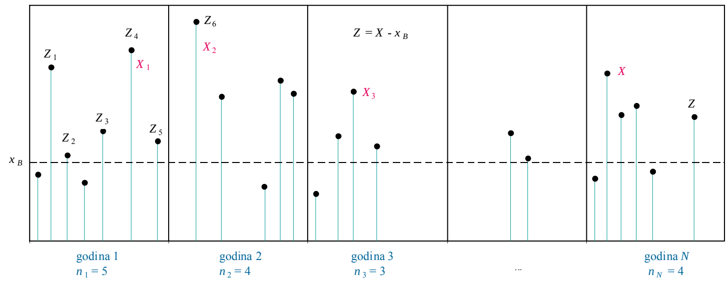


Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Vrste hidroloških nizova:
  2. Nizovi prekoračenja iznad/ispod praga (POT metoda)

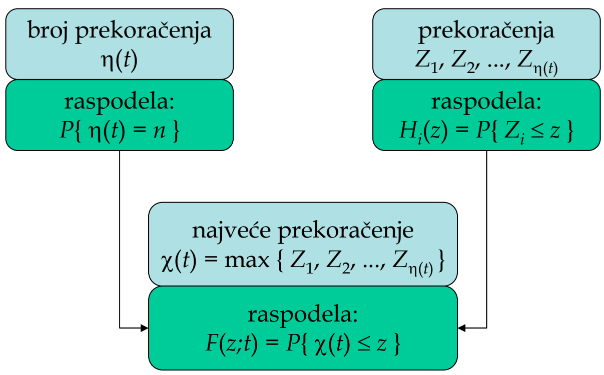
Za N godina:

1) niz brojeva prekoračenja u godini dana n_1, n_2, ..., n_N (ukupan broj prekoračenja M; prosečan broj prekoračenja godišnje $\Lambda = M/N$)
2) niz prekoračenja Z_1, Z_2, ..., Z_M
3) niz godišnjih maksimuma X_1, X_2, ..., X_N



Statistička analiza velikih voda

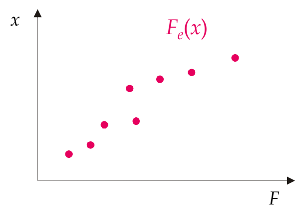
- Vrste hidroloških nizova:
  2. Nizovi prekoračenja iznad/ispod praga (POT metoda)
     - Postupak proračuna:



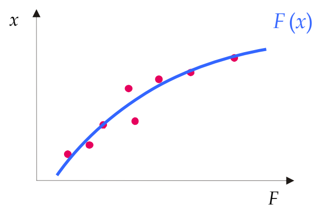
Statistička analiza hidroloških ekstrema: postupak

- PRILAGOĐAVANJE teorijskih raspodela osmotrenim podacima
  - formiranje EMPIRIJSKE RASPODELE >>>
  - proračun parametara TEORIJSKIH RASPODELA >>>
  - TESTIRANJE SAGLASNOSTI empirijske i teorijskih raspodela >>>
  - IZBOR najbolje raspodele >>>

osmotreni podaci –
EMPIRIJSKA RASPODELA



prilagođavanje –
TEORIJSKA RASPODELA

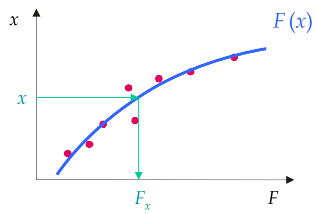


Statistička analiza hidroloških ekstrema: postupak

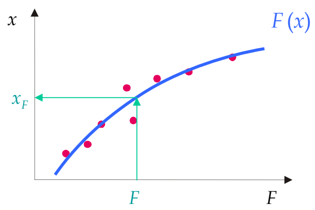
II. PRORAČUN teorijske raspodele

- VEROVATNOĆE za zadatu vrednost, $F(x)$
- KVANTILA (vrednosti za zadatu verovatnoću), $x(F)$

proračun
VEROVATNOĆE



proračun
KVANTILA



Empirijska raspodela

- Proračun empirijske funkcije raspodele
  - potrebno oceniti funkciju raspodele $F(x)$ tj. verovatnoću $P\{X \le x\}$
  - kumulativna relativna frekvencija:

$$P\{X \le x_k\} = \frac{k}{N} = \frac{\text{broj podataka} \le x_k}{\text{broj podataka u nizu}}$$

