Функције више променљивих

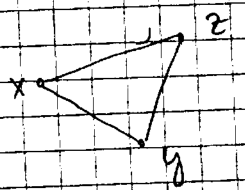
$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

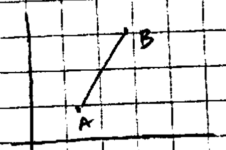
Растојање

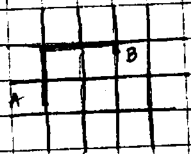
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\in N)(n\geq n_0 \Rightarrow \underbrace{|a_n-a|}_{\text{растојање између } a_n \text{ и } a} < \varepsilon)$$

<u>Деф.</u> Растојање (метрика) на скупу X је свако пресликавање $d: X\times X \to \mathbb{R}$ које има следеће особине:

1) $(\forall x,y\in X)\ d(x,y)\geq 0$; $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $(\forall x,y\in X)\ d(x,y)=d(y,x)$
3) $(\forall x,y,z\in X)\ d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$ (неједнакост троугла)







<u>Пример</u> $X=\mathbb{R}^2$ (скуп уређених парова) раван

$A(a_1,a_2)\quad B(b_1,b_2)$

$d(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

<u>Пример</u> $X=\mathbb{R}^n$

$A=(a_1 \dots a_n)$

$B=(b_1 \dots b_n)$

$$d(A,B)\overset{def}{=}\sqrt{(a_1-b_1)^2+\dots+(a_n-b_n)^2}$$

<u>Пример</u> $X=$ скуп свих непрекидних ф-ја на $[a,b]$

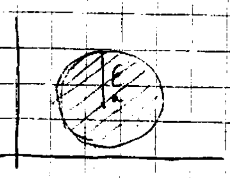
$f,g\in X$

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

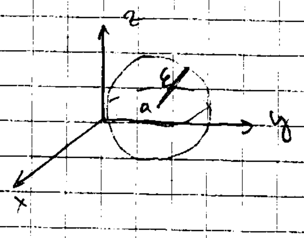
X - скуп са растојањем d (метрички простор) $U(a,\varepsilon)$ - ε околина тачке a

Деф. ε околина тачке $a \in X$ $(\varepsilon > 0)$ је скуп $\{x \in X : d(x,a) < \varepsilon$

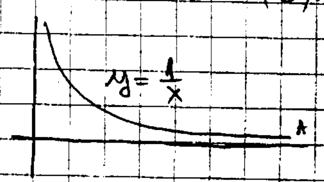
пример $X = \mathbb{R}^2$



пример $X = \mathbb{R}^3$



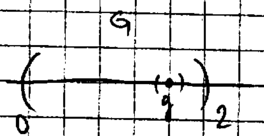
Деф. Скуп $A \subset X$ је ограничен акко $\exists$ ε околина $U(x_0, \varepsilon)$ таква да је $A \subset U(x_0, \varepsilon)$.



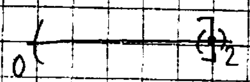
није ограничен

Деф. Скуп $G \subset X$ је отворен акко за $\forall$ $g \in G$ $\exists$ $\varepsilon > 0$ такво да је $U(g,\varepsilon) \subset G$.

пример $X = \mathbb{R}$

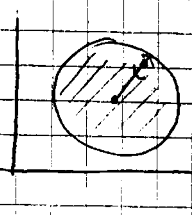


G је отворен



није отворен скуп

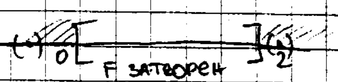
пример



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2$$

Деф. Скуп $F \subset X$ је затворен акко је скуп $X \setminus F$ отворен.

$X = \mathbb{R}$



$[0, +\infty)$ затворен скуп

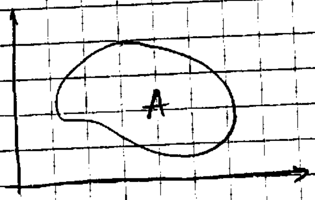
деф $x \in X$ је тачка нагомилавања скупа $S \subset X$ акко

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists s \in S\setminus\{x\})\ \underbrace{d(s,x)<\varepsilon}_{s \in U(x,\varepsilon)}$$

деф Ако је $A \subset X$, онда је $\bar{A}$ ознака за унију скупа A и свих тачака нагомилавања скупа A.

пример $X=\mathbb{R}$ $\quad A=(0,2)$

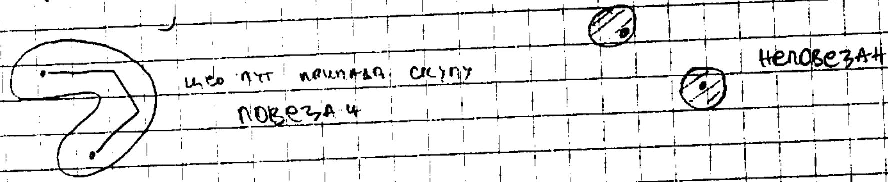
$\bar{A}=[0,2]$



(T) $\bar{A}$ је затворен скуп

деф Граница скупа A је скуп $\bar{A} \cap \overline{(X\setminus A)}$

деф Скуп A је област акко је A отворен и повезан скуп.



Лимес низа

X, d

деф Низ тачака скупа X је пресликавање скупа природних бројева у скуп X.

$$f: \mathbb{N} \to X \qquad x_n = f(x) \qquad (x_n)$$

деф. Низ (y_n) је подниз низа x_n акко $\exists$ строго растући низ (k_n) природних бројева такав да је $y_n = x_{k_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

деф. $a \in X$ је лимес низа тачака (x_n) из X акко

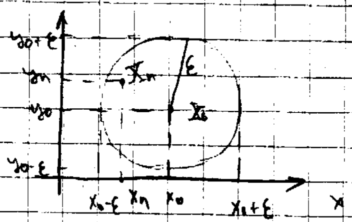
$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{d(x_n,a)<\varepsilon}_{x_n \in U(a,\varepsilon)})$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

деф Низ (x_n) тачака из X је конвергентан **акко** $(\exists\, a \in X)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

пример $X = \mathbb{R}^2$

$X_n(x_n, y_n) \longrightarrow X(x_0, y_0)$



$x_n \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),\ n \geq n_0$

$y_n \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon),\ n \geq n_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

$$d(X_n, X_0) = \sqrt{\underbrace{(x_n-x_0)^2}_{0} + \underbrace{(y_n-y_0)^2}_{0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ⓣ $X_n(x_n, y_n) \longrightarrow X_0(x_0, y_0) \iff \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}$

аналогно у $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^m$

пример $X = (0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$

$x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin X$

деф Скуп $K \subset X$ је компактан **акко**:

1) K је затворен

2) $\forall$ низ тачака из K има конвергентан подниз

пример $[a, b]$ компактан

Ⓣ $K \subset \mathbb{R}^m$ је компактан акко је он затворен и ограничен

Ⓣ Скуп F је затворен акко за $\forall$ конвергентан низ (x_n) тачака из F важи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$

Ⓣ a је тачка нагомилавања скупа S акко $\exists x_n \in S \setminus \{a\}$ такви да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Лимес функције

$X, d_X \qquad f: X \to Y$

Y, d_Y

Деф. Нека је a тачка нагомилавања скупа X. $A \in Y$ је лимес пресликавања f кад x тежи a акко за $\forall$ низ $x_n \in X \setminus \{a\}$ из

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{следи} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \qquad (\text{Хајне})$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Деф. (Коши) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in X)\big(0< d_X(x,a)<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),A)<\varepsilon\big)$

Деф. f је непрекидна у a акко је $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

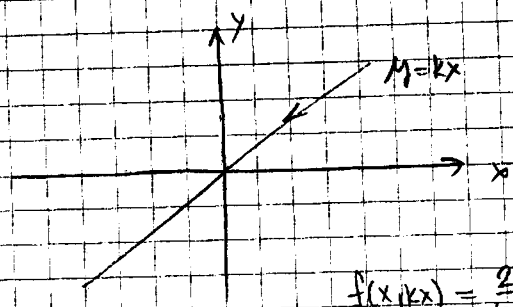
Пример $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \quad ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{y\to 0}\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0} f(x,y)}_{0}\Big) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = 0$$



$$f(x,kx) = \frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2k}{1+k^2}$$

$$\neg\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Ⅱ

Деф. Реална функција n реалних променљивих (кр: ф-ја n променљивих) је пресликавање $f: D \to \mathbb{R}$ где је $D \subset \mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2 \dots x_n) \quad y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

Деф. f је непрекидна на скупу $S \subset D$ акко је f непрекидна у $\forall$ тачки скупа S.

(затворен и ограничен)

Ⓣ Нека је $K \subset \mathbb{R}^n$ компактан скуп и f непрекидна на K, онда је f ограничена на K (тј. скуп $\{f(M) : M \in K\}$ је ограничен) и $\exists A, B \in K$ такве да је $f(A) = \inf\{f(M) : M \in K\}$ $(= \min\{f(M) : M \in K\})$

$f(B) = \sup\{f(M) : M \in K\}$ $(= \max\{f(M) : M \in K\})$

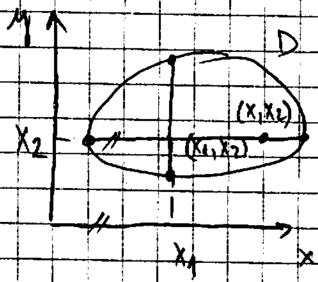
делимични

Парцијални изводи

$f: D \to \mathbb{R}, \ D \in \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots x_n) \in D$

$(x_1, x_2) \in D$



$g_1(x) = f(x, x_2)$

$g_1'(x_1)$ = парцијални извод f по x_1 у тачки (x_1, x_2)

$g_2(x) = f(x_1, x)$

Деф Нека је $M_0(x_1, \dots x_n) \in D$ тачка нагомилавања скупа D. Ако $\exists$ (коначан) лимес $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1, x_2, \dots x_i + h, \dots x_n) - f(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n)}{h}$ онда

овај лимес зовемо парцијални извод ф-је f по променљивој x_i у тачки M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = f'_{x_i}(M_0) = f_{x_i}(M_0)$$

$$g(x) = f(x_1, x_2, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-то место}}}{x}, \dots x_n)$$

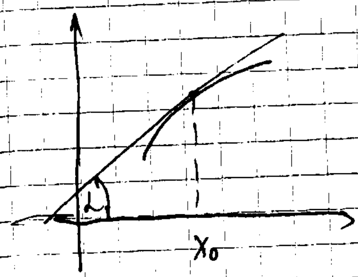
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = g_i'(x_i)$$

$z = f(x,y)$

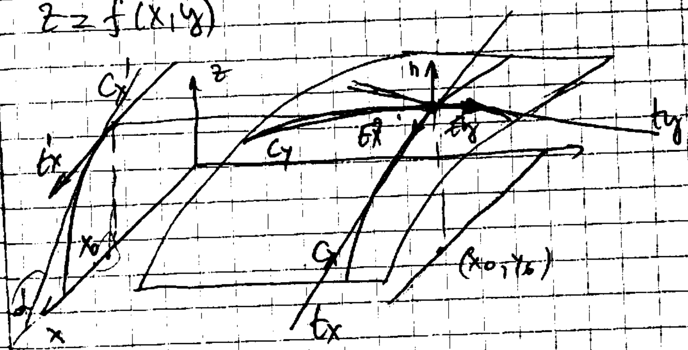
$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x = p$

$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y = q$

$y = f(x)$ $\qquad f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$



$z = f(x,y)$



$g_1(x) = f(x, y_0)$

$y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = g_1'(x_0) = \operatorname{tg}(\alpha)$

$g_2(y) = f(x_0, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\gamma$

$\vec{n} \perp t_x$, $\vec{n} \perp t_y$ – НОРМАЛА ПОВРШИ $z = f(x,y)$ У ТАЧКИ $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

t_x: $\underbrace{z - f(x_0,y_0)}_{z_0} = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}^{p}(x - x_0) \quad / : p$

t_x: $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$

$\vec{t_x} = (1, 0, p) \qquad \vec{t_y} = (1, 0, q)$

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 1 & 0 & q \end{vmatrix} = (-p, -q, 1) \qquad \boxed{\vec{n} = (-p, -q, 1)}$

ТАНГ. РАВАН: $-p(x - x_0) - q(y - y_0) + z - \underset{\underset{f(x_0,y_0)}{\parallel}}{z_0} = 0$

Пример $\exists \frac{\partial f}{\partial x_2} \not\Rightarrow f$ непрекидна

$$f(x,y) \begin{cases} 1, & x=0 \text{ или } y=0 \\ 0 & \text{у осталим случајевима} \end{cases}$$

$(0,0)$ прекид у $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0)}^{1} - \overbrace{f(0,0)}^{1}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Деф $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ ако $\exists$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i, \partial x_j}\right), \text{ "} -$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j} = f_{x_i x_j}$$

$z = f(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = z_{xx} = r$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = z_{xy} = s$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = z_{yx} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = z_{yy} = t$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $i \neq j$

МЕШОВИТ ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОД

пример $z = xe^y + \ln(xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + \frac{1}{xy} \cdot y = e^y + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^y + \frac{1}{xy} \cdot x = xe^y + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y + \frac{1}{x}\right) = e^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y + \frac{1}{y}\right) = e^y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Т (Шварц)

Нека су мешовити парцијални изводи $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ дефинисани на отвореном скупу $G \subset \mathbb{R}^n$. Ако су они непрекидни у тачки $X_0 \in G$ онда је:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0)$$

Диференцијабилност функције више променљивих

$X_0(a_1, a_2 \ldots a_n)$

$H(h_1, h_2 \ldots h_n)$

$X_0 + H = (a_1+h_1, a_2+h_2 \ldots a_n+h_n)$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

ТОТАЛНИ ПРИРАШТАЈ ф-је f у тачки X_0 за прираштај променљивих H.

$$\Delta f(X_0; H) = f(X_0+H) - f(X_0) = f(a_1+h_1 + a_2+h_2 + \ldots + a_n+h_n) - f(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Деф. Нека је $X_0 \in D$ тачка нагомилавања скупа D, ф-ја f је диференцијабилна тачки X_0 акко $\exists$ бројеви $A_1, A_2 \ldots A_n$ и ф-је $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ (n) променљивих такви да $\forall H \in \mathbb{R}^n$ за које је $X_0 + H \in D$ важи:

$$\Delta f(X; H) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n + \varepsilon_1(H) h_1 + \varepsilon_2(H) \cdot h_2 + \ldots + \varepsilon_n(H) h_n \qquad (h_1, h_2 \ldots h_n)$$

и $\lim\limits_{H \to (0,0 \ldots 0)} \varepsilon_i(H) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$

Деф. Израз $A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n$ је тотални диференцијал ф-је f у тачки X_0. ознака: $df(X_0; H) = df(X_0) = df$

$$df = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n$$

(Т) Ако је f диференцијабилна у X_0 онда је она и непрекидна у X_0.

