Zadatak 8: Kontinualna slucajna promenljiva

Posmatra se niz maksimalnih mesecnih i godisnjih protoka kao kontinualna slucajna promenljiva.

1. Izracunati osnovne statistike uzorka kontinualne slucajne promenljive: srednju vrednost, standardnu devijaciju, koeficijente varijacije i asimetrije.

2. Sracunati empirijsku raspodelu (kompromisne verovatnoce) za razmatrani niz.

3. Izvrsiti proracun sledecih teorijskih raspodela za razmatrani niz:

   a) normalna,
   b) log-normalna,
   c) Gumbelova, i
   d) Pirson III.

Za svaku teorijsku raspodelu odrediti parametre i izracunati kvantile (vrednosti proticaja) za sledece vrednosti funkcije raspodele: 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99 i 0.999. Napraviti tabelarni pregled kvantila prema svim raspodelama za povratne periode 2, 5, 10, 20, 100 i 1000 godina.

Objasnjenje

Metoda godisnjih maksimuma podrazumeva statisticku analizu maksimalnih godisnjih vrednosti velicine koja se analizira (ovde: proticaja). Maksimalni godisnji proticaji predstavljaju kontinualnu slucajnu promenljivu *X*.

1. Proracun statistika niza godisnjih maksimuma proticaja

srednja vrednost:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

standardna devijacija:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

koeficijent varijacije:

$$Cv_x = \frac{S_x}{\bar{x}}$$

koeficijent asimetrije:

$$Cs_x = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \frac{1}{S_x^3} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^3$$

2. Empirijska raspodela za razmatrani niz

Niz se uredjuje po rastucem redosledu:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_N$$

Proracun kompromisnih verovatnoca kao empirijske raspodele proticaja prema Vejbulovoj formuli:

$$F_{\text{emp}}(x_i) = p_i = \frac{i}{N+1}$$

3. Proracun teorijskih raspodela

Osnovni pojmovi

Funkcija raspodele slucajne promenljive *X* definise se kao verovatnoca da slucajna promenljiva uzme vrednosti manje od *x*:

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

Suprotna verovatnoca, tj. verovatnoca da ce slucajna promenljiva *X* imati vrednost vecu od *x*, naziva se *verovatnocom prevazilazenja*:

$$P(x) = P\{X > x\} = 1 - F(x)$$

Moze se pokazati da se verovatnoca da se slucajna promenljiva *X* nadje unutar intervala izmedju vrednosti ***a*** i ***b*** racuna kao:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$$

Povratni period se definise kao:

$$T(x) = \frac{1}{1 - F(x)}$$

gde je *F*(*x*) funkcija raspodele slucajne promenljive *X*.

Povratni period je broj godina u kome se ocekuje da se vrednost *x* slucajne promenljive *X* ili neka veca javi bar jednom. Na primer, ako je sracunato da proticaju od 50 m^3/s odgovara vrednost funkcije raspodele 0.1, tada je povratni period tog proticaja jednak 10 godina. Drugim recima, ocekuje se da se proticaj od 50 m^3/s ili veci od njega javi bar jednom u 10 godina.

Proracun teorijskih raspodela

Sastoji se od dva koraka:

1) odredjivanja parametara teorijskih raspodela

2) **a.** odredjivanja verovatnoce pojave (funkcije raspodele, verovatnoce prevazilazenja ili povratnog perioda) zadate vrednosti slucajne promenljive (*x* -> *F*(*x*))

b. odredjivanja vrednosti slucajne promenljive za zadatu verovatnocu pojave (funkciju raspodele, verovatnocu prevazilazenja ili povratni period) (*F*(*x*) -> *x*)

Parametri teorijskih raspodela odredjuju se na osnovu statistika niza pomocu izraza u tabeli 1.

Vrednosti slucajne promenljive za zadatu verovatnocu pojave nazivaju se *kvantili*. Postupci proracuna teorijskih raspodela u smeru **a** i smeru **b** prikazani su u tabeli 2.

Tabela 1

Raspodela	**Funkcija raspodele**	**Smena za svodjenje na poznatu raspodelu**	**Parametri**
Standardizovana normalna *N*(0,1)	$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$		$\mu = 0$ $\sigma = 1$
Normalna *N*(μ,σ)	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$	$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}: N(0,1)$	$\mu = \bar{x}$ $\sigma = S$
Log-normalna *LN* (*a*,*b*)	$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{xb\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - a)^2/(2b^2)} dx$	$Y = \ln X: N(a,b)$ $Y = \log X: N(a,b)$	$a = \bar{y}$ $b = S_y$
Standardizovana Gumbelova *G*(0,1)	$G(y) = e^{-e^{-y}}$		
Gumbelova *G*(u,α)	$F(x) = e^{-e^{-(x-u)/\alpha}}$	$Y = \frac{X-u}{\alpha}: G(0,1)$	$u = \bar{x} - 0.4$ $\alpha = 0.78 S_x$
Pirson III *P*3(a,b,c)	$F(x) = \int_{c}^{x} \frac{1}{b\Gamma(a)} \left(\frac{x-c}{b}\right)^{a-1} e^{-(x-c)/b} dx$		$a = \frac{4}{C_{sx}^2}$, $c = \bar{x} - ab$
Log-Pirson III *LP*3 (a,b,c)	$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{xb\Gamma(a)} \left(\frac{\ln x - c}{b}\right)^{a-1} e^{-(\ln x - c)/b} dx$	$Y = \ln X: P3(a,b,c)$ $Y = \log X: P3(a,b,c)$	$a = \frac{4}{C_{sy}^2}$, $c = \bar{y} - ab$

Napomena:

- za standardizovanu normalnu raspodelu *N*(0,1) se koriste tablice
- za Pirson III raspodelu se koriste tablice faktora frekvencije

$$K_p(F, Cs) = \frac{x(F) - \bar{x}}{S_x}$$

u zavisnosti od koeficijenta asimetrije *Cs.*

Tabela 2

Raspodela	Smer	Postupak
Normalna	a	$x \rightarrow z = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB}} F_z(z) = F(x)$
	b	$F(x) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow x = z \cdot S_x + \bar{x}$
Log-normalna	a	$x \rightarrow y = \ln x \rightarrow z = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB}} F_z(z) = F(x)$
	b	$F(x) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow y = z \cdot S_y + \bar{y} \rightarrow x = e^y$
Gumbelova	a	$x \rightarrow y = \frac{x - u}{\alpha} \rightarrow F(x) = G(y) = e^{-e^{-y}}$
	b	$F(x) \rightarrow y = -\ln(-\ln F) \rightarrow x = y \cdot \alpha + u$
Pirson III	a	$x \rightarrow k_p = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} F(x)$
	b	$F(x) \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} k_p \rightarrow x = k_p \cdot S_x + \bar{x}$
Log-Pirson III	a	$x \rightarrow y = \ln x \rightarrow k_p = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sy}} F(x)$
	b	$F(x) \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sy}} k_p \rightarrow y = k_p \cdot S_y + \bar{y} \rightarrow x = e^y$