    - x_k – k-ti podatak u nizu uređenom u rastući redosled
  - primer (N = 51):

$$P\{X \le x_5\} = P\{X \le 3360\} = \frac{5}{51} = 0.098$$

k	x_k
1	2680
2	2996
3	3190
4	3310
5	3360
6	...

Empirijska raspodela

- Kumulativna relativna frekvencija kao empirijska raspodela

N = 40

k	x_k	k / N
1	$x_1 = x_{\min}$	1/40
2	x_2	2/40
3	x_3	3/40
4	x_4	4/40
5	x_5	5/40
...		
38	x_{38}	38/40
39	x_{39}	39/40
40	$x_{40} = x_{\max}$	40/40 = 1

$$P\{X \le x_{\max}\} = \frac{N}{N} = 1$$

$$P\{X > x_{\max}\} = 1 - P\{X \le x_{\max}\} = 0$$

sigurno će X biti manje od $x_{\max}$
tj. nemoguće da X bude veće od $x_{\max}$

?

Empirijska raspodela

- "Korekcija" kumulativne relativne frekvencije kao empirijska raspodela

$N = 40$

k	x_k	$k - 1 / N$
1	$x_1 = x_{min}$	0/40 = 0
2	x_2	1/40
3	x_3	2/40
4	x_4	3/40
5	x_5	4/40
...		
38	x_{38}	37/40
39	x_{39}	38/40
40	$x_{40} = x_{max}$	39/40

$$P\{X \le x_{min}\} = \frac{0}{N} = 0$$

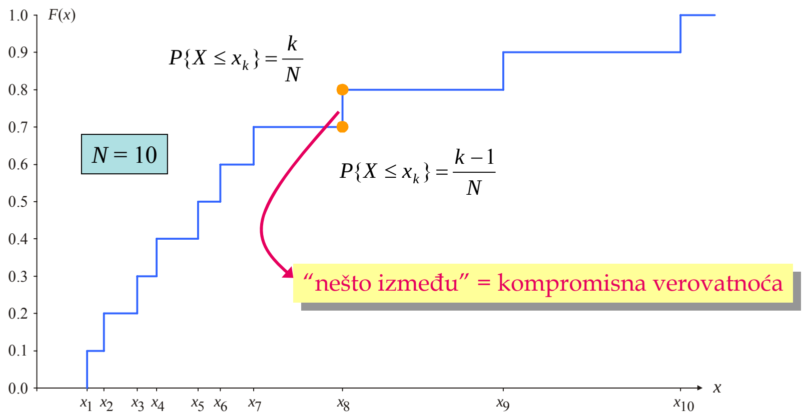
$$P\{X > x_{min}\} = 1 - P\{X \le x_{min}\} = 1$$

nemoguće je da X bude manje od x_{min}
tj. sigurno će X biti veće od x_{min}

?

Empirijska raspodela

- Kumulativna relativna frekvencija kao empirijska raspodela



Empirijska raspodela

- Kompromisna verovatnoća po Hejzenu kao empirijska raspodela

$N = 40$

k	x_k	$k - 0.5\ /\ N$
1	$x_1 = x_{min}$	0.5/40
2	x_2	1.5/40
3	x_3	2.5/40
4	x_4	3.5/40
5	x_5	4.5/40
...		
38	x_{38}	37.5/40
39	x_{39}	38.5/40
40	$x_{40} = x_{max}$	39.5/40