Доказ $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$

$$X(x_1, x_2 \ldots x_n); \; X_0(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

$$h_i = x_i - a_i$$

$$H(h_1, h_2 \ldots h_n)$$

$$f(X) - f(X_0) = f(X_0 + H) - f(X_0) = \underbrace{A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon_1(H)}_{\to 0} h_1 + \ldots + \underbrace{\varepsilon_n(H) h_n}_{\to 0}$$

$$H \to (0,0 \ldots 0)$$

(Т) Ако је f дифер. у X_0 онда $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ и $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ за $i = 1, 2 \ldots n$.

Доказ $H(h, 0, 0 \ldots 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(a_1 + h, a_2 \ldots a_n) - f(a_1, \ldots a_n)}^{\Delta f(X_0; H)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{A_1 h + A_2 \cdot 0 + \ldots + A_n \cdot 0 + \varepsilon_1(H) \cdot h + \varepsilon_2(H) \cdot 0 + \ldots + \varepsilon_n(H) \cdot 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (A_1 + \varepsilon_1(H)) = A_1$$

Пример $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \not\Rightarrow f$ дифер

$$f(x,y)\begin{cases}1, & x=0 \vee y=0\\ 0, & \text{у осталим случајевима}\end{cases}$$

f прекидна у $(0,0) \Rightarrow$ није диференцијабилна у $(0,0)$

$\exists$ парцијални извод у $(0,0)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$$

$$h_i = dx_i$$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n}$$

Т Ако су f и g дифер. онда је:

1) $d(f \pm g) = df \pm dg$

2) $d(c \cdot f) = c \cdot df$, $c = \text{const}$

диференцијал другог реда

Деф $d^2 f \overset{\text{def}}{=} d(df)$, ако $\exists$

$d^3 f \overset{\text{def}}{=} d(d^2 f)$, ако $\exists$

$\vdots$

пример $z = f(x,y)$ парцијални изводи свих редова непрекидни

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$d^2 z = d(dz) = d(z_x dx + z_y dy) = d(z_x \underset{h-\text{const}}{dx}) + d(z_y \underset{k-\text{const}}{dy}) =$$

$$= dx \cdot d(z_x) + dy \cdot d(z_y)$$

$$= dx\left((z_x)_x \cdot dx + (z_x)_y dy\right) + dy\left((z_y)_x dx + (z_y)_y dy\right)$$

$$= z_{xx}(dx)^2 + z_{xy}dxdy + z_{yx}dxdy + z_{yy}(dy)^2$$

$$= z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

$$d^3z = d(d^2z) = d(z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}\,dx\,dy + z_{yy}dy^2)$$
$$= dx^2\cdot d(z_{xx}) + 2dxdy\cdot d(z_{xy}) + dy^2\cdot d(z_{yy})$$
$$= dx^2\big((z_{xx})_x dx + (z_{xx})_y dy\big) + 2dxdy\big((z_{xy})_x dx + (z_{xy})_y dy\big) +$$
$$+ dy^2\big((z_{yy})_x dx + (z_{yy})_y dy\big) =$$
$$= z_{xxx}dx^3 + z_{xxy}dx^2dy + 2z_{xyx}\,dx^2dy + 2z_{xyy}\,dx\,dy^2 + z_{yyx}dxdy^2$$
$$+ z_{yyy}\,dy^3$$
$$= z_{xxx}dx^3 + 3z_{xxy}dx^2dy + 3z_{xyy}dxdy^2 + z_{yyy}dy^3$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cdot dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cdot dy^3$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z$$

$$\boxed{d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z}\ ,\ k\in\mathbb{N}$$

$$u = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$
$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k u$$

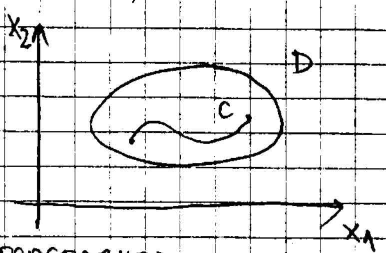
Изводи сложених функција

$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$

$u = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

1) $x_i = x_i(t)$; $i = 1, 2 \dots n$

$n=2$



$$C\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t)\end{cases}$$

претпоставке:

$$(x_1(t) \dots x_n(t)) \in D\ ,\ t\in I$$

ф-је x_i - диференцијабилне у неком фикс. t

ф-ја диференцијабилна у тачки $(x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$u = f(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \equiv F(t)$$

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1(t)+h, \dots x_n(t)+h) - f(x_1(t), \dots x_n(t))}{h}$$

$$h_i = x_i(t+h) - x_i(t)$$

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h_i$$

$$\frac{du}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f x_1(t)+h_1, \dots + f x_n(t)+h_n - f(x_1(t) \dots f(x_n(t))}{h}$$

диффер. f

$$= \lim_{h\to 0} \frac{A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + \varepsilon_1(H) h_1 + \dots + \varepsilon_n(H) h_n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \Big(A_1 \underbrace{\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}}_{\frac{dx_1(t)}{dt}} + \dots + A_n \underbrace{\frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h}}_{\frac{dx_n(t)}{dt}} \Big) + \varepsilon_1(H) \underbrace{\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}}_{\frac{dx_1}{dt}} + \dots + \underbrace{\varepsilon_n(H)}_{0} \underbrace{\frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h}}_{\frac{dx_n}{dt}}$$

$$h \to 0 \Rightarrow h_i \to 0 \Rightarrow H = (h_1, \dots, h_n) \to (0, \dots 0)$$

$$= A_1 \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + A_n \frac{dx_n}{dt}(t)$$

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t) \dots x_n(t))$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt}(t)$$

$y = y(x)$, $x = x(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

$$\frac{df}{dt}$$

$u = f(x_1 \dots x_n)$

$x_i = x_i(t_1, \dots, t_k),\ i = 1 \dots n$

$f : D \to \mathbb{R},\ D \in \mathbb{R}^n$

$(t_1 \dots t_k) \in I$

$\underbrace{(x_1(t_1 \dots t_k) \dots x_n(t_1 \dots t_k))}_{} \in D,\ \forall (t_1 \dots t_k) \in I$

претпоставка:

x_i – дифер. у фиксираној тачки $(t_1 \dots t_k)$

f – дифер. у

све остало ~~константа~~

$u = f(x_1(t_1 \dots t_k) \dots x_n(t_1 \dots t_k)) = F(t_1, \dots t_k)$ ← мешино као $G(t_i)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial t}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_i \partial t_j}}_{} + \dots +$$

ф-ја n променљивих

x_i – ф-ја n пром.

$$+ \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \frac{\partial x_n}{\partial t_i} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial^2 x_n}{\partial t_i \partial t_j}}_{}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x_n}{\partial t_j}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t_i} +$$

$$+ \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \frac{\partial x_n}{\partial t_j}\right) \frac{\partial x_n}{\partial t_i} +$$

$$+ \frac{\partial t}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_i \partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial^2 x_n}{\partial t_i \cdot \partial t_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} + \dots +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \frac{\partial x_n}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_i \cdot \partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial t_i \partial t_j}$$

ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Лагранжев остатак

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$y = f(x)$

$d^k f = f^{(k)} \cdot (dx)^k = f^k(x_0)(x-x_0)^k$

$h \to$ прираштај променљиве

$h = x - x_0$

Шлеч

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,h) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,h) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c,h)$$

Деф. Ф-ја је n пута диференцијабилна <u>ако</u> су сви њени парцијални изводи, закључно са парц. изводима реда $n-1$, диференцијабилне ф-је

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^p$$

(Т) Нека је ф-ја f $n+1$ пут диференцијабилна у некој $\in$ околини тачке $X_0(a_1 \dots a_p)$.

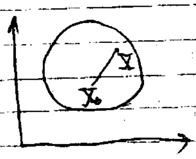
Тада за $\forall X(x_1, \dots x_n) \in U$ постоји тачка X_θ на дужи X_0X, таква да је

$$f(X) = f(X_0) + \frac{1}{1!}d(f(X_0;H) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(X_0;H) + \frac{1}{n+1!}d^{n+1}f(X_\theta;H),$$

где је $H = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_p - a_p)$

$(X_\theta = (a_1 + \theta(x_1 - a_1), \dots, a_p + \theta(x_p - a_p));\ 0 < \theta < 1$

-ДОКАЗ



$X_t = (a_1 + t(x_1 - a_1) \dots a_p + t(x_p - a_p)),\ X_0,\ X_1 = X$

$F(t) = f(X_t);\ t \in [0,1]$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_t)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(X_t)\cdot(x_p - a_p) = df(X_t;H)$$

$F''(t) = d^2 f(X;H)$

$F^{n+1}(t) = d^{n+1}f(X_t,H)$

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0)t + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{n+1}(\theta t)t^{n+1}$$

$t \in [0,1]$

$t=1, \quad 0<\theta<1$

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\dots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)$$

$$f(X) = F(1), \quad f(X_0) = F(0), \quad df(X_0,H) = F'(0), \quad d^n f(X_0,H) = F^{(n)}(0), \quad d^{n+1}f(X_\theta; H) = F^{(n+1)}(\theta)$$

$$0<\theta<1 \Rightarrow X_\theta \in \overline{X_0X}$$

$z=f(x,y)$

$X_0\,(x_0,y_0)$

$X\,(x,y)$

$$d^k z=\Big(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{dx}_{x-x_0}+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{dy}_{y-y_0}\Big)^k z$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\Big)^1 f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\Big)^2 f(x_0,y_0)+\dots+\frac{1}{n!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\Big)^n f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\Big)^{n+1} f(x_\theta,y_\theta)$$

→ лагранжев остатък

$$x_\theta=x_0+\theta(x-x_0)$$
$$y_\theta=y_0+\theta(y-y_0)$$
$$0<\theta<1$$

$X=(0,0\dots0)\to$ Маклорен

<u>пример</u> $f(x,y)=e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy} \qquad df(0,0)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2e^{xy} \Rightarrow d^2(0,0)=2xy$$

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+\frac{e^{\theta t}}{(n+1)!}t^{n+1}$$

$t=xy$

Локални екстремуми

ф-је више променљивих

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$

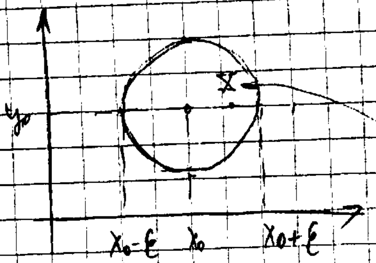
деф. Тачка $X_0 \in D$ је тачка локалног максимума (односно лок. минимума) ф-је f акко $\exists$ ε околина U тачке X_0 таква да је $f(X) \le f(X_0)$ (односно $f(X) \ge f(X_0)$) за $\forall X \in U \cap D$.

