

VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (VI DEO)

Trostruki integrali

Ako je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna u oblasti V koja je određena sa:

$$V: \begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases} \quad \text{onda je} \quad \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$$

Neki profesori vole drugačiji zapis:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$$

Vi naravno radite kako vaš profesor zahteva.

U suštini, oba zapisa znače da prvo rešavamo integral "po z", onda "po y", i na kraju "po x".

Ovakav poredak u integraciji nije obavezan. Zavisno od konkretne situacije možemo i promeniti poredak

integracije...

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx$$

Ovo bi značilo da prvo radimo "po y", zatim "po z" i na kraju "po x". I tako dalje...

Primer 1.

Izračunati trojni integral: $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$.

Rešenje:

Ovde su nam već date granice i poredak integracije, samo da rešavamo.

Dakle, prvo rešavamo $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = \int_0^1 dx \int_0^2 z \Big|_0^3 dy = \int_0^1 dx \int_0^2 3 dy = 3 \int_0^1 dx \int_0^2 dy = 3 \int_0^1 y \Big|_0^2 dx = 3 \int_0^1 2 dx = 6 \int_0^1 dx = 6 \cdot 1 = 6$$

sad ovo

u onom drugom zapisu bi bilo:

$$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 3 dy \right) dx = \int_0^1 6 dx = 6$$

Primer 2.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$ ako je oblast V zadata sa $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,
 $0 \leq z \leq 1$

Rešenje:

Prvo radimo "po z " i u toj situaciji x i y posmatramo kao konstante.

$$\begin{aligned} \iiint_V (x+y+z) dx dy dz &= \\ \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+z) dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

Sad rešavamo "po y " a x tretiramo kao konstantu.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 (x+1) dx$$

I na kraju rešimo običan integral "po x ":

$$\int_0^1 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Primer 3.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz$ ako je oblast V ograničena sa cilindrom $y = \sqrt{x}$ i ravnima

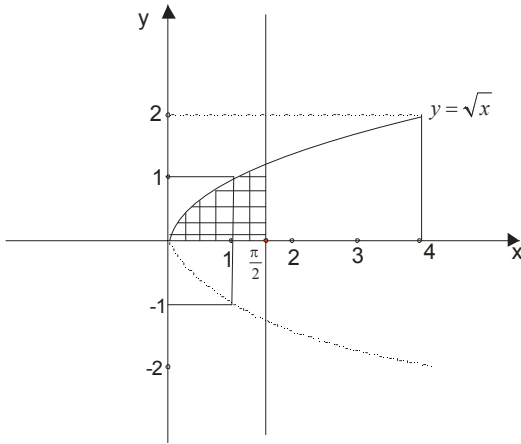
$$y = 0, \quad z = 0 \quad \text{i} \quad x + z = \frac{\pi}{2}.$$

Rešenje:

E ovde nemamo date granice, pa moramo prvo njih da odredimo:

$$x + z = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = \frac{\pi}{2} - x \text{ pa onda } 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} - x$$

Da bi odredili kako se ponašaju x i y , nacrtajmo sliku u ravni $z = 0$



Jasno je da $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, ako pogledamo sliku u ravni $z=0$, onda zaključujemo da $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Sad da se bacimo na rešavanje integrala:

$$\iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx$$

Rešićemo na stranu:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz &= y \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z+x) dz = y \sin(z+x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} = y \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+x\right) - \sin(0+x) \right) \\ &= y \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin(x) \right) = y(1 - \sin x) \end{aligned}$$

Vratimo se :

$$\iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy \right) dx$$

Sad da rešimo:

$$\int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy = (1 - \sin x) \int_0^{\sqrt{x}} y dy = (1 - \sin x) \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} = (1 - \sin x) \frac{x}{2}$$

Opet se vratimo gore i imamo:

$$\begin{aligned} \iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x \sin x) dx \end{aligned}$$

Ovo je već običan integral koga rastavimo na dva, jedan je odmah tablični a drugi ($x \sin x$) rešimo parcijalnom integracijom i dobijamo:

$$\iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x \sin x) dx = \boxed{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}}$$

Primer 4.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ako je oblast V zadata sa $x^2 + y^2 = z^2$ i $z = 1$.