$$\boxed{P\{X \le x_k\} = \frac{k - 0.5}{N}}$$

$$P\{X \le x_{\min}\} = \frac{0.5}{N} = \frac{0.5}{40} = 0.0125$$

$$P\{X \le x_{\max}\} = \frac{N-1}{N} = \frac{39.5}{40} = 0.9875$$

$$P\{X > x_{\max}\} = 1 - P\{X \le x_{\max}\} = 0.0125$$

Empirijska raspodela

- Kompromisna verovatnoća po Vejbulu kao empirijska raspodela

$N = 40$

k	x_k	$k\ /\ N + 1$
1	$x_1 = x_{min}$	1/41
2	x_2	2/41
3	x_3	3/41
4	x_4	4/41
5	x_5	5/41
...		
38	x_{38}	38/41
39	x_{39}	39/41
40	$x_{40} = x_{max}$	40/41

$$\boxed{P\{X \le x_k\} = \frac{k}{N+1}}$$

$$P\{X \le x_{\min}\} = \frac{1}{N+1} = \frac{1}{41} = 0.0244$$

$$P\{X \le x_{\max}\} = \frac{N}{N+1} = \frac{40}{41} = 0.9756$$

$$P\{X > x_{\max}\} = 1 - P\{X \le x_{\max}\} = 0.0244$$

nazad >

Teorijske raspodele verovatnoće u hidrologiji

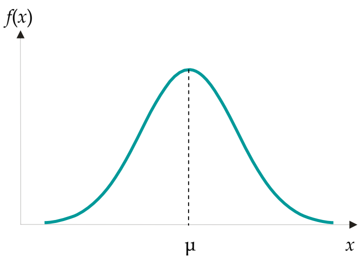
- Normalna i log-normalna raspodela
- Gumbelova raspodela
- Pirson III i log-Pirson III raspodela

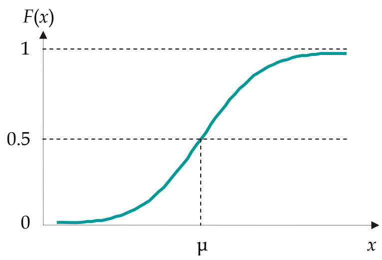
primer >

nazad >

Normalna raspodela

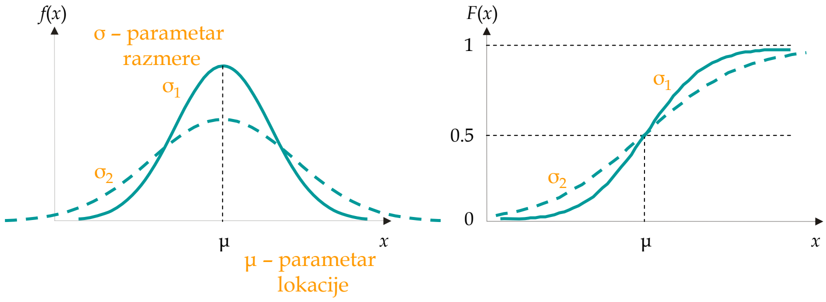
- gustina raspodele: $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$
- funkcija raspodele: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] du$$





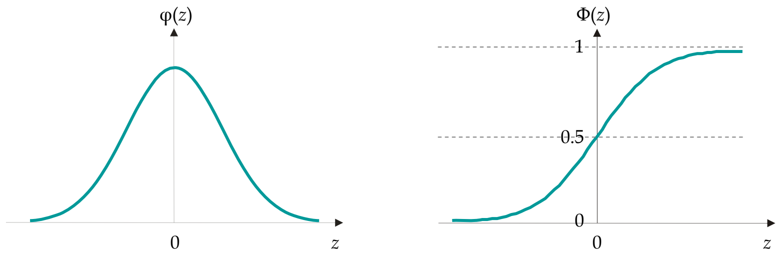
Normalna raspodela

- parametri:
  - μ – srednja vrednost ($\mu = \mu'_1$)
  - σ – standardna devijacija ($\sigma^2 = \mu_2$)



