ема о факторизацији полинома

...и полином $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $a_0\neq 0$, $n\geq 1$
важи факторизација

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле полинома.

Доказ: По теореми 1 (основна теорема алгебре: сваки полином чији је ... степен ≥ 1 има бар једну комплексну нулу), полином $P(x)$ има бар једну нулу комплексну, рецимо x_1.

По леми 1 (ако је x_0 нула полинома $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $a_0\neq 0 \wedge n\geq 1$, тада је $P(x)=(x-x_0)\cdot Q(x)$ где је $Q(x)$ полином степена $n-1$) важи:

$$P(x)=(x-x_1)\cdot Q_1(x), \text{ где је } st\{Q_1(x)\}=n-1$$

Ако је $n-1\geq 1$, (тј $n\geq 2$), на исти начин важи

$$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot Q_2(x), \text{ где је } st\{Q_2(x)\}=n-2$$

На крају је

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})(a_0x+b)$$

$$a_0x+b = a_0\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right) = a_0(x-x_n), \text{ тј.}$$

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Последица.

Ако би x_{n+1} била нула различита од претходних $(x_1, x_2, \dots)$, тада бисмо имали $P(x_{n+1})=0$

$$\underbrace{P(x_{n+1})=\underset{\neq 0}{a_0}\,\underset{\neq 0}{(x_{n+1}-x_1)}\,\underset{\neq 0}{(x_{n+1}-x_2)}\dots\underset{\neq 0}{(x_{n+1}-x_n)}}_{\text{контрадикција!!}}\neq 0!!$$

② Виетове формуле

Ако је $P(x) = ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ – квадратни полином и x_1, x_2 нуле $P(x)$, онда је:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

За $P(x) = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, $a_0\neq 0$,

према теореми о факторизацији полинома $\Rightarrow$

$$P(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$
$$= a_0\left[x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right],$$

па по принципу идентитета (упоређујемо коефицијенте овог и почетног полинома) слиједи:

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_0(x_1+x_2+x_3) = a_1 \\ a_0(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = a_2 \\ -a_0\, x_1x_2x_3 = a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

Генерално, за $P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_0\neq 0$ важи

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

7 Безуов став (теорема)

Остатак при деоби полинома $P(x)$ са $x-a$ једнак је $P(a)$

Доказ: према теореми 1 ($P(x)$ и $P_1(x)$ су различити од нула полинома; тада постоје полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ тако да важи:

(а) $P(x) = P_1(x)\,Q(x) + R(x)$

(б) $R(x) = 0$ $\underbrace{,}_{\text{или је}}$ $st\{R(x)\} < st\{P_1(x)\}$)

Дакле, према теореми 1:

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

$$\Downarrow x=a$$

$$P(a) = \underbrace{(a-a)\,Q(a)}_{0} + R$$

$$\Downarrow$$

$$R = P(a)$$

③ Детерминанте

Нека је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ квадратна матрица реда n

Детерминанта матрице A ($|A|$ или $\det A$) је број

$$|A| \overset{def}{=} \sum_{p} (-1)^{inv(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Где је $j_1, j_2, \ldots, j_n$ пермутација скупа $\{1,2,\ldots,n\}$, а збир је по свим пермутацијама тог скупа, тј имамо $n!$ сабирака

Особине

Деф 1: Нека је матрица A дефинисана $A=[a_{ij}]_{m,n}$. Транспонована матрица те детерм. је $A^T \overset{def}{=} [b_{ij}]_{n,m}$, где је $b_{ij} = a_{ji}$ $(i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,3,\ldots,m)$

Теорема 1: Нека је $A=[a_{ij}]_{n,n}$. Тада је детерм. матрице A, тј $A=|A^T|$, тј све што важи за врсте, важи и за колоне.

Теорема 2: Ако су елементи неке врсте (колоне) детерминанте $|A|$ помножени бројем λ, вредност те нове детерминанте је $\lambda|A|$

Доказ
$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p} (-1)^{inv(j_1,j_2,\ldots j_n)} (\lambda a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}) =$$

$$= \lambda \sum_{p} (-1)^{inv(j_1,j_2,\ldots j_n)} (a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}) = \lambda|A|$$

Теорема о сабирању детерминанти:

Детерминанте се сабирају на сл. начин

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{D_2} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказ: $D = \sum_{p} (-1)^{inv(j_1,j_2,\ldots j_n)} (a_{1j_1} + b_{1j_1}) a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} =$

по пермутацијама

$= \sum_{p} (-1)^{inv(j_1,j_2,\ldots j_n)} b_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D_1 + D_2$

4

Теорема 7

Детерминанта не мења вредност ако се елементима једне врсте (колоне) додају елементи друге врсте претходно помножене неким бројем

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= A + \lambda \cdot 0 = A$$

Дефиниција минора и кофактора

Минор M_{ij} који одговара елементу a_{ij} детерминанте $|A|$ је детерминанта која се добија из $|A|$ брисањем i-те врсте и j-те колоне.