Rešenje:

Nadjimo presek konusa i ravni koji će nam dati granice:

$$x^2 + y^2 = z^2 \wedge z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ovde je zgodno koristiti :

CILINDRIČNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r$$

$$\text{onda je } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^r r dr \int_{z_1}^{z_2} f dz$$

Da vas ne zbuni, neki profesori ne uzimaju $z=z$, već stave :
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases} \rightarrow |J| = r$$
 , ali to suštinski ništa ne menja stvari...

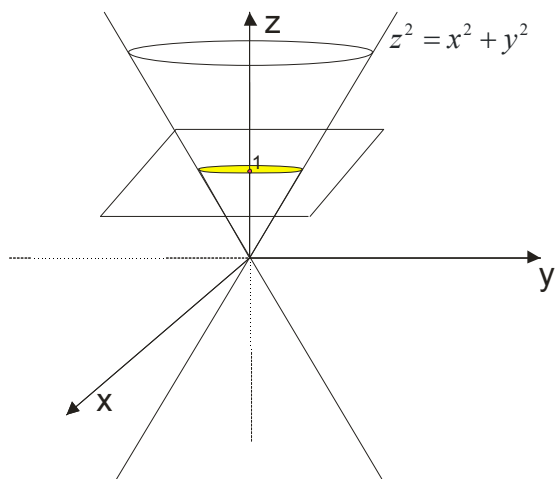
Dakle:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow |J| = r \text{ pa je } \begin{aligned} & x^2 + y^2 = 1 \\ & (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 1 \\ & r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 \\ & r^2 = 1 \rightarrow r = 1 \end{aligned} \quad \text{i} \quad 0 \leq r \leq 1 .$$

Ugao uzima vrednosti $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Još da odredimo granice za z :

Pogledajmo sliku u prostoru:



Odozgo je ravan a odozdo konus, pa je $r \leq z \leq 1$ jer je $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = ?$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r \cdot r dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \left(\int_r^1 dz \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 (1-r) dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 - r^3) dr \right) d\varphi = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \boxed{\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Primer 5.

Izračunati trojni integral: $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ ako je oblast V zadana sa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Rešenje:

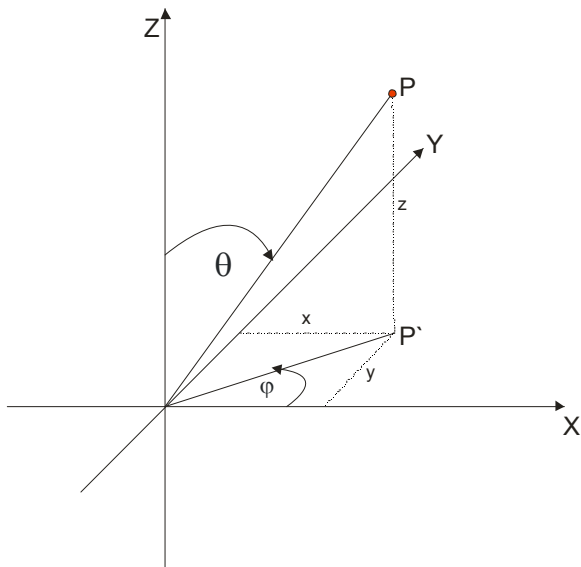
Ovde je zgodno koristiti:

SFERNE KOORDINATE

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \\ |J| = r^2 \sin \theta \end{cases} \quad \text{Oдавde je } x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Uglove φ i θ određujemo iz zadatka i vodimo računa da je najčešće :

$$r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$$



Znači: φ je ugao u ravni $z=0$ a θ je ugao u prostoru...

Možemo koristiti(u zavisnosti od situacije) i modifikovane sferne koordinate (generalisane):

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \sin \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases} \quad \text{a oдавde je } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \quad \text{i} \quad |J| = abcr^2 \sin \theta$$

U našem zadatku ćemo koristiti ove malo modifikovane sferne koordinate, jer se radi o elipsoidu!