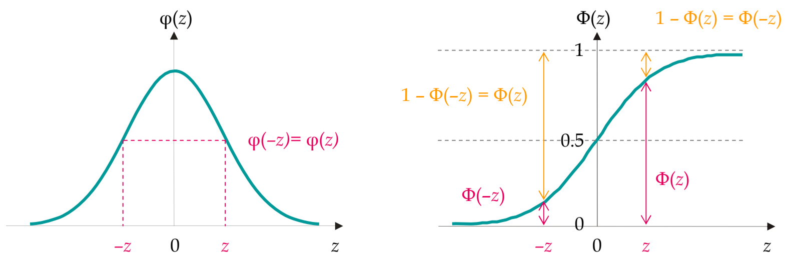
Normalna raspodela

- Standardna normalna raspodela
  - smena: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
  - gustina i funkcija raspodele: $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{z^2}{2}\right]$ $\quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{u^2}{2}\right] du$
  - parametri: $\mu = 0, \quad \sigma = 1$



Normalna raspodela

- važna osobina: simetričnost → $C_s = 0$



Normalna raspodela

- Veza između normalne i standardne normalne raspodele:

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X - \mu \le x - \mu\} =$$
$$= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} =$$
$$= P\left\{Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{F(x) = \Phi(z), \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

Normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu = \bar{x}$$
$$\sigma = S_x$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow z = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB}} F_Z(z) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow x = \bar{x} + z \cdot S_x$$

Excel

F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

Log-normalna raspodela

- Primena normalne raspodele na logaritmovane podatke
  - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati normalnu raspodelu, tada X prati log-normalnu raspodelu
  - parametri: srednja vrednost i standardna devijacija logaritmovanog niza

$$\mu_Y, \quad \sigma_Y$$

- Veza sa standardnom normalnom raspodelom

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{10^Y \le x\} =$$
$$= P\{Y \le \log x\} = F_Y(\log x)$$

$$\boxed{F(x) = F_Y(\log x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{F(x) = F_Y(y) = \Phi(z), \quad y = \log x, \quad z = \frac{y - \mu}{\sigma}}$$

Log-normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu_Y = \bar{y}$$
$$\sigma_Y = S_y$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \log x \rightarrow z = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB}} F_Z(z) = F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow y = \bar{y} + z \cdot S_y \rightarrow x = 10^y$$

Excel

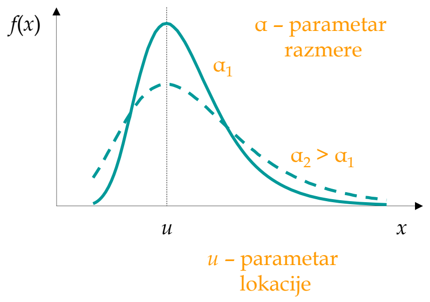
F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

Gumbelova raspodela

- gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{x-u}{\alpha} - \exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}, \quad -\infty < x < \infty$
- funkcija raspodele: $F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}$
- inverzna funkcija raspodele: $x(F) = u + \alpha[-\ln(-\ln F)]$
- drugi nazivi:
  - dvostruko eksponencijalna raspodela
  - raspodela ekstremnih vrednosti I tipa

Gumbelova raspodela

- parametri:
  - α – parametar razmere
  - u – parametar lokacije



- osobine:
  - srednja vrednost μ(u,α)
  - standardna devijacija σ(u,α)

$$\mu = u + 0.5772\alpha$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\alpha$$

  - koef. asimetrije C_s = 1.14

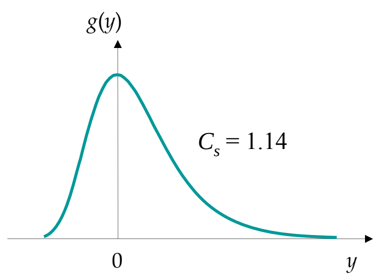
Gumbelova raspodela

- Standardna Gumbelova raspodela
  - smena: $y = \dfrac{x-u}{\alpha}$
  - parametri: $\alpha = 1$, $u = 0$
  - gustina raspodele:

$$g(y) = e^{-y} e^{-e^{-y}}, \quad -\infty < y < \infty$$

  - funkcija raspodele: $G(y) = e^{-e^{-y}}$
  - inverzna funkcija raspodele:

$$y(G) = -\ln(-\ln G)$$



Gumbelova raspodela

- Veza između obične i standardne Gumbelove raspodele:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P\{X \le x\} = P\{X - u \le x - u\} = \\
&= P\left\{\frac{X-u}{\alpha} \le \frac{x-u}{\alpha}\right\} = \\
&= P\left\{Y \le \frac{x-u}{\alpha}\right\} = G\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{F(x) = G\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}$$

$$\boxed{F(x) = G(y), \quad y = \frac{x-u}{\alpha}}$$

Gumbelova raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$u = \bar{x} - 0.45\, S_x$$
$$\alpha = 0.78 S_x$$

- Postupak proračuna

$$x \;\rightarrow\; y = \frac{x-u}{\alpha} \;\rightarrow\; F_Y(y) = e^{-e^{-y}} = F_X(x)$$

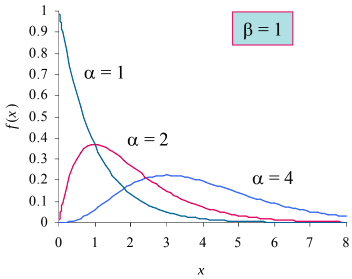
$$F_X(x) = F_Y(y) \;\rightarrow\; y = -\ln(-\ln F) \;\rightarrow\; x = u + y \cdot \alpha$$

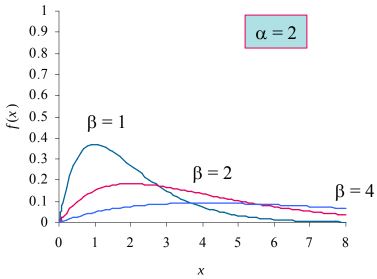
Excel

F = EXP(–EXP(–y))
y = –LN(–LN(F))

Familija gama raspodela

- Dvoparametarska gama raspodela
  - gustina raspodele: $f(x) = \dfrac{1}{\beta\,\Gamma(\alpha)} \left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$
  - parametri:
    - α – parametar oblika
    - β – parametar razmere





Pirsonova raspodela III tipa

- Troparametarska gama raspodela
- gustina raspodele: $f(x) = \dfrac{1}{\beta\,\Gamma(\alpha)} \left(\dfrac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x-\gamma)/\beta}, \quad x \geq 0$
- parametri:
  - α – parametar oblika
  - β – parametar razmere
  - γ – parametar lokacije
- osobine:
  - asimetrična; za $C_s = 0$ postaje normalna raspodela
  - momenti:

$$\mu = \alpha\beta + \gamma$$
$$\sigma = \beta\sqrt{\alpha}$$
$$C_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Pirsonova raspodela III tipa

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2}, \quad \beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2}, \quad \gamma = \bar{x} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \quad \rightarrow \quad K_P = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \quad \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} \quad F_X(x)$$

$$F_X(x) \quad \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} \quad K_P \quad \rightarrow \quad x = \bar{x} + K_P \cdot S_x$$

K_P – faktor frekvencije

Excel

C_{sx} > 0: F = GAMMADIST((x – c)/b,a,1,TRUE)
x = c + b * GAMMAINV(F,a,1)
C_{sx} < 0: F = 1 – GAMMADIST((x – c)/b,a,1,TRUE)
x = c + b * GAMMAINV(1 – F,a,1)

Log-Pirson III raspodela

- Log-Pirson III raspodela
  - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati Pirson III raspodelu, tada X prati log-Pirson III raspodelu
  - primena Pirson III raspodele na logaritmovane podatke

Log-Pirson III raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2}, \quad \beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2}, \quad \gamma = \bar{y} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \;\rightarrow\; y = \log x \;\rightarrow\; K_P = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB za } c_{sy}} F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) \xrightarrow{\text{TAB za } c_{sy}} K_P \;\rightarrow\; y = \bar{y} + K_P \cdot S_y \;\rightarrow\; x = 10^y$$

```
Csy > 0: F = GAMMADIST((y – c)/b,a,1,TRUE)
         y = c + b * GAMMAINV(F,a,1)
Csy < 0: F = 1 – GAMMADIST((y – c)/b,a,1,TRUE)
         y = c + b * GAMMAINV(1 – F,a,1)
```