лок екстремум = лок макс или лок. мин

Т Нека је f непрекидна у некој ε околини тачке X_0 локалног екстремума, а $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ $i = 1, 2 \dots n$, онда је $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0$ за $\forall i = 1, 2 \dots n$

доказ $n = 2$ $X_0(x_0, y_0) \leftarrow$ лок. макс loc max

$g(x) = f(x, y_0)$



g дефинисана на $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

g непрекидна на $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0) = g'(x_0)$

$f(X_0) = g(x_0)$

$f(X) = g(x)$

$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow X(x, y_0) \in U$

$\Rightarrow \underbrace{f(X)}_{g(x)} \le \underbrace{f(X_0)}_{g(x_0)}$

$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow g(x) \le g(x_0)$

$\rightarrow$ у x_0 је loc max g

$\Downarrow$

$g'(x_0) = 0$

$\parallel$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)$

Деф X_0 је стационарна тачка ф-је f акко је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)=0, \quad \text{за } i=1,2\ldots n$$

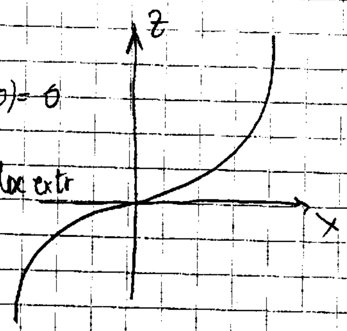
пример X_0 = стац. $\not\Rightarrow$ у X_0 loc ext

$f(x,y)=x^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$(0,0)$ стац. тачка није loc extr

$z=x^3$



Ⓣ Нека је X_0 стац. тачка функције f и нека су парцијални изводи првог и другог реда ф-је f непрекидни у некој ε-околини тачке X_0. Тада:

1) ако је $d^2f(X_0;H)>0$
за $\forall H\neq(0,0,\ldots 0)$
онда је у X_0 loc min ф-је f

2) ако је $d^2f(X_0;H)<0$
за $\forall H\neq(0,0,\ldots 0)$, онда је
у X_0 loc max ф-је f

3) ако $\exists H', H''$ такви да је $d^2f(X_0;H')>0$ и
$d^2f(X_0;H^2)<0$, онда у X_0 није loc extr

$z=f(x,y)$ $\qquad (dx,dy)\neq(0,0)$

$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2$

$dx\neq0 \quad d^2z=\overset{\neq 0}{dx^2}\left(r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$

$4s^2-4rt<0$

$\boxed{rt-s^2>0} \Rightarrow d^2z$ const знака (увек или поз или нег)

18

(Т) Нека је $rt - s^2 > 0$

(сви изводи се рачунају у стационарној тачки)

1) $r > 0$ или $t > 0 \Rightarrow$ loc min

2) $r < 0$ или $t < 0 \Rightarrow$ loc max

Пример $z = x^2 + y^2$

$(0,0)$ - стац. тачка

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

$r = 2, \; s = 0, \; t = 2 \qquad d^2 z = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$

(Т) Ако је f непрекидна на огр. затвореном скупу K онда она достиже max и min у тачкама које припадају скупу састављеном од:

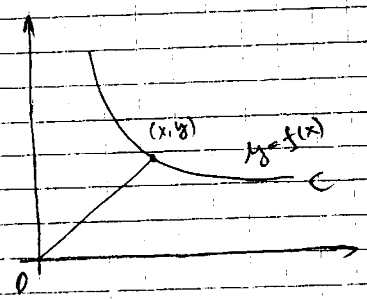
1) тачака границе скупа K

2) стац. тачака које су унутар скупа K

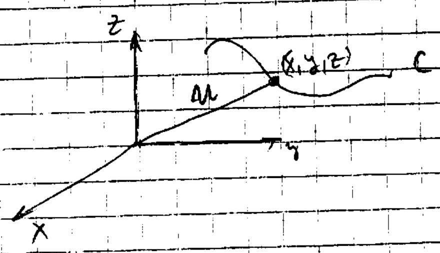
3) тачака унутар K у којима не $\exists$ бар један од парцијалних извода првог реда

Условни екстремуми

(везани екстремуми)



$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y = f(x)$



$C \begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$u = f(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad f: D \to \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^n$

$(1) \begin{cases} \varphi_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1 \ldots x_n) = 0 \end{cases}$

$S = \{(x_1, \ldots x_n) : \text{испуњен услов } (1)\}$

Деф Тачка X_0 је тачка условног лок. максимума (односно условног лок. мин) функције f уз услове (1) акко $\exists\, \varepsilon$ околина U тачке X_0 таква да је $f(X) \leq f(X_0)$ (одн. $f(X) \geq f(X_0)$) за $\forall X \in D \cap U \cap S$

1. $u = f(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

$u = f(x_1 \dots x_m, \alpha_{m+1}(x_1 \dots x_m), \dots, \alpha_n(x_1 \dots x_m))$

обични loc ext

$(x_1, \dots, x_m) \in ?$

$m < n$

$$x_{m+1} = \alpha_{m+1}(x_1 \dots x_m)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha_n(x_1 \dots x_m)$$

2. Лагранжов метод

$F_1(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(x_1, \dots x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1 \dots x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1 \dots x_n)$

$n+m$ — променљивих

- тражимо loc extr F

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \ (\Leftrightarrow \varphi_1 = 0) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0 \ (\Leftrightarrow \varphi_m = 0) \end{cases}$$

стац. тачка: $(x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)} \dots \lambda_n^{(0)})$

знак d^2F

$$\begin{cases} d\varphi_1(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0 \\ \\ d\varphi_k(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) = 0 \end{cases}$$

систем лин. јед. по $dx_1, \dots, dx_n$

изразимо $dx_{m+1} + \dots + dx_n$ преко $dx_1 \dots$

то заменимо у d^2F

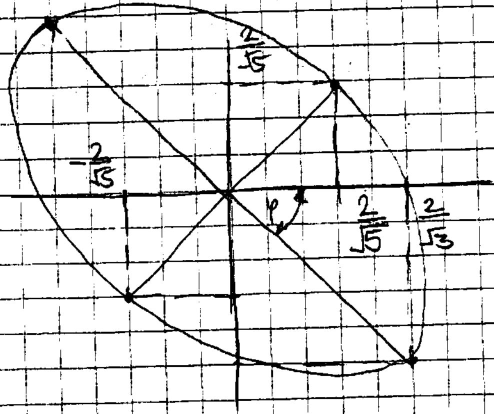
и сада знак d^2F

$d^2F > 0$ — условни лок. мин

$d^2F < 0$ — условни лок. макс

20

пример $z = x^2+y^2$, $2x^2+xy+2y^2+\cancel{3x}+\cancel{2y}-4=0$



$F = x^2+y^2+\lambda(2x^2+xy+2y^2-4)$

$F_x = 2x+\lambda(4x+y)$

$F_y = 2y+\lambda(4x+y)$

$2x+\lambda(4x+y)=0$

$2y+\lambda(x+4y)=0 \quad /\cdot(-1)$

$2x^2+xy+2y^2+4=0$

$2(x-y)+3\lambda(x-y)=0$

$(x-y)(2+3\lambda)=0$

1) $y=x$ 2) $2+3\lambda=0$ $2x-\frac{2}{3}(4x+y)=0$

$5x^2-4=0$ $\lambda=-\frac{2}{3}$ $-2x-2y=0$

$x=\pm\frac{2}{\sqrt5}=y_{1,2}$ $y=-x$

$3x^2-4=0$ $x_{3,4}=\pm\frac{2}{\sqrt3}$

1) $2x-5\lambda x=0 \quad /: x_{1,2}\neq 0$

$\lambda=-\frac{2}{5}$

$M_{1,2}\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}, \pm\frac{2}{\sqrt5}\right)$ $\lambda_{1,2}=-\frac{2}{5}$

$M_{3,4}\left(\pm\frac{2}{\sqrt3}, \mp\frac{2}{\sqrt3}\right)$ $\lambda_{3,4}=-\frac{2}{3}$

$F_{xx}=2+4\lambda$

$F_{xy}=\lambda$ $d^2F=(2+4\lambda)dx^2+2\lambda\,dxdy+(2+4\lambda)dy^2$

$F_{yy}=2+4\lambda$

$M_{1,2}$; $\lambda_{1,2}$

$d^2F=\left(2-\frac{8}{5}\right)dx^2-\frac{4}{5}dxdy+\left(2-\frac{8}{5}\right)dy^2$

$=\frac{2}{5}dx^2-\frac{4}{5}dxdy+\frac{2}{5}dy^2$

$\boxed{dx_{u_1}}$ $=\frac{2}{5}(d^2-2dxdy+dy^2)=\frac{2}{5}(dx-dy)^2$

$d^2F=\frac{2}{5}(2dx)^2>0$

$M_{1,2}$ услов loc min

$M_{3,4}$ loc max

d (услов)

$(4x+y)dx+(x+4y)dy=0$

$x=y=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\pm2\sqrt5\,dx \pm 2\sqrt5\,dy=0$

$dy=-dx$

Низови и редови функција

Проста и равномерна конвергенција

$|q|<1$

$f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R};\ n=1,2\ldots$ $\qquad q^n \to 0$

(f_n)

$x \in S$

$(f_n(x))$ – низ реалних бројева

Деф. Област конвергенције низа ф-ја (f_n) је скуп свих $x \in D$ за које је низ $(f_n(x))$ конвергентан.

$x \in D$, $x \in$ области конвергенције

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x);\quad f : (\text{обл. конв.}) \to \mathbb{R}$$

Пример $f_n(x) = x^n$; $D=[0,1]$

непрекидне, диференцијабилне ∞ пута

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

прекидна

Проста конвергенција:
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \in$ области конв.
$f_n \to f$

Деф Низ ф-ја (f_n) равномерно конвергира ф-ји f на скупу D акко

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbb{N})(n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } D$$

(f_n) – просто конв. f на D

$$(\forall x \in D)\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$(\forall x \in D)(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } D \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall n)(n \ge n_0 \Rightarrow \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$f_n \rightrightarrows f$ на D

Ⓣ Ако су f_n непрекидне на D, и ако f_n равномерно конвергира на D онда је f непрекидна на D.

Ⓣ Низ функција f_n је равномерно конвергентан на скупу D акко $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall x \in D)\ (\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$

Кошијев критеријум равномерне конвергенције

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$; $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ – n-та парцијална сума реда ф-ја $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

Деф Област конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ је област конвергенције низа променљивих парцијалних сума.

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$

$(-1, 1)$ – област конвергенције

Деф. Ред ф-ја $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно конвергира на скупу D акко низ S_n његових парцијалних сума равномерно конвергира на D.

Ⓣ Кошијев критеријум рав. конв. реда

Ред ф-ја $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно конвергира на D акко

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n, p \in \mathbb{N})\ (\forall x \in D)\ (n \geq n_0 \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon)$

Деф. Ред функција $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ апсолутно конвергира на D акко ред бројева $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ конвергира за $\forall x \in D$.

Ⓣ (Вајерштрасов критеријум равномерне конвергенције)

Нека су $\alpha_n > 0$ такви бројеви да је $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in D$.

Ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ конвергентан, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ и апсолутно и равномерно конвергира на скупу D.

доказ ↓

$\varepsilon > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ конв $\Rightarrow (\exists n_0)(\forall n, p)(n \geq n_0 \Rightarrow |\underbrace{\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}}_{\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}}| < \varepsilon$

$x \in D, p, n \geq n_0 \Rightarrow |\underbrace{f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)}_{\text{равн конв}}| \leq \underbrace{|f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)|}_{\text{апс. конв}} \leq \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p} \underset{*}{<} \varepsilon$

① Нека су ф-је f_n непрекидне на $[a,b]$ и нека $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тада:

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)\,dt \text{ на } [a,b]$$

Специјално:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}\,dx$$

<u>Доказ</u> $\varepsilon > 0$

$\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$

$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow (\exists n_0)(\forall n)(\forall x \in [a,b])(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$

$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt <$

$< \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \underbrace{\frac{\varepsilon}{b-a}(x-a)}_{\leq 1} \leq \varepsilon$

$x = b$

<u>Последица</u>: Нека су f_n непрекидне на $[a,b]$ и нека је ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно конвергентан на $[a,b]$. Тада:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt \quad \text{на } [a,b]$$

Специјално:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

(Т) Нека су ф-је f_n' непрекидне на $[a,b]$, нека f_n' равномерно конв. функцији g на $[a,b]$ ($f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$) и нека $\exists x_0 \in [a,b]$ такво да је низ $(f_n(x_0))$ конв. Тада $\exists$ ф-ја f таква да

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a,b] \text{ и } g = f'$$

Специјално: $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$

Доказ: $f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)}_{f_n(x)-f_n(x_0)} \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \text{ на } [a,b]$$

$f_n(x_0) \to d$

$$f_n(x) \rightrightarrows \underbrace{d + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}_{f(x)}$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

$$f'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right)' = g(x)$$

Последица: Нека су f_n' непрекидни на $[a,b]$, нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ равн. конв. на $[a,b]$ и нека $\exists x_0 \in [a,b]$ такво да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвергентан. Тада је:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \text{ равномерно на } [a,b]$$

Степени редови – СР

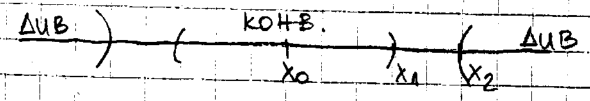
Деф. Нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и нека је a_n низ бројева. Ред функција $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ је степени ред.

(Т) (Абел) (N. H. Abel)

1. Ако (СР) конвергира за неко $x = x_1$, онда он конвергира и апсолутно и равномерно за све x за које је $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$.

$|a-b| \to$ растојање између a и b

2. Ако (CP) дивергира за неко $x=x_2$, онда он дивергира за свако x за које је $|x-x_0|>|x_2-x_0|$.