Кофактор A_{ij} елемента a_{ij} је број $A_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

④ ЛАПЛАСОВА ТЕОРЕМА

Детерминанта $|A|$ реда n се рачуна на сл. начин

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

→ развијање детерминанте по i-тој врсти

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

→ развијање по j-тој колони

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad \text{за } k \neq i$$

елемент i-те врсте

неодговарајући кофактор тог елемента

Доказ: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$ прву врсту множимо са неодговарајућим кофакторима. Ако прву врсту заменимо другом, биће $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$

па је и детерминанта нула... (')

(5) Множење матрица

Нека су $A=[a_{ij}]_{m,n}$ и $B=[b_{jk}]_{n,p}$. Тада се њихов производ дефинише на сл. начин

$$AB \overset{def}{=} [c_{ik}]_{mp}, \text{ где је}$$

$$c_{ik}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$$c_{11}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & k \\ \begin{bmatrix} c_{1n} & & & \\ & & & \\ & & c_{ik} & \\ & & & \end{bmatrix} & i \end{array}$$

Теорема о својствима

1) $(AB)C = A(BC) \Rightarrow$ асоцијативност
2) $AB \neq BA$ не важи комутативност
3) $A(B+C) = AB+AC$
4) $(B+C)D = BD+CD$
5) $A\cdot\Theta = \Theta$

Теорема о својствима транспоноване

а) $(A^T)^T = A$
б) $(A+B)^T = A^T + B^T$
в) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$
г) $(AB)^T = B^T A^T$

Теорема 3

$|AB| = |A||B|$, A и B су квадратне матрице истог реда

$|\lambda A| = \lambda^n |A|$ кв матрица реда n

6 Инверзна матрица

Деф 1 (адјунгована матрица)

Нека је дата кв матрица $A=[a_{ij}]_{n,n}$

Адјунгована матрица те матрице је

$$\operatorname{Adj} A \overset{def}{=} [A_{ij}]^T_{n,n} = [A_{ji}]_{n,n}$$

где сам елемент замењујемо одређеним кофактором тог елемента, па то све транспонујемо

Теорема 1 (прва особина адј матрице)

$$A\cdot(\operatorname{adj}A)=(\operatorname{adj}A)\cdot A = |A|\cdot E$$

где је E јединична матрица истог реда као матрица A

Доказ:

због Лапласове теореме; јер нису одговарајући кофактори)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix} =$$

$$= |A|\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = |A|\cdot E$$

⇒ на исти начин се доказује и $(\operatorname{Adj}A)A=|A|\cdot E$

Последица $|\operatorname{adj}A| = |A|^{n-1}$ $(|A|\neq 0)$

Доказ: Из теореме 1: $A(\operatorname{adj}A)=|A|\cdot E \Rightarrow |A\cdot \operatorname{adj}A| = ||A|\cdot E| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A||\operatorname{adj}A| = A^n\cdot E \overset{|A|\neq 0}{\Rightarrow} |\operatorname{adj}A| = |A|^{n-1}$

Деф х

Нека је $A=[a_{ij}]_{n,n}$. Ако постоји матрица X таква да је $AX=XA=E$, где је E јединична матрица, онда за матрицу X кажемо да је инверзна матрица матрице A

$$X=A^{-1}$$

Важна теорема (доказати да је A^{-1} јединствена)

Ако матрица A има инверзну матрицу, тада је инверзна матрица јединствена

Доказ: Нека су X и Y инверзне за матрицу A. Тада је

$$AX=XA=E \quad \text{и} \quad AY=YA=E$$

Сада је $X=XE=X(AY)=(XA)Y=E\cdot Y=Y$, па је

$$X=Y$$

Теорема важна 2

Ако су A и B регуларне квадратне матрице истог реда, тада је AB регуларна матрица и важи:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Доказ: како је $|AB| = |A||B| \neq 0$ јер је $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$, то је и AB регуларно.