Testiranje saglasnosti

- Saglasnost empirijske i teorijske raspodele
  - empirijska raspodela $F_e(x)$
  - teorijska raspodela $F_t(x)$

- Test Kolmogorova-Smirnova
  - kontrolna statistika $D_{max} = \max |F_t(x) - F_e(x)|$
  - kriterijum:
    - $D_{max} < D_{kr} \rightarrow$ raspodele su saglasne
    - $D_{max} > D_{kr} \rightarrow$ raspodele nisu saglasne
  - D_{kr} zavisi od dužine uzorka N i praga značajnosti α, dato u tablicama

N	α = 10%	α = 5%	α = 2%	α = 1%
20	0.265	0.294	0.329	0.352
40	0.189	0.210	0.235	0.252

nazad >

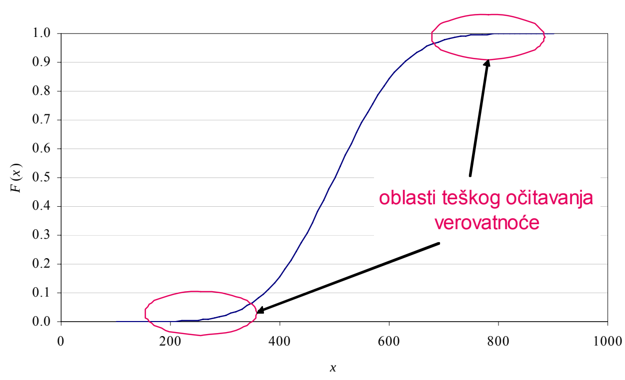
Izbor teorijske raspodele

- Izbor najbolje teorijske raspodele
  - na osnovu primenljivosti teorijske raspodele
    - da li osobine teorijske raspodele odgovaraju osobinama uzorka (npr. asimetrija)
  - na osnovu testova saglasnosti emirijske i teorijske raspodele
  - vizuelna provera na papiru verovatnoće

nazad >

Papiri verovatnoće

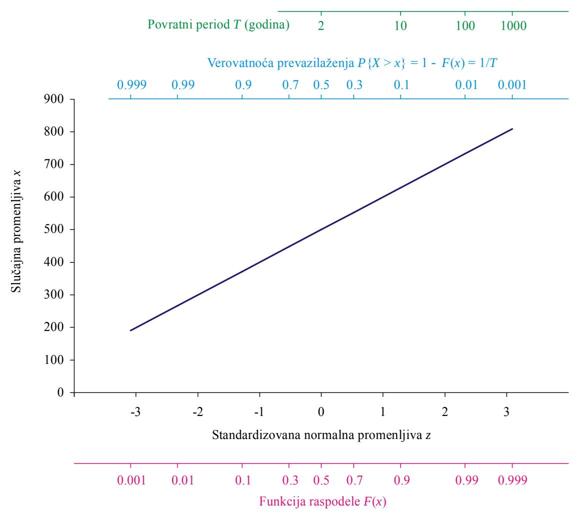
- Verovatnoća u aritmetičkoj razmeri?
- Kako "linearizovati" zavisnost $F(x)$?