Доказ:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ – конвергира

$a_n(x_1-x_0)^n \to 0$

$\Rightarrow$ низ $(a_n(x_1-x_0)^n)$ – ограничен

$\Rightarrow (\exists M>0)(\forall n)$

$|a_n(x_1-x_0)^n|<M$

$|x-x_0|<|x_1-x_0|$

$$|a_n(x-x_0)^n| = \left|a_n(x_1-x_0)^n \cdot \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^n\right|$$

$$= \underbrace{|a_n(x_1-x_0)^n|}_{\le M} \cdot \underbrace{\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|}_{q}^{n}$$

$\le M\cdot q^n \qquad 0\le q = \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|<1$

$0\le q<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} M\cdot q^n$ конв

$|a_n(x-x_0)^n| \le M\cdot q^n$

Вајерштрас $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CP и апсолутно и равномерно конвергира

2) претп. супротно $\exists x_3 \quad |x_3-x_0|>|x_2-x_0|$ и (CP) конв. за $x=x_3$

$\xRightarrow{1.}$ (CP) конвергира за $x=x_2$ – контрадикција

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$$

претпоставка $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n, f\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, f)$

$$(f, f_k)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, f_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n f_n, f_k)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (f_n, f_k)=a_k \quad \begin{cases} 0, & n\neq k \\ 1, & n=k \end{cases}$$

$$a_k=(f, f_k)$$

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n) f_n$$

$$\vec{r}=(\vec{r}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{r}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{r}\cdot\vec{k})\vec{k}$$

скаларни производ за ф-је може да се дефинише на различите начине

-ми ћемо узети

$$[a,b], \ \exists \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

~~специфицирамо праву~~

$[-\pi, \pi]$

1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., $\cos nx$, $\sin nx$

f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_{2n-1}, f_{2n}

$$(f_{2n}; f_{2m-1})=\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin nx \overbrace{\cos mx}^{\text{парна}}}_{\text{непарна}}\,dx=0$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)+\overbrace{\sin(n-m)x}^{\text{непарна}}\,dy$$

$n\neq m$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$(f_{2n}, f_{2m})=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\right)dx$$

$n\neq m$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n+m}\sin(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=0$$

$$n=m: \ (f_{2n}, f_{2m})=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\pi, \ n\neq 0$$

$$n=0: \ (f_0, f_0)=2\pi$$

$(f_{2n-1}, f_{2m-1}) = 0$, $n \neq m$

$(f_{2m-1}, f_{2m-1}) = \pi$

$(f_0, f_0) = 2\pi$

$(f_{2m}, f_{2m}) = \pi$

$(f_{2m-1}, f_{2m-1}) = \pi$

$(f_k, f_l) = 0$; $k \neq l$

НОРМА $\|f_0\| = \sqrt{(f_0, f_0)} = \sqrt{2\pi}$

$\|f_{2m}\| = \sqrt{\pi}$

$\|f_{2m-1}\| = \sqrt{\pi}$

$\frac{f_n}{\|f_n\|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x \ldots \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \ldots$

ОРТОНОРМИРАН НИЗ

$$b_k' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \cdot dx$$

$$b_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$\underbrace{b_k' \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}}_{b_k} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx\right) \sin kx$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx}$$

$$a_k' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$a_k' \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx\right) \cos kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k > 0$$

$$a_0' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$a_0' \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Фуријеов ред ф-је f на интервалу $[-\pi, \pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \ , \ x \in [-\pi, \pi]$$

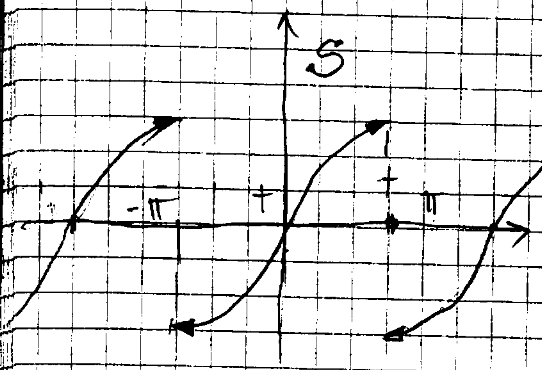
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ ; \ n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ ; \ n = 1, 2 \ldots$$

Фуријеови коефицијенти

Т (Дирихле) Нека је f непрекидна на $[-\pi, \pi]$, осим можда у коначно много тачака у којима има прекиде прве врсте и нека f има коначно много локалних екстремума на $[-\pi, \pi]$.
Тада је:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \begin{cases} f(x), & \text{ако је } f \text{ непрек. у } x \in [-\pi, \pi] \\ \frac{f(x-) + f(x+)}{2} & \text{ако } f \text{ има прекид у } x_0 \in [-\pi, \pi] \\ \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}, & \text{за } x = \pm\pi \end{cases}$$



Euler - први радио са редовима

S = сума Фуријевог реда

FOURIER -

$[-l, l]$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

30

Т (Дирихле) као претходна; уместо $-\pi$, ставити $-l$, уместо π ставити l

$[a, b]$

$$a_n = \frac{2}{b}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$$

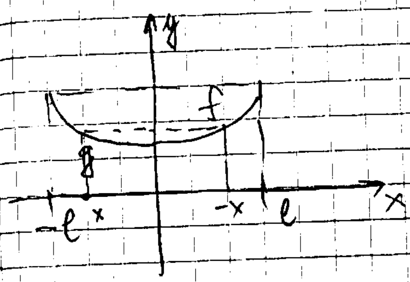
$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}$$

T (Дирихле) уместо $-\pi \xrightarrow{\text{ставити}} a$, $\pi \to b$

f непарна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f\,dx = 0$

f парна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f\,dx = 2\int_0^a f\,dx$



по косинусима
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ f(-x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\,2\int_0^l \underbrace{g(x)}_{f(x)}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

парна

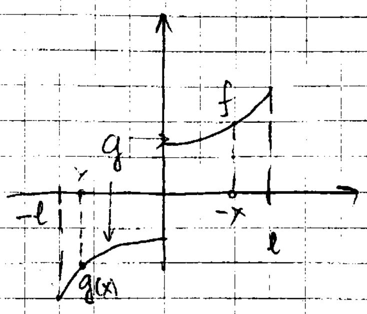
$$\boxed{a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;\quad n = 0, 1, \dots \qquad b_n = 0}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

T (Дирихле) Нека је f непрекидна на $[0, l]$ осим можда у коначно много тачака у којима има прекид прве врсте, нека f има коначно много лок. екстремума на $[0, l]$ тада је:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} = \begin{cases} f(x), & \text{ако је } f \text{ непрек. у } x \in [0, l] \\ \frac{f(x-) + f(x+)}{2} & \text{ако је у } x \in [0, l] \text{ прекид} \\ f(0+) & \text{за } x = 0 \\ f(l-), & \text{за } x = l \end{cases}$$

по синусима



$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,l] \\ -f(-x), & x\in[-l,0) \end{cases}$$

g - непарна ф-ја

$$a_n=\frac{1}{l}\underbrace{\int_{-l}^{l}\underset{\text{не}}{g(x)}\cos\frac{n\pi x}{l}}_{\text{неп}}dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\underbrace{\underset{\text{не}}{g(x)}\underset{\text{неп.}}{\sin\frac{n\pi x}{l}}}_{\text{парна}}dx=\frac{2}{l}\int_0^l \underset{f}{g(x)}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

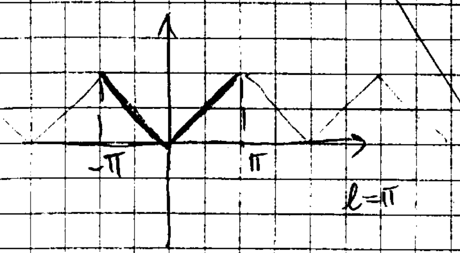
$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;\ n=1,2\dots$$

$$a_n=0,\quad n=0,1,2\dots$$

(Т) (Дирихле) - претпоставке исте као у претходној, тада:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\sin n\pi x}{l}=\begin{cases} f(x), & f\text{ непрек. у } x\in(0,l) \\ \frac{f(x-)+f(x+)}{2}, & f\text{ има прекид у } x\in[0,l] \\ 0, & x=0=l \end{cases}$$

(*) $f(x)=x$ $[0,\pi]$ по косинусима



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$b_n=0\qquad a_n=\frac{2}{\pi}$$

$u=x$ $\quad dv=\cos nx\,dx$
$du=dx$
$\quad v=\frac{1}{n}\sin nx$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\quad n\neq 0$$

$$a_{2k}=0,\quad a_{2k-1}=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

32

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x=x,\quad \forall x\in[0,\pi]$$

$\frac{\pi^2}{6}$

$x=0$: $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

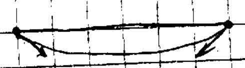
$y'' = \sin y$
$\sin y \approx y$ мал
$y'' = y$ кантно

Диференцијалне једначине

деф. Диф. једначина n-тог реда је она која не може да се сведе на једначину $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (1) где је y непозната функција.

права деф: $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$

деф. Решење диф. јед. (1) на интервалу I је свака функција φ таква да је $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$, за $\forall x \in I$.



деф. Почетни проблем:

Нађи решење: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

ПП
почетни проблем
(Кошијев проблем)

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$ почетни услови (Кошијеви услови) ПУ

деф. Партикуларно решење диф. јед. (1) је било које решење које задовољава неке почетне услове.

деф. $y = \varphi(x, C_1 \dots C_n)$ је опште решење диф. јед. (1) на интервалу I акко

1) за фиксиране вредности константи $C_1, \dots C_n$ оно јесте решење на I

2) за све почетне услове (ПУ), где је $x_0 \in I$ $\exists C_1^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ такви да је $y = \varphi(x, C_1^{(0)} \dots C_n^{(0)})$ решење почетног проблема (ПП)

пример $y' = x$

$y = \int x\,dx$

$y = \frac{x^2}{2} + c$

$y'^2 = -1$

нема решења (у скупу реалних функција)

Пикар (Picard)

(Т) (Теорема о егзистенцији и јединствености решења)

Нека су испуњени следећи услови:

Декартов производ

1) f непрекидна на скупу $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b_0, y_0 + b_0] \times [y_0' - b_0', y_0' + b_0'] \times \dots \times [y_0^{(n-1)} - b_0^{(n-1)}, y_0^{(n-1)} + b_0^{(n-1)}]$

2) f испуњава Липшицов услов тј. $(\exists L > 0)$ такво да је

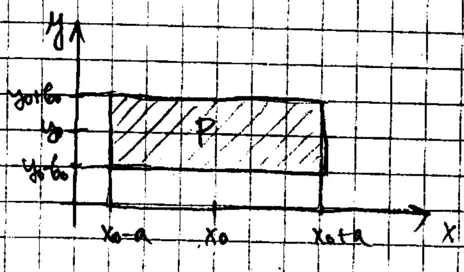
$$|f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) - f(x, z_1, \dots, z_{n-1})| \le L(|y_1 - z_1| + \dots + |y_n - z_n|)$$

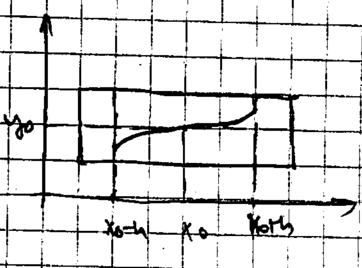
за $\forall (x, y_1, \dots y_n), (x, z_1, \dots z_n) \in P$

Тада $\exists h > 0$ такво да (ПП) има решење и то јединствено, на интервалу $[x_0 - h, x_0 + h]$

(*) Ако су сви $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ ограничени на P, онда f задовољава Липшицов услов на P

$n = 1$





Диф. једначине првог реда

1. Диф. јед. са раздвојеним променљивим су оне које могу да се напишу у облику $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C$$

пример

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

2. Хомогена диф. јед. је она која може да се напише у следећем облику: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

нова непозната ф-ја $z = \frac{y}{x}$ $y = xz$ $y' = z + xz'$

$$z + xz' = f(z)$$

$$xz' = f(z) - z \quad | : f(x) - z \neq 0$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

3. Линеарна диф. јед. првог реда је она која може да се напише у облику $y' + p(x)y = q(x)$

$g(x) = 0$ хомогена лин. диф. јед. 1)

$q(x) \neq 0$ нехомогена " 2)

1) хом. л. д. ј.: $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \,/\cdot\, y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)\,dx + C_1$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + C_1$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C} \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}}$$

$C \in \mathbb{R}$ опште решење

2) нехомогена Л.Д.Ј.

Лагранжов метод варијације константи

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))$$

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - \cancel{p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} + \cancel{p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} = g(x) \Big/ e^{\int p(x)dx}$$

$$C'(x) = g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)} \to \text{опште решење н.х.ЛДЈ}$$

4. Бернулијева диференцијална једначина

$$y' + p(x)y = g(x)y^{\alpha};\ \alpha = 0, 1 \qquad \alpha > 0:\ y \equiv 0 \text{ је решење}$$

$$y \neq 0 \qquad \alpha < 0:\ y \equiv 0 \text{ није решење}$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\cdot y^{1-\alpha} = g(x)$$

$$z = y^{1-\alpha}$$

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y' = (1-\alpha)\cdot\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = g(x) \Big/ \cdot(1-\alpha)$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

$$z = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx} + \left(C + (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx\right)$$

$$\overset{\parallel}{y^{1-\alpha}}$$

$$\frac{dx}{x-y} = dy \qquad \frac{dx}{dy} - x = -y$$

$$y' = \frac{1}{x-y} \qquad x = e^{-\int -y\,dy}\left(C + \int(-y)e^{\int -y\,dy}dy\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = x - y \qquad x = e^{\frac{y^2}{2}}\left(C - \int y e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) \quad t = \frac{y^2}{2} \ \ldots$$

Линеарне диференцијалне једначине другог реда

деф. Линеарна диф. јед. n-тог реда:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

$n=2$

$$L[y] \to y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y$$

$$L[y] = f(x)$$

p_1, p_2, f непрекидне на $[a,b]$

Ⓣ 1. $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

2. $L[\lambda y] = \lambda L[y]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$L[y_1+y_2] = (y_1+y_2)'' + p_1(y_1+y_2)' + p_2(y_1+y_2) =$$

$$= (y_1'' + y_2'') + p_1(y_1' + y_2') + p_2(y_1+y_2)$$

$$= L[y_1] + L[y_2]$$

Ⓣ Ако је $L[u+iv]=0$

$(i^2=-1)$ онда је

$L[u]=0$ и $L[v]=0$

доказ $L[u+iv] = (u+iv)'' + p_1(u+iv)' + p_2(u+iv)$

$$= u'' + iv'' + p_1u' + ip_1v' + p_2u + ip_2v$$

$$= (u'' + p_1u' + p_2u) + i(v'' + p_1v' + p_2v)$$

$$u'' + p_1u' + p_2u = 0$$

$$L[v] = v'' + p_1v' + p_2v = 0$$

1. Снижавање реда

y_1 партикуларно решење ХЛДЈ : $L[y_1]\equiv 0$

$$y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0$$

$$y = y_1 \cdot z$$

$$(y_1 z)'' + p_1 (y_1 z)' + p_2 y_1 z = f$$

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + p_1 (y_1' z + y_1 z') + p_2 y_1 z = f$$

$$\underbrace{(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1)}_{0} z + y_1 z'' + (2y_1' + y_1) z' = f$$

$$y_1 z'' + (2y_1' + y_1) z' = f$$

$$u = z'$$

$$y_1 \cdot u' + (2y_1' + y_1) u = f \quad / : y_1 \neq 0$$

Л.Д.Ј. 1. реда

2. $n=2$ y_1, y_2 ф-је

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$ детерминанта Вронског (Вронскијан)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$\otimes$

Т Ако су функције $y_1 \dots y_n$ линеарно зависне онда је $W(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Доказ прет. супротно : $W(x_0) = 0$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$C_1^{(0)} y_1 + \dots + C_n^{(0)} y_n = 0$$

$\Rightarrow y_1 \dots y_n$ - лин. зависни

детерминанта система $= W(x_0) \neq 0$

$\exists$ нетривијално решење $(C_1^{(0)} \dots C_n^{(0)})$

$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$

ПРЕТПОСТАВКА: p_i непрекидне на $[a,b]$

(Т) Ако је $L[y_i]=0$ за $i=1,2\dots n$, онда је и $L[C_1y_1+\dots+C_ny_n]=0$ за $\forall C_1\dots C_n \in \mathbb{R}$

(Т) Нека су $y_1\dots y_n$ решења диф. јед. $L[y]=0$. Ако је (Вронскијан) $W(x_0\neq 0)$, $x_0\in[a,b]$ онда су $y_1,\dots y_n$ лин. независне функције.