Даље је

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{(BB^{-1})}_{E}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

па је због јединствености $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Теорема 4 $\quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Доказ: $E = E^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T$

слично је $A^T(A^{-1})^T = E$, па је $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

* Заборављена теорема

Матрица A има инверзну матрицу акко је A регуларна матрица, тј $\det A \neq 0$ $(|A| \neq 0)$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A$$

$\Rightarrow$ $AA^{-1} = E$

$|AA^{-1}| = |E|$

$|A||A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow A \neq 0$

Доказ

$(\Rightarrow)$ Матрица A има инверзну A^{-1}, тј

$$AA^{-1} = E \Rightarrow |AA^{-1}| = |E| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A| \neq 0$, тј. A је регуларна

$(\Leftarrow)$ A је регуларна $\Rightarrow \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$ је дефинисана,

$$A \cdot A^{-1} = A\left(\frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{|A|} A \cdot (\operatorname{adj} A) = \frac{1}{|A|}|A|E = E,$$ па како је

инверзна јединствена, то је

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$$

⑨ Ранг матрице

Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Нека су матрице-врсте и матрице колоне

$A_1 = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$

$A_2 = [a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}]$

$A_m = [a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}]$

$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \ldots B_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

Неке од матрица-врста (колона), нпр $A_1, A_2, \ldots, A_p$ су линеарно зависне ако постоје бројеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ који нису сви једнаки нули тако да је:

$$(*) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_p A_p = \Theta$$

Ако $(*)$ важи само у случају $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, тада су $A_1, A_2, \ldots, A_p$ линеарно независне (нисмо у стању да изразимо једну преко осталих)

Деф 1. Изаберимо (на произвољан начин) r врста и r колона матрице A. Тада оне у свом пресеку образују детерминанту коју зовемо минор реда r матрице A (M_r) То r се креће од ($1 \leq r < \min\{m,n\}$)

Деф 2. Ако је минор M_r матрице A различит од 0 ($M_r \neq 0$), а сви минори вишег реда, ако постоје, су 0, тада кажемо да је r ранг матрице A и пишемо $\operatorname{rang} A = r$.

Ранг матрице Θ је $=0$.

Деф III. Ако је $\operatorname{rang} A = r > 0$ и минор $M_r \neq 0$, онда за тај минор кажемо да је базни минор матрице A, а врсте и колоне које га образују су базне врсте | колоне.

Теорема о базном минору

а) врсте | колоне које припадају базном минору су лин. независне

б) вр | кол које му не припадају су лин комб базних врста | колона

Доказ а) Ако би врсте биле лин зависне, тада бисмо имали да је $M_r = 0$, тј. M_r не би био базни минор.

б) Нека је базни минор

$$M_r = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & & \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$$

Покажимо да је врста $A_{r+1} = [a_{r+1,1} \; a_{r+1,2} \dots a_{r+1 \dots n}]$ лин комбинација врста $A_1, A_2, \dots, A_r$.

Уочимо минор

$$M_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,j} \end{vmatrix} = 0$$

гдје је $(j = 1, 2, \dots, n)$ (ако убацимо $j = 1, 2, \dots, r$ онда се понавља нека врста(кол))

$$\Rightarrow a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{rj} A_{rj} + a_{r+1,j} M_r = 0$$

= пошто је $M_r \neq 0$, онда

$$a_{r+1,j} = -\frac{A_{1j}}{M_r} a_{1j} - \frac{A_{2j}}{M_r} a_{2j} - \dots - \frac{A_{rj}}{M_r} a_{rj}$$

$\Rightarrow a_{r+1,r} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj}$ (гдје $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ не зависе од j), па за $j = 1, 2, \dots, n$ добијамо да је

$$A_{r+1} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_r A_r$$

Дакле, ранг матрице је = максималном броју лин нез врста (колона)

Деф IV (Елементарне трансформације матрице)

То су: - међусобна замена места двеју врста (кол)
- множење вр/кол бројем различитим од 0
- додавање некој од врста/колона лин комб других вр/кол

Деф V Кажемо да је матрица A еквивалентна B $(A \sim B)$, ако се од матрице A може добити B примјеном коначно много елементарних трансформација

$A \sim B$

Теорема (о рангу ~ матрица)

$A \sim B \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$

Теорема 3 (о трапезној)

Свака матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \neq \Theta$ се може помоћу елементарних трансформација свести на трапезну матрицу облика

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & t_{rn} \end{bmatrix}, \text{ где је } t_{11} t_{22} \dots t_{rn} \neq 0,$$

тј $\underline{\underline{\operatorname{rang} T = r}}$.

16 Кронекер – Капели

Посматрајмо систем

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

где су a_{ij}, b_i $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots,n)$ елементи поља реалних бројева, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ непознате из истог поља бројева.