Dakle:

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \sin \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases} \quad \text{a odavde je } |J| = abcr^2 \sin \theta$$

Zašto je baš $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$. Da dokažemo ovo:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = ar \cos \varphi \sin \theta \\ y = br \sin \varphi \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{zamenimo u } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \end{array} \right. \\ & \frac{(ar \cos \varphi \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(br \sin \varphi \sin \theta)^2}{b^2} + \frac{(cr \cos \theta)^2}{c^2} = \\ & \frac{\cancel{a^2} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^2} r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{c^2} r^2 \cos^2 \theta}{\cancel{c^2}} = \\ & r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = \\ & r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = \\ & r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2 \end{aligned}$$

Rekli smo da je $0 \leq r$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$ pa imamo samo korekciju: $0 \leq r \leq 1$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\text{jer } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow r = 1$$

Sad možemo rešiti integral:

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz = abc \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin \theta r^2 dr = abc \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr$$

$$\text{Sad ovo nije teško izračunati : dobijamo } \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz = \boxed{\frac{4\pi}{5} abc}$$

Izračunavanje zapremine pomoću trostrukog integrala

Zapreminu računamo po formuli $V = \iiint_V dx dy dz$ po oblasti V

Primer 1.

Naći zapreminu tela ograničenu površima: $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$ i $y = x^2$.

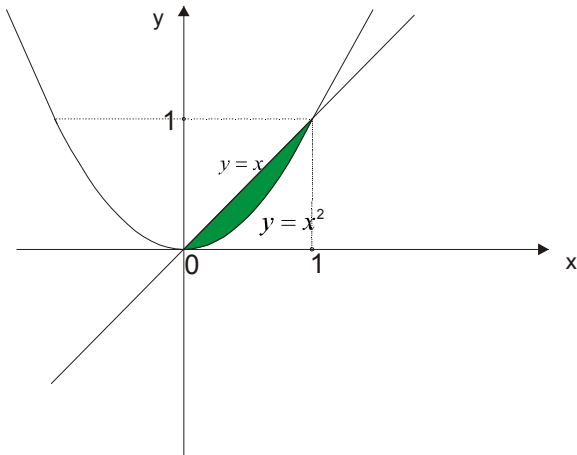
Rešenje:

Ovo telo je dakle ograničeno sa dva paraboloida $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, sa ravni $y = x$ i sa cilindrom $y = x^2$.

Koristićemo formulu $V = \iiint_V dx dy dz$

Da odredimo granice:

Jasno je da je $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2$ a za x i y pogledajmo sliku:



$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x$$

Da nadjemo sada zapreminu:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \left[2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2) \right] dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{6} \right) dx \end{aligned}$$

$$\boxed{V = \frac{3}{35}}$$

Primer 2.

Naći zapreminu tela ograničenu paraboloidom $6 - z = x^2 + y^2$ i konusom $z^2 = x^2 + y^2$

Rešenje:

Nadjimo presek:

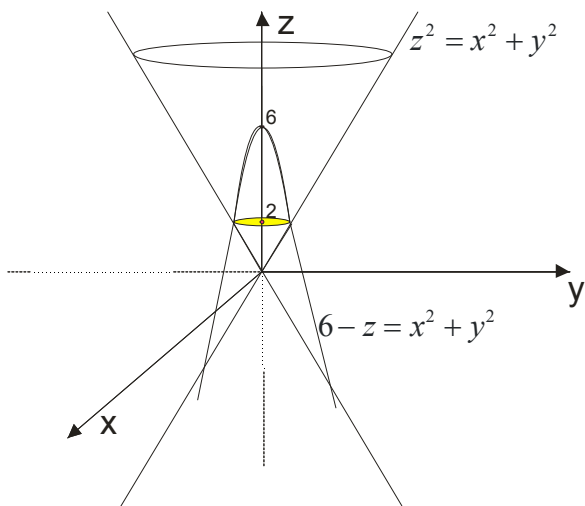
$$z^2 = x^2 + y^2 \wedge 6 - z = x^2 + y^2$$

$$z^2 = 6 - z$$

$$z^2 + z - 6 = 0$$

$$\boxed{z_1 = 2}$$

$$z_2 = -3$$



Zgodno je uzeti cilindrične koordinate:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \rightarrow |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