ДОКАЗ прет. супротно: $y_1\dots y_n$ – лин. зависне

$\exists\, C_1\dots C_n$ од којих је бар 1 различит од 0

$C_1y_1 + \dots + C_ny_n \equiv 0$

$C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x) = 0, \ \forall x\in[a,b]$

$C_1y_1'(x) + \dots + C_ny_n'(x) = 0$, –||–

$\vdots$

$C_1y_1^{(n-1)}x + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x) = 0, \ \forall x\in[a,b]$

дет. система $W(x)$

систем има нетривијално решење $\forall x\in[a,b]$ $\Rightarrow W(x)=0 \ \forall x\in[a,b]$

контрадикција са претпоставком

(Т) Д.Ј. $L[y]=0$ има n лин. независних решења.

ДОКАЗ $x_0\in[a,b]$

(ППП) према теор. о јединствености решења ПП1 има решење y_1

(ПП1) $\begin{cases} y(x_0)=1 \\ y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)=0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$

(ПП2) $\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=1 \\ y''(x_0)=0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$ према Т. ПП2 има решење y_2

$\vdots$

(ППn) $\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y^{(n-2)}(x_0)=0 \\ y^{(n-1)}(x_0)=1 \end{cases}$

ППn има решење y_n

$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\ \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0$

$y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ \dots,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0$

$\vdots$

$y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ \dots,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1$

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow y_1,\dots,y_n$ – лин. независне

Т Ако су $y_1 \dots y_n$ лин. независна решења диф. јед. y_n $L[y]=0$, онда је $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ опште решење диф. јед. $L[y]=0$

Доказ $L[y_i]=0,\ i=1,2\dots n$

$\Downarrow$

$L[y]=0$

$$(ПП)\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases} \qquad \begin{cases} C_1y_1(x_0)+\dots+C_ny_n(x_0)=y_0 \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases}$$

дет. система $=W(x_0)\neq 0$

систем има јед. решење $C_i=a_i \Rightarrow y=a_1y_1+\dots+a_ny_n$

задовољава (ПП)

Т Ако су $y_1 \dots y_n$ лин. независна решења диф. јед. $L[y]=0$, онда је $W(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$.

Доказ прет. супротно $W(x_0)=0,\ x_0\in[a,b]$

$$(ПП)\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases} \qquad \begin{cases} C_1y_1(x_0)+\dots+C_ny_n(x_0)=0 \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases} \qquad C_i=a_i$$

дет. система $=W(x_0)=0 \Rightarrow$ систем има нетривијално решење

$y = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \not\equiv 0$

је решење (ПП)

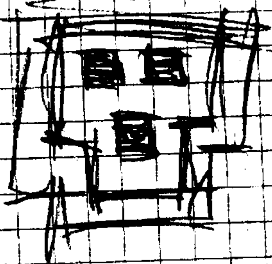
$y \equiv 0$ је решење (ПП)

$\Downarrow$

контрадикција због теореме о јединствености решења

деф Фундаменталан скуп (систем) решења диф. јед. $L[y]=0$ је било који скуп од n линеарно независних решења те диф. јед.

ХЛДЈ са константним коефицијентима



$L[y]=0$; $p_i(x) = p_i = const$

Ојлер $y = e^{rx}$, $r = const$

(1) $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$

$r^2 e^{rx} + p_1 r e^{rx} + p_2 e^{rx} = 0 \ /: e^{rx} \neq 0$

$r^2 + p_1 r + p_2 = 0$ карактеристична јед. диф. јед. (1)

r_1, r_2 решења

$y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2)x} \cdot (r_2 - r_1)$$

1. $r_1 \neq r_2 \Rightarrow W(x) \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ лин. нез.

$\Rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ опште решење

1. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$; $r_1 \neq r_2$

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ опште решење

(2) r_1, r_2 комплексни

$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$

$e^{r_{1,2} x} = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\pm i\beta x}$

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$e^{r_{1,2} x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x \pm i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$L[u+iv]=0 \Rightarrow L[u]=L[v]=0$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 &= e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{су решења}$$

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)$$

$$y_2' = e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x}(\cancel{\alpha\sin\beta x\cos\beta x} + \beta\cos^2\beta x - \cancel{\alpha\sin\beta x\cos\beta x} + \beta\sin^2\beta x)$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

$\Downarrow$

$y_{1,2}$ – лин. независни

$\Rightarrow y_h = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ је опште решење

3. $r_1 = r_2 = a$

$y_1 = e^{ax}$

$y_2 = x e^{ax}$ решење

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ ae^{ax} & e^{ax}(ax+1) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2ax} \neq 0$$

$\Downarrow$

$y = e^{ax}(c_1 + c_2 x)$ опште решење

$\sim$

$L[y]=0$ n-тог реда $\quad e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{r_1 x}$

$y = e^{rx}$

⊛ $r_1 \in \mathbb{R}$ k-тострук

⊛ r_1 комплексан, k-тострук

$r_1 = \alpha \pm i\beta$

$\downarrow$

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y'' + xy = 0$

ЛАГРАНЖОВ МЕТОД
ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

$L[y] = f(x)$

(Т) Ако је y_h опште решење ХЛДЈ $L[y]=0$, а y_p партикуларно решење НХЛДЈ $L[y]=f$, онда је $y = y_p + y_h$ опште решење НХЛДЈ $L[y]=f$.

Доказ $L[y] = L[y_p + y_h] = \underbrace{L[y_p]}_{f(x)} + \underbrace{L[y_h]}_{0} = f(x)$

Y – било које решење $L[y]=f$

$L[Y - y_p] = \underbrace{L[Y]}_{f} - \underbrace{L[y_p]}_{f} = 0$

$Y - y_p$ – је решење хомогене

$y_1 \ldots y_n$ – лин. независна решења хомогене

онда $\exists\, C_1 \ldots C_n : Y - y_p = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$

$Y = y_p + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ – лин. независна решења ХЛДЈ $L[y]=0$

$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$

$y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$

$C_i = C_i(x)$

$y' = C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n + C_1 y_1' + \ldots C_n y_n'$

$C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0$

$y' = C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n'$

$$y'' = C_1'y_1' + \dots + C_n'y_n' + C_1y_1'' + \dots + C_ny_n''$$

$$\underline{C_1'y_1' + \dots + C_n'y_n' = 0}$$

$$\underline{y'' = C_1y_1'' + \dots + C_ny_n''}$$

$$\vdots$$

$$C_1'y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0$$

$$y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} + C_1y_1^{(n)} + \dots + C_ny_n^{(n)}$$

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = 0$$

$$C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} + C_1y_1^{(n)} + \dots + C_ny_n^{(n)} +$$
$$+ p_1(C_1y_1^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)}) + \dots + p_n(C_1y_1 + \dots + C_ny_n) = f$$

$$C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} + C_1\overbrace{(y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \dots + p_ny_1)}^{0} +$$
$$+ \dots + C_n\underbrace{(y_n^{(n)} + p_1y_n^{(n-1)} + \dots + p_ny_n)}_{0} = f$$

$$C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = f$$

$$\begin{cases} C_1'y_1 + \dots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + \dots + C_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

непознате $C_1' \dots C_n'$

дет. система $= W(x) \neq 0$ ($y_1 \dots y_n$ лин. независни)

$\exists$ јединствено решење $C_i'(x) = L_i(x)$

$$C_i(x) = \int L_i(x)\,dx + D_i$$

општс решење $L[y] = f$

$$y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$$

$$y = \underbrace{D_1y_1 + \dots + D_ny_n}_{y_h} + \underbrace{\left(\int L_1(x)dx\right)y_1 + \dots + \left(\int L_n(x)dx\right)y_n}_{y_p \text{ - партикуларно}}$$

44

Ојлерова диф. једначина

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

$$p_1 \dots p_n \text{ const} ; \ a \neq 0$$

$e^t = ax+b$ - нова променљива

$$(ax+b)^2 y'' + p_1 (ax+b) y' + p_2 y = f(x)$$

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} \qquad y'' = \frac{(y')^{\cdot}}{\dot x}$$

$$t = \ln(ax+b) \qquad y'' = \frac{(ae^{-t}\dot y)^{\cdot}}{ae^t}$$

$$x = \frac{e^t - b}{a}$$

$$\dot x = \frac{1}{a} e^t$$

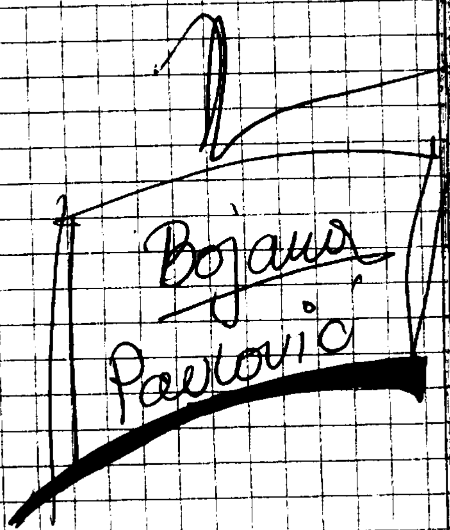
$$y' = a e^{-t} \dot y$$

$$\cancel{e^{2t}} \cdot \cancel{e^{-2t}} (\ddot y - \dot y) + p_1 \cancel{e^t} \cdot a \cancel{e^{-t}} \dot y + y = f\left(\frac{e^t - b}{a}\right)$$

$$\ddot y + (a-1)\dot y + y = f\left(\frac{e^t - b}{a}\right)$$

$$y = \varphi(t, c)$$

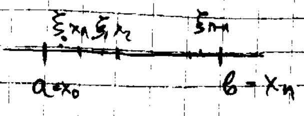
$$\boxed{y = \varphi(\ln(ax+b), c)}$$



- гранични проблем

пример
$$\begin{cases} y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$
линеаран гранични проблем II реда

Интегрални рачун ф-за више променљивих



$$S(S,\Pi,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\underbrace{\Delta x_i}_{\text{дужина } i\text{-тог интервала}}$$

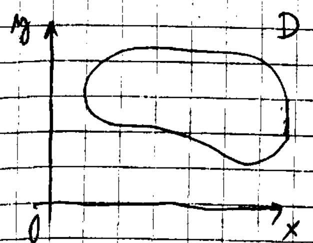
$$\lambda(\Pi)=\max_{i=0,\dots,n-1}\Delta x_i \qquad [x_i,x_{i+1}] \quad = \text{мера } [x_i,x_{i+1}]$$

I

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\Pi\in P)(\forall\xi\in\xi_\Pi)(\lambda(\Pi)<\delta)\ (|S(f,\Pi,\xi)-I|<\varepsilon)$$

Двојни интеграл

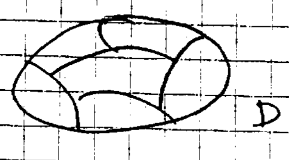
$D\subset\mathbb{R}^2$



D- мерљив скуп
(има површину)

$f: D\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{ограничена на } D}$

деф. Подела скупа D је било који подскуп $\{D_1,\dots D_n\}$ подскупова скупа D, такав да:



1) $D_1, D_2,\dots D_n$ су мерљиви
2) $D=D_1\cup D_2\cup\dots\cup D_n$
3) за $i\neq j$ је мера (површина) скупа $D_i\cap D_j$ једнака нули за $\forall i,j=1,\dots n$.

$P(F)$ - мера (површина) скупа F

$\Pi=\{D_1,\dots D_n\}$ произвољна подела

P - скуп свих подела

$$\operatorname{diam} S=\sup_{x,y\in S}\overline{xy}$$

дијаметар скупа S

$\Pi = \{D_1 \dots D_n\}$

$\lambda(\Pi) = \max\limits_{i=1,2\dots n} \operatorname{diam} D_i$

ПАРАМЕТАР ПОДЕЛЕ

деф. Избор тачака за поделу $\Pi = \{D_1 \dots D_n\}$ је било који скуп тачака $\{M_1, \dots, M_n\}$, таквих да је:

$M_i \in D_i, \ \forall i = 1,2\dots n$

ξ произвољан избор

ξ_Π - скуп свих избора за поделу Π

$S(f, \Pi, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(T_i) \cdot P(D_i)$ - интегрална сума

деф. Број I је двојни интеграл ф-је f на скупу D акко

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Pi \in \mathcal{P})(\forall \xi \in \xi_\Pi)(\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow |S(f, \Pi, \xi) - I| < \varepsilon)$

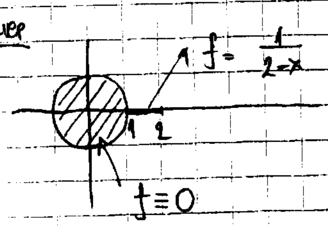
$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim\limits_{\lambda(\Pi) \to 0} S(f, \Pi, \xi)$

деф. Ф-ја f је интеграбилна на скупу D акко $\exists \iint\limits_D f\,dx\,dy$

(и f ограничена).