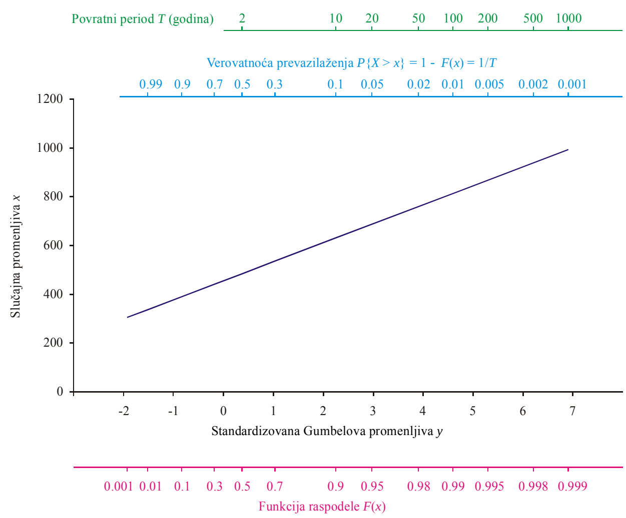
Papiri verovatnoće

- Standardizovane promenljive – jednoznačna veza između promenljive i verovatnoće
  - normalna raspodela: z – $F(z)$
  - Gumbelova raspodela: $y = -\ln(-\ln F)$
- Linearna veza između standardizovane i “originalne” promenljive
  - normalna raspodela: $X = \mu + \sigma Z$
  - Gumbelova raspodela: $X = u + \alpha Y$

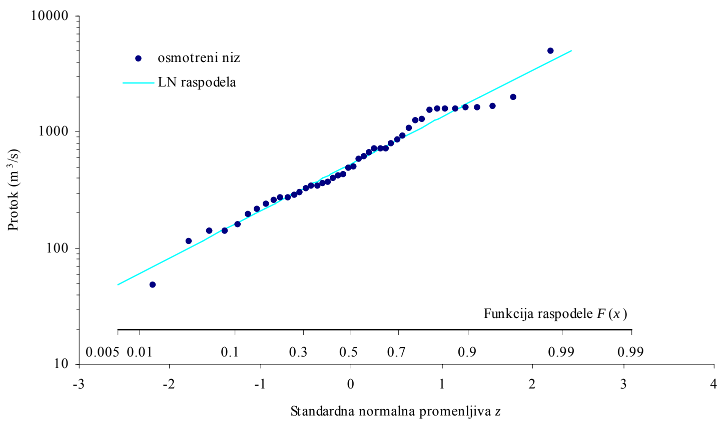
Papir normalne verovatnoće



Papir Gumbelove verovatnoće

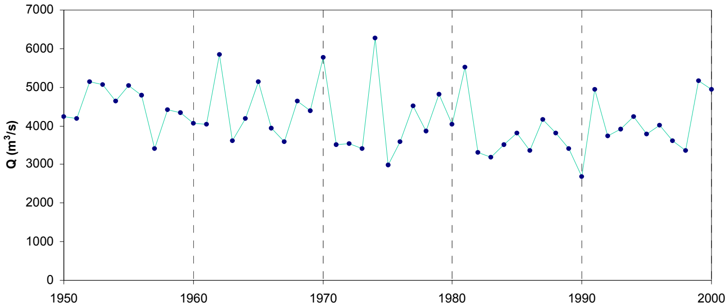


Papir log-normalne verovatnoće



Primer

- Sava – Sremska Mitrovica



	originalni niz X	logaritmovani niz $Y = \log X$
broj podataka	51	51
srednja vrednost	4187	3.6147
standardna devijacija	781.3	0.07936
koeficijent varijacije	0.187	0.022
koeficijent asimetrije	0.623	0.196

Primer

- Proračun parametara raspodela
  - Normalna raspodela:

$$\mu = \bar{x} = 4187 \ \ \mathrm{m^3/s}$$
$$\sigma = S_x = 781.3 \ \ \mathrm{m^3/s}$$

  - Log-normalna raspodela:

$$\mu_Y = \bar{y} = 3.6147$$
$$\sigma_Y = S_y = 0.07936$$

  - Gumbelova raspodela:

$$u = \bar{x} - 0.45 \cdot S_x = 4187 - 0.45 \cdot 781.3 = 3835 \ \ \mathrm{m^3/s}$$
$$\alpha = 0.78 \cdot S_x = 0.78 \cdot 781.3 = 609.4 \ \ \mathrm{m^3/s}$$

	X	$Y = \log X$
broj podataka	51	51
srednja vrednost	4187	3.6147
standardna devijacija	781.3	0.07936
koeficijent asimetrije	0.623	0.196