Imamo:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

$$\boxed{0 \leq r \leq 2}$$

Ugao ide $\boxed{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$

Za paraboloid je $6 - z = x^2 + y^2 \rightarrow 6 - z = r^2 \rightarrow z = 6 - r^2$, a za konus $z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z^2 = r^2 \rightarrow z = r$,
zaključujemo da su granice po z : $\boxed{r \leq z \leq 6 - r^2}$

Sad možemo računati zapreminu:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{4-r^2} dz$$

Ovde nema nikakvih problema, rešava se sve lako...

Rešenje je :
$$V = \frac{32\pi}{3}$$

Primer 3.

Izračunati zapreminu tela koje ograničava površ $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$

Rešenje:

E ovo je ona zeznuta situacija kad moramo koristiti:

$$\begin{cases} x = ar \cos^\beta \varphi \sin^\alpha \theta \\ y = br \sin^\beta \varphi \sin^\alpha \theta \\ z = cr \cos^\alpha \theta \end{cases}$$

Jakobijan u ovoj situaciji računamo:

$$|J| = abcr^2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi$$

Osnovna perioda je $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$

Uzećemo:

$$x = ar \cos^4 \varphi \sin^4 \theta$$

$$y = br \sin^4 \varphi \sin^4 \theta$$

$$z = cr \cos^4 \theta$$

Jakobijan će biti:

$$|J| = abcr^2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin^{2 \cdot 4 - 1} \theta \cos^{4-1} \theta \sin^{4-1} \varphi \cos^{4-1} \varphi$$

$$|J| = 16abcr^2 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi$$

Što su baš ove smene dobre?

$$x = ar \cos^4 \varphi \sin^4 \theta; y = br \sin^4 \varphi \sin^4 \theta; z = cr \cos^4 \theta \quad \text{zamenimo u } \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{ar \cos^4 \varphi \sin^4 \theta}{a}} + \sqrt{\frac{br \sin^4 \varphi \sin^4 \theta}{b}} + \sqrt{\frac{cr \cos^4 \theta}{c}} = 1$$

$$\sqrt{r} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sqrt{r} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sqrt{r} \cos^2 \theta = 1$$

$$\sqrt{r} \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sqrt{r} \cos^2 \theta = 1$$

$$\sqrt{r} \sin^2 \theta + \sqrt{r} \cos^2 \theta = 1$$

$$\sqrt{r} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1$$

$$\sqrt{r} = 1 \rightarrow r = 1 \rightarrow \boxed{0 \leq r \leq 1}$$

Ovde je u suštini najveći problem naći granice za uglove...

Osnovna perioda ovde je $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi$, ali nam ona samo govori u kojim granicama moraju biti uglovi...

Ovde mora da važi da je :

$x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$, Znači da se uglovi moraju nalaziti u prvom kvadrantu, to jest:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Sada možemo preći na rešavanje integrala, to jest izračunavanje zapremine:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 16abc r^2 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi dr =$$

premestimo konstante skroz ispred, a raspodelimo ko kojem integralu pripada...

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 16abc r^2 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi dr = \\ &= 16abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \end{aligned}$$

Znači, ovde trebamo rešiti tri posebna integrala, jer granice ne ulaze u drugi integral...

$$\int \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = ?$$

Moramo da iskoristimo znanja iz trigonometrije...

$$\cos^3 \varphi = \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi = (1 - \sin^2 \varphi) \cdot \cos \varphi = \cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

$$\int \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \int \sin^3 \varphi (\cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi =$$

$$\int (\sin^3 \varphi \cos \varphi - \sin^5 \varphi \cos \varphi) d\varphi =$$

Sad ovo rastavimo na dva integrala i u oba uzimamo smenu $\sin \varphi = t \rightarrow \cos \varphi d\varphi = dt$

Na sličan način rešavamo i integral po θ .

Konačno rešenje će biti: $V = \frac{abc}{90}$

www.matematiranje.com