пример

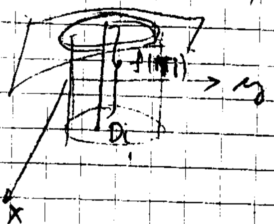


$\Pi = \{D_1, \ldots, D_n\}$

$f \geq 0$, непрекидна на D

$z = f(x,y)$

$f(T_i)P(D_i)$



$V_i \approx f(T_i)P(D_i)$

$$\boxed{V = \iint f(x,y)\,dx\,dy}$$

$\Pi = \{D_1, \ldots, D_n\}$

$$f \text{ огр.} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, m_i = \inf\limits_{X \in D} f(X) \\ \exists\, M_i = \sup\limits_{X \in D_i} f(X) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{S}(f,\Pi) &= \sum_{i=1}^{n} m_i P(D_i) \quad \text{доња} \\ \overline{S}(f,\Pi) &= \sum_{i=1}^{n} M_i P(D_i) \quad \text{горња} \end{aligned}\right\} \text{Дарбуова сума}$$

Т Нека је ф-ја f ограничена на D. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

а) f је интеграбилна на D

б) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Pi \in P)\left(\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon\right)$

в) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Pi \in P)\ \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon$

Т Ако је f непрекидна на D, онда је f интеграбилна на D.

Т Нека су f и g интеграбилне на D. Тада:

а) $\iint\limits_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) dx\,dy = \iint f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$

б) $\iint\limits_D c \cdot f(x,y)\,dx\,dy = c \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

$c = \text{const}$

(Т) Нека је f интеграбилна на D ако су A и B мерљиви (имају површину), $A \cup B = D$ и $P(A \cap B) = 0$ онда је

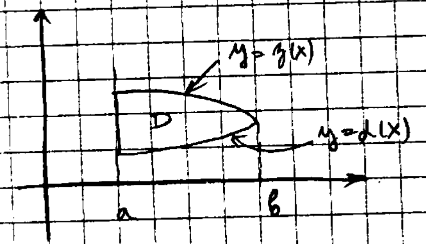
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x,y)\,dxdy + \iint_B f(x,y)\,dxdy$$

(Т) Нека су f и g интеграбилне на D. Тада:

1) $f \geq 0$ на $D \Rightarrow \iint_D f\,dxdy \geq 0$

2) $f \geq g$ на $D \Rightarrow \iint_D f\,dxdy \geq \iint g\,dxdy$

3) $\left|\iint_D f\,dxdy\right| \leq \iint_D |f|\,dxdy$



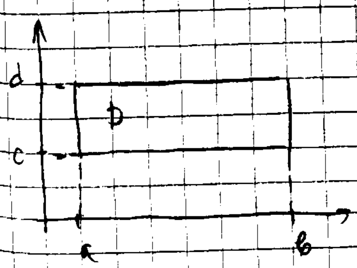
α, β непрекидне функције на $[a,b]$

(Т) Нека је f интеграбилна на D и нека за $\forall x \in [a,b]$ интеграл $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$. Тада је $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$

Доказ: 1) $\alpha(x) \equiv c$

$\beta(x) \equiv d$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy\right)\Delta x_i$$



$$\int_c^d = \int_{y_0}^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + \dots + \int_{y_{m-1}}^{y_m}$$

правоугаоник

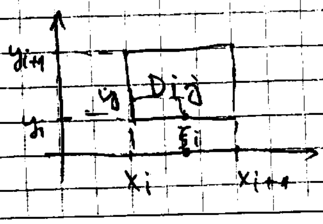
$m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f$, $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

$M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f$

$a = x_0 < x_1 \dots x_n = b$

$c = y_0 < y_1 \dots y_m = d$



$y \in [y_j, y_{j+1}] \Rightarrow (\xi_i, y) \in D_{ij}$

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij}$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy \geq \int_{y_j}^{y_{j+1}} m_{ij}\,dy = m_{ij}\Delta y_j$$

$$-\|- \leq M_{ij}\Delta y_j$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j\right) \leq S \leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \left(\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{P(D_{ij})} \leq S \leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{P(D_{ij})}$$

$\underline{S} = \sum\sum m_{ij} P(D_{ij})$ ДОЊА ДАРБУОВА ЗА f

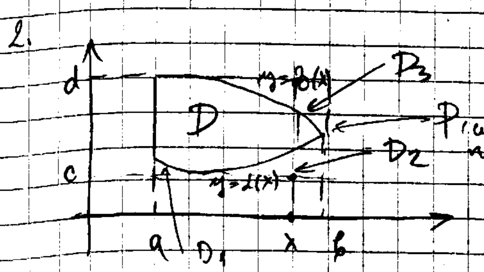
$\overline{S} = \sum\sum M_{ij} P(D_{ij})$ ГОРЊА $-\|-$

$$\lambda(\Pi) \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{S} \to \iint_D f\,dx\,dy \\ \overline{S} \to \iint_D f\,dx\,dy \end{cases}$$

$$\underline{S} \leq S \leq \overline{S}$$

$$\iint_I$$

2.



$$f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \end{cases}$$

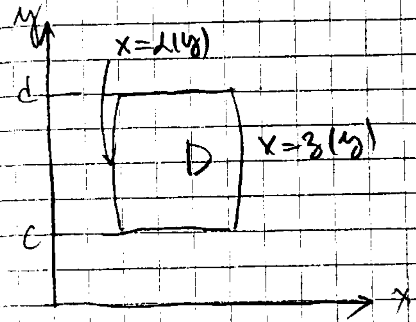
$$\iint_{D_i} f_1 = 0$$

50

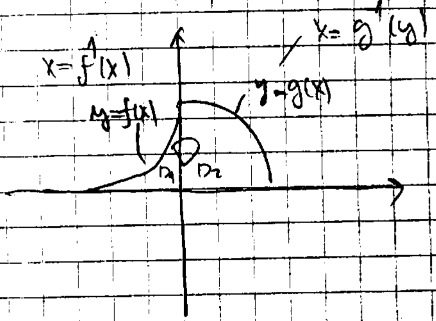
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f_1 + \iint_{D_1} f_1 + \iint_{D_2} f_1 + \iint_{D_3} f_1 = \iint_P f_1\,dx\,dy$$

$$\overset{1.}{=} \int_a^b dx \int_c^d f_1(x,y)\,dy$$

$$\rightarrow = \underbrace{\int_c^{\alpha(x)} f_1}_{=0} + \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_1}_{=f} + \int_{\beta(x)}^{d} f_1 \to 0 = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy$$

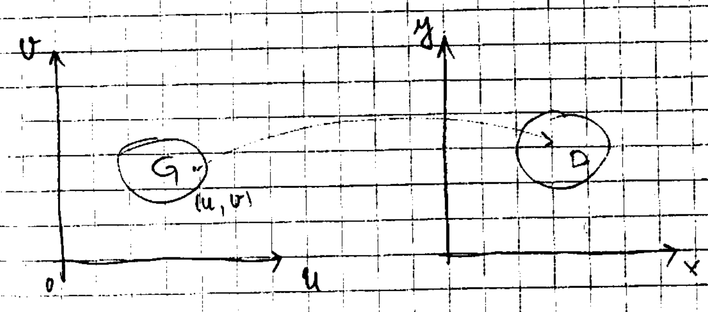


$$\iint_D f(x,y)\, dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx$$



$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \qquad \iint_D = \int_0^a dy \int_{f^{-1}(y)}^{g^{-1}(y)} \dots dx$$

Замена променљивих у двојном интегралу



G, D мерљиве и затворене $\qquad f: D \to \mathbb{R}$

$F: G \to D$ бијекција

$(u,v) \in G \Rightarrow F(u,v) \in D$

$F(u,v) = (x,y)$

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

① Из претходне претпоставке и уз претпоставке f је непрекидно на D, $x(u,v)$ и $y(u,v)$ као и њихови парцијални изводи првог реда су непрекидни на G, важи формула:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f[x(u,v), y(u,v)]\cdot |J|\,du\,dv,$$

где је $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ J - Јакобијан пресликавања F

-пример $x = \rho\cos\varphi$ круг и унутрашњост круга

$y = \rho\sin\varphi$ $\qquad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$

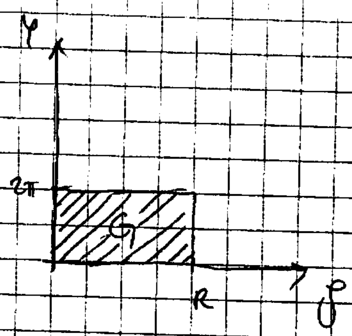
$\rho - u$

$\varphi - v$

$D: \ x^2 + y^2 \leq R^2$

$0 \leq \rho \leq R$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$



пример $x = a\cos\varphi$ елипса и хипербола

$y = b\sin b$ $\qquad J = ab\rho$

$a, b > 0$

пример

$$\iint\limits_D (x^2 + xy)\,dx\,dy \qquad D\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$$I = \iint\limits_G (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi$$

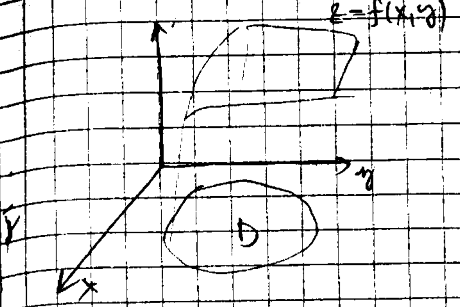
$$I \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + xy)\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^3\cos^2\varphi + \rho^3\sin\varphi\cos\varphi)\,d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{4}(\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$

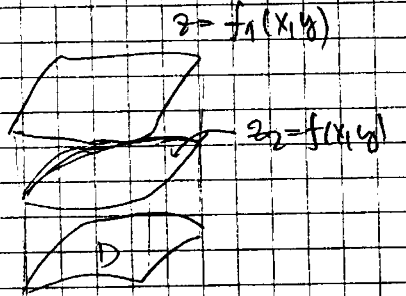
$= \ldots$

Рачунање запремине и површине површи



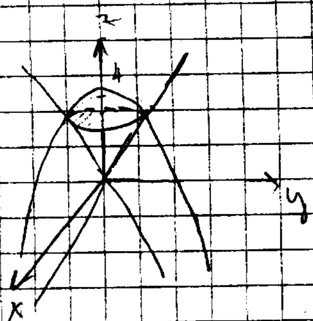
$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad f \geq 0$$

$$V = \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$



$$V = \iint_D |f_1(x,y) - f_2(x,y)|\,dx\,dy$$

пример $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 - y^2 = z^2$



$$z = 2 - z^2$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \boxed{z = 1} \quad z = -2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$D = \{(x,y) \, ; \, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

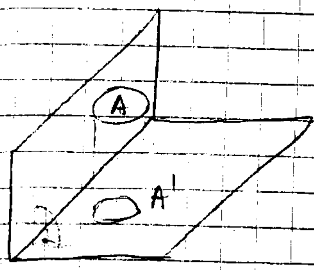
$$V = \iint_D \left(2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\,dy$$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 - \rho^2 - \rho)\rho\,d\rho = 2\pi\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

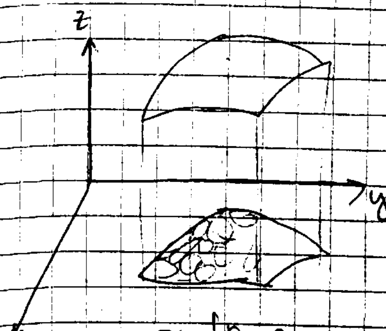
пример $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\quad V = \frac{4\pi}{3} abc$



$P(A') = P(A)\cos\alpha$

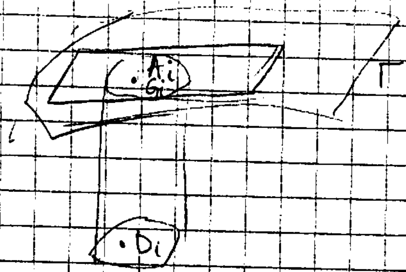
$\Gamma : z = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

Γ - глатка површ : $f, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ непрекидан на D



$\Pi = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \in \mathcal{P}$

$\xi = \{T_1, \dots, T_n\} \in \xi_\Pi$



тангентна раван у A_i

G_i се пројекција на D_i

G_i је у тангентној равни

деф. Број σ је површина површи Γ акко

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Pi \in \mathcal{P})(\forall \xi \in \xi_\Pi)\left(\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow \left|\sigma - \sum_{i=1}^{n} P(G_i)\right| < \varepsilon\right)$$

$$\sigma = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(G_i)$$

$$P(G_i) = \frac{P(D_i)}{\cos\gamma_i}; \quad \cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}} \quad P(G_i)$$

$p_i = p(T_i)$

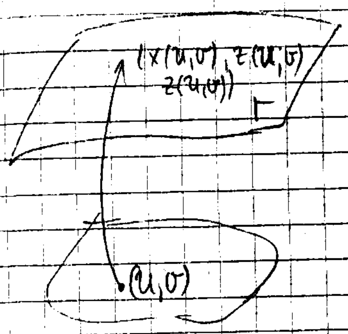
$q_i = q(T_i)$

$$P(G_i) = P(D_i)\sqrt{1+p^2(T_i)+q^2(T_i)}$$

$$\sigma = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+p^2(T_i)+q^2(T_i)} \cdot P(D_i) = \iint_D \underbrace{\sqrt{1+p^2+q^2}}_{[\cos\gamma(x,y)]^{-1}}\, dx\,dy$$

$$\boxed{\sigma(\Gamma) = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy}$$

МИЛАН



$\vec{\Gamma}: \vec{r}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$; $(u,v) \in G$

$\vec{r_u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$

$\vec{r_v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$

Γ је глатка проста површ: $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ као