Primer

- Proračun parametara raspodela
  - Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2} = \frac{4}{0.623^2} = 10.31$$

$$\beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2} = \frac{781.3 \cdot 0.623}{2} = 243.3$$

$$\gamma = \bar{x} - \frac{2S_x}{c_{sx}} = 4187 - \frac{2 \cdot 781.3}{0.623} = 1678 \ \mathrm{m^3/s}$$

	X	$Y = \log X$
broj podataka	51	51
srednja vrednost	4187	3.6147
standardna devijacija	781.3	0.07936
koeficijent asimetrije	0.623	0.196

  - Log-Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2} = \frac{4}{0.196^2} = 104.31$$

$$\beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2} = \frac{0.07936 \cdot 0.196}{2} = 0.007771$$

$$\gamma = \bar{y} - \frac{2S_y}{c_{sy}} = 3.6147 - \frac{2 \cdot 0.07936}{0.196} = 2.804$$

Primer

- Proračun teorijskih raspodela
  - protok za $F(x) = 0.95$
  - Normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB, XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$x = \bar{x} + z \cdot S_x = 4187 + 1.645 \cdot 781.3 = 5472 \ \mathrm{m^3/s}$$

  - Log-normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB, XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$y = \bar{y} + z \cdot S_y = 3.6147 + 1.645 \cdot 0.07936 = 3.74524$$

$$x = 10^y = 5562 \ \mathrm{m^3/s}$$

Primer

- Proračun teorijskih raspodela
  - protok za $F(x) = 0.95$

  - Gumbelova raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \quad \rightarrow \quad y(0.95) = -\ln(-\ln 0.95) = 2.970$$
$$x = u + y \cdot \alpha = 3835 + 2.970 \cdot 609.4 = 5645 \text{ m}^3/\text{s}$$

  - Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_P(F = 0.95, c_{sx} = 0.6) = 1.797, \quad k_P(F = 0.95, c_{sx} = 0.7) = 1.819$$
$$k_P(F = 0.95, c_{sx} = 0.623) = 1.802$$
$$x = \bar{x} + k_P \cdot S_x = 4187 + 1.802 \cdot 781.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{x - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 10.311, 1) = 16.098 = u$$
$$x = \gamma + u \cdot \beta = 1678 + 16.098 \cdot 243.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

- Proračun teorijskih raspodela
  - protok za $F(x) = 0.95$

  - Log-Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_P(F = 0.95, c_{sy} = 0.1) = 1.673, \quad k_P(F = 0.95, c_{sy} = 0.2) = 1.700$$
$$k_P(F = 0.95, c_{sy} = 0.196) = 1.699$$
$$y = \bar{y} + k_P \cdot S_y = 3.6147 + 1.699 \cdot 0.07936 = 3.74953$$
$$x = 10^y = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{y - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 104.31, 1) = 121.66 = u$$
$$y = \gamma + u \cdot \beta = 2.8041 + 121.66 \cdot 0.00777 = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
  - Rezultati proračuna kvantila od 95%

Raspodela	Protok sa $F(x) = 0.95$ (m^3/s)
Normalna	5472
Log-normalna	5562
Gumbelova	5645
Pirson III	5595
Log-Pirson 3	5617

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
  - Saglasnost empirijske i teorijske raspodele – test Kolmogorova-Smirnova

D_{max}				
N	LN	G	P3	LP3
0.088	0.072	0.072	0.065	0.067

D_{kr}				
N	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 2\%$	$\alpha = 1\%$
51	0.171	0.190	0.213	0.228

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
  - izbor najbolje raspodele: kontrola osobina raspodela

	originalni niz X	logaritmovani niz $Y = \log X$
broj podataka	51	51
srednja vrednost	4187	3.6147
standardna devijacija	781.3	0.07936
koeficijent varijacije	0.187	0.022
koeficijent asimetrije	0.623	0.196

P3

LP3, možda LN

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
  - izbor najbolje raspodele: saglasnost empirijske i teorijske raspodele

D_{max}				
N	LN	G	P3	LP3
0.088	0.072	0.072	0.065	0.067

najbolje slaganje

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
  - izbor najbolje raspodele: vizuelna provera na papiru verovatnoće