и њихови парц. изводи првог реда су непрекидни на G

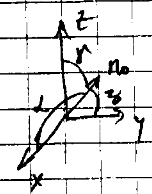
и $(u,v) \longrightarrow r(x(u,v) \dots)$ је бијекција

Γ је регуларна: $\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0}$ за $\forall (u,v) \in G$

$$\sigma(\Gamma) = \iint_G |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| \, du\, dv$$

$\vec{n} = (-p, -q, 1)$

$\vec{n_0} = (a, b, c)$



$\vec{n_0} \cdot \vec{i} = a$

$\underbrace{|n_0|\,|i|}_{1} \cos\underbrace{(\vec{n_0}, \vec{i})}_{\alpha}$

$a = \cos\alpha$
$b = \cos\beta$
$c = \cos\gamma$

$\vec{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\cos\gamma = \frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Тројни интеграл

$D \in \mathbb{R}^3$ мерљив (има запремину)

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

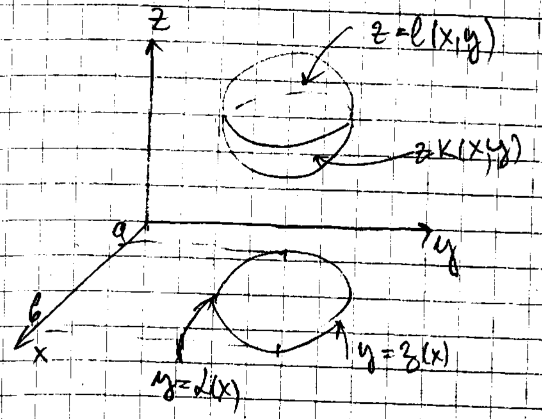
$V(F)$ = запремина скупа F

деф. основне особине

код двојног: има површину $\Rightarrow$ има запремину

$P(D_i) \Rightarrow V(D_i)$

$D = \{(x,y,z) \; ; \; a \le x \le b, \; \alpha(x) \le y \le \beta(x), \; k(x,y) \le z \le l(x,y)\}$



(T) Ако су ф-је f, α, β, k, l непрекидне:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{k(x,y)}^{l(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

ЗАМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ

$x = x(u,v,w)$

$y = y(u,v,w)$

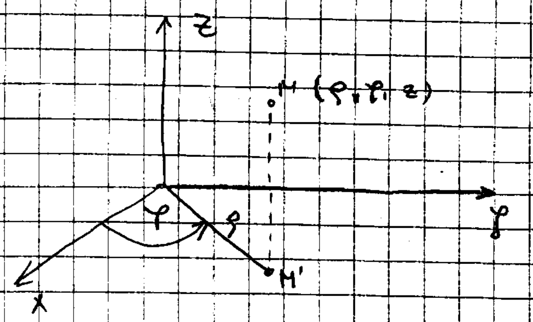
$z = z(u,v,w)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$ ЈАКОБИЈАН

(T) Из претпоставке сличне онима код двојног интеграла:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \cdot |J|\,du\,dv\,dw$$

ПР. ЦИЛИНДРИЧНЕ КООРДИНАТЕ



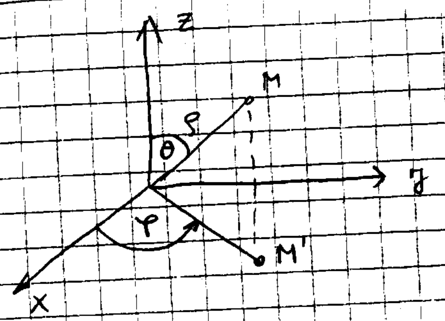
$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$

$z = z$

$J = \rho$

СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ



$$z = \rho\cos\theta$$

$$x = \rho'\cos\varphi$$

$$y = \rho'\sin\varphi$$

$$\rho' = \rho\sin\theta$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\theta\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \rho\cos\varphi\cos\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sin\varphi\cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \rho\sin\theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & \rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\Big[\cos\theta\,(-\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta) - \sin\theta\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta)}_{\sin^2\theta}\Big] =$$

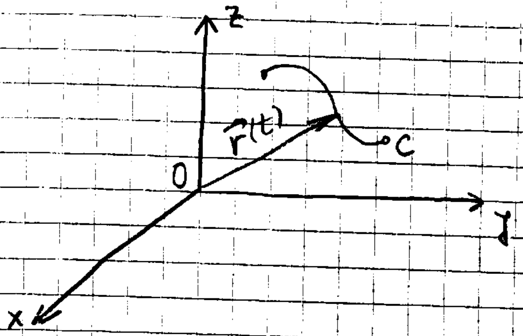
$$= \rho^2(-\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\sin^2\theta) = -\rho^2\sin\theta$$

$$|J| = \rho^2\sin\theta \qquad |J| = abc\,\rho^2\sin\theta$$

$V(D)=\iiint\limits_D dx\,dy\,dz$

Криволинијски интеграли

Деф: $C\subset\mathbb{R}^3$ је проста крива акко $\exists$ интервал $[\alpha,\beta]$ $(\alpha\neq\beta)$ и непрекидна бијекција $\vec{r}:[\alpha,\beta]\to C$.



$t\in[\alpha,\beta]$

$\vec{r}(t)\in C$

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$

$\vec{r}$ непрекидна: x,y,z непр. на $[\alpha,\beta]$

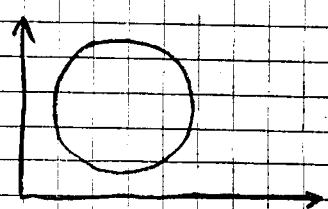
$\dot{\vec{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ вектор тангенте криве C у тачки $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$

Деф: Проста крива C: $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ је глатка акко су $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ непрекидне на $[\alpha,\beta]$. Проста крива је регуларна акко је $\dot{\vec{r}}(t)\neq\vec{0}$ за $\forall t\in[\alpha,\beta]$.

Деф: $C\subset\mathbb{R}^3$ је крива акко C може да се подели на коначно много простих кривих.

Деф: Крива C је део по део глатка акко може да се подели на коначно много глатких кривих.

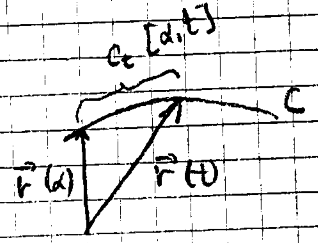


← јесте глатка крива

8 ← није глатка крива јер има "шиљак"

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos t\\ y=y_0+r\sin t\\ z=0\\ t\in[0,2\pi) \end{cases}$$

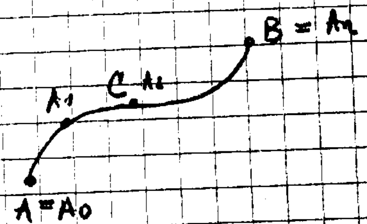
$$s(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt$$



$$s(C_t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ I ВРСТЕ



Деф: Подела криве C је било који коначан скуп тачака $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, које леже на кривој C, за које важи:

$$A = A_0 \prec A_1 \prec \dots \prec A_n = B$$

A иде иза A_0

$\pi = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$

$\mathcal{P}$ – скуп свих подела

$\lambda(\pi) = \max\limits_{i=0,\dots,n-1} s(\widehat{A_iA_{i+1}})$

Деф: Избор тачака за поделу $\pi = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ је било који скуп тачака $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$ таквих да је $T_i \in \widehat{A_iA_{i+1}}$, $i = 0, 1, \dots n-1$

$f: C \to \mathbb{R}$

$\xi = \{T_0, T_1, \dots T_{n-1}\}$

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T_i) \cdot s(\widehat{A_iA_{i+1}})$$

ИНТ. СУМА

ξ_π – скуп свих избора за дату поделу π

Деф: Број I је криволинијски инт. I врсте ф-је f по кривој $C = \overline{AB}$ акко

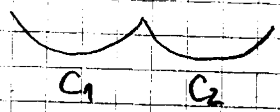
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \pi \in \mathcal{P})(\forall \xi \in \xi_\pi)(\lambda(\pi) < \delta \Rightarrow |S(f, \pi, \xi) - I| < \varepsilon)$$

$I = \int_C f(x,y,z)\, ds$

$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\, ds$

Ⓣ АКО $\exists \int_{\overset{\frown}{AB}} f ds$ ОНДА ЈЕ $\int_{\overset{\frown}{AB}} f ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f ds$

Ⓣ



$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

C ГЛАТКА РЕГУЛАРНА

f НЕПРЕКИДНА НА C

$C: \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$

$A_i \in C$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$A_i\ (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$

$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

↑ ПОДЕЛА ИНТЕРВАЛА $[\alpha, \beta]$

$T_i\ (x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) = \vec{r}(\xi_i)$

$T_i \in \overset{\frown}{A_i A_{i+1}} \Longrightarrow \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$$s(\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2(\eta_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\eta_i)}\ \Delta t_i$$

$$S(f, \Pi, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\vec{r}(\xi_i)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\eta_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\eta_i)}\ \Delta t_i$$

$\xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$

$\eta_i \approx \xi_i$

$$S(f, \Pi, \xi) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\vec{r}(\xi_i)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\xi_i) + \dot{z}^2(\xi_i)}\ \Delta t_i$$

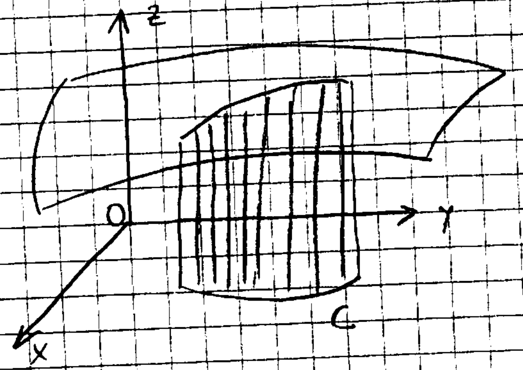
$\lambda(\Pi) \to 0 \Longleftrightarrow \max \Delta t_i \to 0$

$$\lim_{\lambda(\Pi) \to 0} S(f, \Pi, \xi) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\vec{r}(\xi_i)) \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\xi_i) + \dot{z}^2(\xi_i)} + \Delta t_i =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

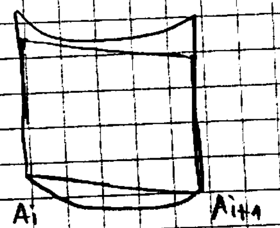
(T) АКО ЈЕ C ДЕО ПО ДЕО ГЛАТКА КРИВА У $f: C \to \mathbb{R}$ НЕПРЕКИДНА Ф-ЈА,

ОНДА ЈЕ $\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)+\dot z^2(t)}\,dt$.



$\Gamma : z = f(x,y)$

$C \subset Oxy$



$P_i = \overline{A_iA_{i+1}} \cdot f(A_i)$

$\overline{A_iA_{i+1}} = \sqrt{(x(t_{i+1})-x(t_i))^2+(y(t_{i+1})-y(t_i))^2}$

$C = \begin{cases} \vec{r} = (x(t), y(t), 0) \\ t \in [\alpha,\beta] \end{cases}$

C ГЛАТКА

ЛАГРАНЖ

$= \sqrt{\dot x^2(\xi_i)+\dot y^2(\eta_i)}\;\Delta t_i$

$S(f,\Pi,\xi) \approx \sum_{i=0}^{n-1} P_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\dot x^2(\xi_i)+\dot y^2(\eta_i)} \cdot f(x(t_i),y(t_i))\,\Delta t_i$

$\xi_i \approx t_i \quad \eta_i \approx t_i$

$S(f,\Pi,\xi) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\dot x^2(t_i)+\dot y^2(t_i)}\; f(x(t_i),y(t_i))\,\Delta t_i \xrightarrow[\max \Delta t_i \to 0]{} \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)}\,dt$

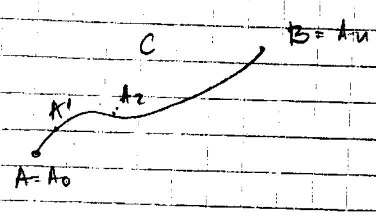
$= \int_C f(x,y)\,ds$

ПОВРШИНА ЦИЛ ПОВРШИ $= \int_C f(x,y)\,ds$

~~ПОВРШИНСКИ~~ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ

КРИВОЛИНИЈСКИ

Криволинијски интеграли II врсте



$C: \ \vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$t \in [p, q]$

$\Pi = \{A_0, A_1 \dots A_n\}$

$A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = A_i(r(t_i))$

$A_0 = A_0(\vec{r}(t_0)) = A_0(\vec{r}(p))$

$p = t_0$

$q = t_n$

$p = t_0 < t_1 < \dots < t_n = q$

$T_i \in \overset{\frown}{A_i A_{i+1}} \qquad T_i(\vec{r}(\xi_i))$

$\xi_i \in [T_i, T_{i+1}]$

$\left.\begin{array}{l} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{array}\right\}$ деф. бар на C

$S_x(P, \Pi, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\vec{r}(\xi_i))\Delta x_i$

$x_i = x(t_i)$

$S_y(Q, \Pi, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(\vec{r}(\xi_i))\Delta y_i$

$y_i = y(t_i)$

$S_z(R, \Pi, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} R(\vec{r}(\xi_i))\Delta z_i$

$z_i = z(t_i)$

$\vec{F} = (P, Q, R)$

деф. Број I је криволинијски интеграл друге врсте израза $P(x,y,z)\,dx$ (односно $Q(x,y,z)\,dy$, односно $R(x,y,z)\,dz$, ако:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \Pi\in\mathcal{P})(\forall \xi\in\xi_\Pi)\ (\lambda(\Pi)<\delta \Rightarrow |I-S_x(P,\Pi,\xi)|<\varepsilon$$

односно $|I-S_y(Q,\Pi,\xi)|<\varepsilon$

односно $|I-S_z(R,\Pi,\xi)|<\varepsilon$)

$$\int_C P(x,y,z)\,dx$$

$$\int_C Q(x,y,z)\,dy$$

$$\int_C R(x,y,z)\,dz$$

деф $\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_C P\,dx+\int_C Q\,dy+\int_C R\,dz$

Ⓣ $\int_{\widehat{AB}} = -\int_{\widehat{BA}}$

Ⓣ $\underbrace{\;}_{C_1}\underbrace{\;}_{C_2}$ $\quad \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$

C – глатка регуларна крива

$$S_x(P,\Pi,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}P(r(\xi_i))\,\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}P(r(\xi_i))\cdot\underbrace{(x(t_{i+1})-x(t_i))}_{\text{Лагранж}}$$

$$\dot{x}(\eta_i)\underbrace{(t_{i+1}-t_i)}_{\Delta t_i}$$

$$\xi_i,\eta_i\in[t_i,t_{i+1}]$$

$\dot{x}$ непрекидно $\Rightarrow \dot{x}(\eta_i)\simeq\dot{x}(\xi_i)$

$$S_x(P,\Pi,\xi)\approx\sum_{i=0}^{n-1}P(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\cdot\dot{x}(\xi_i)\,\Delta t_i$$

$$\int_C P\,dx=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S_x(P,\Pi,\xi)=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}\sum_{i=0}^{n-1}P(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\,\dot{x}(\xi_i)\,\Delta t_i=$$

$$=\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))\cdot\dot{x}(t)\,dt$$

(T) Ако се крива C може поделити на коначно много регуларних глатких кривих, онда је:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_p^q \left(P(x(t),y(t),z(t))\cdot \dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot \dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot \dot{z}(t)\right)dt$$

$$\int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_n}$$

<u>пример</u> $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ позитивна ор. O_z

$$C \begin{cases} x^2+y^2+z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$z=-(x+y)$

$x^2+y^2+(x+y)^2=1$

$x^2+xy+y=1$

$A=C \quad \varphi=\frac{\pi}{4}$

$x=\frac{1}{\sqrt2}(x'-y')$

$y=\frac{1}{\sqrt2}(x'+y')$

$3x'^2+y'^2=\frac12$

$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt6}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi]$

$x'=\frac{1}{\sqrt6}\cos t$

$y'=\frac{1}{\sqrt2}\sin t$

$|\vec a|=1$

$\vec a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\alpha=\measuredangle(\vec a,\vec i)$

$\beta=\measuredangle(\vec a,\vec j)$

$\gamma=\measuredangle(\vec a,\vec k)$

$\dot{\vec r}$ - вектор тангенте криве

$\frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}=\left(\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}},\frac{\dot y}{\sqrt{\dots}},\frac{\dot z}{\sqrt{\dots}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$x=\frac{1}{\sqrt2}(x'-y')=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)$

$y=\frac{1}{\sqrt2}(x'+y')=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t+\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)$

$z=-(x+y)=\frac{2}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cos t$

$$C\begin{cases} x=\frac{1}{2\sqrt3}\cos t-\frac12\sin t \\ y=\frac{1}{2\sqrt3}\cos t+\frac12\sin t \\ z=\frac{1}{2\sqrt3}\cos t \end{cases}$$

$t\in[0,2\pi] \quad I=\int_0^{2\pi}(\dots)$

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_p^q (P\cdot\dot x + Q\cdot\dot y + R\cdot\dot z)\,dt =$$

$$= \int_p^q \Big(P\cdot \underbrace{\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}}_{\cos\alpha} + Q\,\underbrace{\frac{\dot y}{\sqrt{\dots}}}_{\cos\beta} + R\,\underbrace{\frac{\dot z}{\sqrt{\dots}}}_{\cos\gamma}\Big)\cdot \underbrace{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt}_{dS}$$

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C (P\cdot\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$\vec t = \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}$$

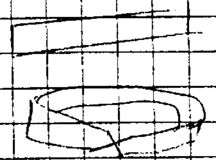
$\oint_C$ – интеграл по затвореној криви C

$$\vec F = (P, Q, R)$$

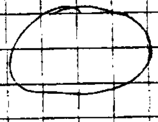
$$\int_C (\vec F\cdot\vec t)\,ds$$

Површински интеграли

Γ – двострана површ



- Површински интеграл I врсте



$\pi \in \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$

подела површи

$\mathcal{P}$ – скуп свих подела

Избор тачака: $T_i \in \Gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\lambda(\pi) = \max \operatorname{diam} \Gamma_i \quad i = 1, \dots, n$$

$\sigma(A)$ = површина површи A

$$f : \Gamma \to \mathbb{R} \qquad S(f, \pi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\cdot\sigma(\Gamma_i)$$

Деф. Број I је површински интеграл прве врсте ф-је f по површи Γ акко:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \Pi \in \mathcal{P})(\forall \xi \in \Xi_\Pi)\ (\lambda(\Pi)<\delta \Rightarrow |I-S(f,\Pi,\xi)|<\varepsilon)$$

$$I=\iint_\Gamma f(x,y,z)\,d\sigma$$

Γ^+ - једна страна површи

Γ^- - друга страна површи

(Т) $\iint_{\Gamma^+} f\,d\sigma = \iint_{\Gamma^-} f\,d\sigma$

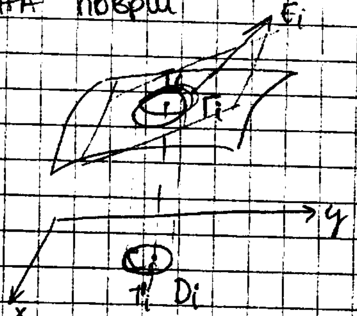
(Т) $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\sigma(\Gamma_1\cap\Gamma_2)=0$

$$\iint_\Gamma = \iint_{\Gamma_1} + \iint_{\Gamma_2}$$

Γ - глатка регуларна површ

f - непрекидна

$\sigma(\Gamma_i)$



$$\sigma(\Gamma_i)\approx P(E_i)=\frac{P(D_i)}{|\cos\gamma_i|}=P(D_i)\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}$$

$\gamma=\measuredangle$ између нормале Γ у T_i и $\vec{k}$

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x}(T_i)$$

$$q_i=\frac{\partial z}{\partial y}(T_i)$$

$$S(f,\Pi,\xi)\approx\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\;P(D_i)$$

$$\iint_\Gamma f\,d\sigma=\lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S(f,\Pi,\xi) = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\;P(D_i)=$$

$\lambda(\Pi)\to 0 \Rightarrow \max \operatorname{diam} D_i\to 0$

$$=\iint_D f(x,y,\underbrace{}_{z(x,y)})\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

D → пр. Γ на xOy

(Т) Ако је Γ глатка регуларна, $\Gamma: z = h(x,y)$, $(x,y) \in D$, онда је

$$\iint_\Gamma f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_\Gamma f(x,y,h(x,y)) \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

Површински интеграл друге врсте

$P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$

Γ

$\mathcal{P}$ – скуп свих подела површи, $\Pi \in \mathcal{P}$

ξ_Π – избор тачака за поделу Π

$\vec{n}$ – нормала површи

$\vec{n}$ – орт

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$S_{yz}(P,\Pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} P(T_i) \cdot \cos\alpha_i \cdot \sigma(\Gamma_i)$$

α_i – угао између $\vec{n}(T_i)$ и $\vec{i}$

$$S_{xz}(Q,\Pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} Q(T_i)\cos\beta_i\,\sigma(\Gamma_i)$$

$$S_{xy}(R,\Pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} R(T_i)\cos\gamma_i\,\sigma(\Gamma_i)$$

Деф. Број I је површински интеграл друге врсте израза $P(x,y,z)\,dy\,dz$ (односно $Q(x,y,z)\,dx\,dz$, односно $R(x,y,z)\,dx\,dy$) акко

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\Pi\in\mathcal{P})(\forall\xi\in\xi_\Pi)\left(\lambda(\Pi)<\delta \Rightarrow |I - S_{yz}(P,\Pi,\xi)| < \varepsilon\right.$$

односно $|I - S_{xz}(Q,\Pi,\xi)| < \varepsilon$

односно $\left.|I - S_{xy}(R,\Pi,\xi)| < \varepsilon\right)$

$$\iint_\Gamma P(x,y,z)\,dy\,dz,\quad \iint_\Gamma Q(x,y,z)\,dx\,dz,\quad \iint_\Gamma R(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$\iint_\Gamma P\,dy\,dz = \iint_\Gamma P\cos\alpha\, d\sigma$$

Деф $$\iint_\Gamma P\,dy\,z + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy \overset{def}{=} \iint_\Gamma P\,dy\,dz + \iint_\Gamma Q\,dx\,dz + \iint_\Gamma R\,dx\,dy$$

$$\iint_\Gamma P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\iint_\Gamma (\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma$$

$\alpha \to \pi - \alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

Т $\iint_{\Gamma^+} = -\iint_{\Gamma^-}$

Т $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\sigma(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$

$$\iint_\Gamma = \iint_{\Gamma_1} + \iint_{\Gamma_2}$$

може се рачунат покрпински

$\oiint$ – интеграл по затвореној површи

Γ: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

f – непрекидна, непрекидни парц. изводи првог реда

Γ^+ – горња страна површи

$$\iint_{\Gamma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

$\cos\gamma \geq 0$

$\vec{n} = (-p, -q, 1)$

$$\vec{n_0} = \Big(\underbrace{-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}_{\cos\alpha}, \underbrace{-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}_{\cos\beta}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}_{\cos\gamma}\Big)$$

$$\iint_{\Gamma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iint_D \big(-P(x,y,f(x,y))\,p - Q(x,y,f(x,y))\cdot q + R(x,y,f(x,y))\big)\,dx\,y$$

ако је $P=0$ $Q=0$

$$\iint_{\Gamma^+} R\,dx\,dy = \iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

$$\iint_{\Gamma^+} P\,dy\,dz = \iint_{D_1} P(g(y,z),y,z)\,dy\,dz$$

$\Gamma: x=g(y,z)$

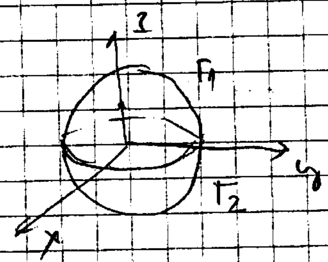
$(y,z)\in D$

$\Gamma^+: \cos\alpha>0$

$$\iint_{\Gamma^+} Q\,dx\,dz = \iint_{D_2} Q(x,h(x,z),z)\,dx\,dz$$

$\Gamma: y=h(x,z)$, $(x,z)\in D_2$

$\Gamma^+: \cos\beta>0$



$$\oiint_{\Gamma} P\,dx\,dy = \iint_{\Gamma_1} + \iint_{\Gamma_2}$$

MILAN

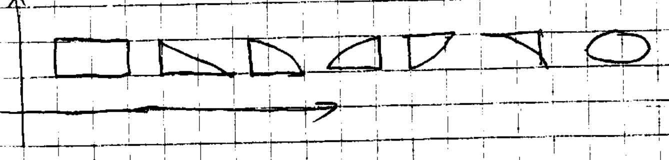
Три велике формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \; ; \; F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b F'(x) = F(b)-F(a)$$

1. Гринова формула (Green)

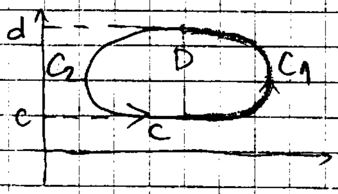
деф. $D\subset\mathbb{R}^2$ је елементаран скуп акко $\exists$ интервали $[a,b]$ и $[c,d]$ $(a<b, c<d)$ и ф-је $f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g_1,g_2\to[c,d]$ са непрекидним изводима на $[a,b]$ односно $[c,d]$, такве да је $f_1(x)\le f_2(x)$ за $x\in[a,b]$, $g_1(x)\le g_2(x)$ за $x\in[c,d]$ и да је $D=\{(x,y): a\le x\le b, f_1(x)\le y\le f_2(x)\} = \{(x,y): c\le y\le d, g_1(y)\le x\le g_2(y)\}$



① Нека је C граница области D. Где је D таква област која може да се разложи на коначно много елементарних области. Ако су ф-је $P=P(x,y)$ и $Q=Q(x,y)$, као и њихови парцијални изводи I реда, непрекидни на $D \cup C$, онда је

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \rightarrow \text{Гринова формула}$$

Доказ 1) D је елементарна



$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

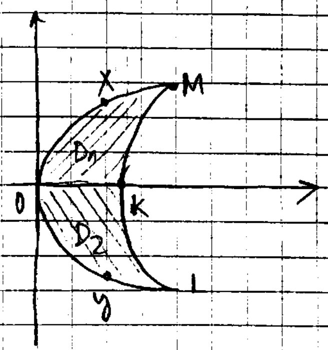
$C_1: \begin{cases} x = g_2(y) \\ y \in [c,d] \end{cases}$ $\quad C_2: \begin{cases} x = g_1(y) \\ y \in [d,c] \end{cases}$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d \left[Q(g_2(y),y) - Q(g_1(y),y)\right] dy =$$

$$= \int_c^d Q(g_2(y),y)\,dy - \underbrace{\int_c^d}_{=-\int_d^c} Q(g_1(y),y)\,dy = \int_{C_1} Q\,dy + \int_{C_2} Q\,dy = \oint_C Q\,dy$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_C P\,dx$$

2) D није елементарна



$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \oint_{OKMX} + \oint_{OYLK} =$$

$$\int_{OK} = -\int_{KO}$$

$$= \left(\cancel{\int_{OK}} + \int_{KM} + \int_{MXO}\right) + \left(\int_{OYL} + \int_{LK} + \cancel{\int_{KO}}\right) = \oint_C$$