Ознаке

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ – матрица система

$$A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{11} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ – проширена матрица система

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – матрица непознатих

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, B_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$$

Па се систем (*) може записати

$$\left.AX = B \text{ или } x_1B_1 + x_2B_2 + \ldots + x_nB_n = B\right\} (**)$$

Деф 1 Уређена n-торка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ је решење система (*), односно (**), ако се заменом $x_j = \alpha_j$ $(j = 1,2,\ldots n)$ у систему (*) долази до m тачних једнакости

$$\alpha_1B_1 + \alpha_2B_2 + \ldots + \alpha_nB_n = B$$

Кронекер-Капелијева теорема

Систем (*) и (**) има решења (сагласан је) акко

ранг A = ранг A_p

Доказ $(\Rightarrow)$

Нека је $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ решење система ⊛, тј $\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n = B$, па је матрица B линеарно зависна од $B_1, B_2, \dots, B_n$, тј A и A_p имају исти број лин независних колона $\Rightarrow$ rang A = rang A_p

$(\Leftarrow)$ Нека је rang A = rang $A_p \Rightarrow A$ и A_p имају исти број лин независних колона, па B није једна од њих, па постоје бројеви $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (од којих неки могу бити 0) тако да је

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n = B \text{, тј,}$$

тј уређена n-торка $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ је решење система ⊛

Теорема 2 о решењима

а) Ако је rang A = rang $A_p = n$, систем има јединствено решење

б) Ако је rang A = rang $A_p < n$, систем има ∞ решења.

Доказ

а) Нека је $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ решење система ⊛, тј

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_n B_n = B$$
$$\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots + \beta_n B_n = B$$

$$\xRightarrow{\text{одузимањем}} (\alpha_1 - \beta_1) B_1 + (\alpha_2 - \beta_2) B_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) B_n = \Theta$$

$\Rightarrow$ због линеарне независности $B_1, \dots B_n \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0 \wedge \alpha_2 - \beta_2 = 0 \wedge \dots \wedge \alpha_n - \beta_n = 0$, тј $\alpha = \beta$

б) rang A = rang $A_p \xRightarrow{T_1} \exists$ решење $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, тј

$$\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n = B$$

Ако је rang $A < n \Rightarrow B_1, \dots, B_n$ линеарно зависне, па је $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n = \Theta$, где сви $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нису једнаки нули (барем $1 \neq 0$)

Множењем друге једнакости са $\lambda \neq 0$ и сабирањем са првом, добија се

$$(\alpha_1 + \lambda\lambda_1) B_1 + (\alpha_2 + \lambda\lambda_2) B_2 + \dots + (\alpha_n + \lambda\lambda_n) B_n = B,$$

тј $(\alpha_1 + \lambda\lambda_1, \alpha_2 + \lambda\lambda_2, \dots, \alpha_n + \lambda\lambda_n)$ је решење, па како је λ произвољно, тј имамо ∞ много решења

⑧ Крамер

Нека је дат систем од n једначина са n непознатих: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Нека је D детерминанта система $(*)$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Означимо са D_k $(k=1,2,\dots,n)$ детерминанту која се добија из D заменом k-те колоне слободним члановима из $b_1, b_2, \dots, b_n$ система $(*)$:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

редимо

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Из претходне ознаке за систем $(*)$ важи

$$D \cdot x_k = D_k \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (**)$$

Доказ: Нека систем $(*)$ има решења.
Помножимо прву ј-ну система $(*)$ са A_{1k}, другу са A_{2k}, …, n-ту са A_{nk}, а затим све тако добијене ј-не саберемо

$$\overbrace{(a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + \dots + a_{n1}A_{nk})}^{=0 \text{ због Лапласа}}x_1 +$$
$$+ \underbrace{(a_{12}A_{1k} + a_{22}A_{2k} + \dots + a_{n2}A_{nk})}_{=0}x_2 + \dots +$$
$$+ \underbrace{(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk})}_{\neq 0}x_k + \dots +$$
$$+ (a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + \dots + a_{nn}A_{nk})x_n =$$
$$= b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}$$

$$\Longrightarrow D \cdot x_k = D_k$$

Дискусија: 1) Ако је $D \neq 0$: ⊛⊛ $\Rightarrow X_k = \frac{D_k}{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$\downarrow$

систем има јединствено решење само ако је $D \neq 0$

2) Ако је $D = 0$ и $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$D_k \neq 0$, тада систем нема решења!

Следи из ⊛⊛ $0 \cdot X_k = D_k \neq 0$

$0 \neq 0 \perp$

3) Ако су све детерминанте $= 0$

$D = D_1 = \ldots = D_n = 0$,

тада је систем без решења, или их има ∞ много

Деф 1 Нека је дата кв матрица $A=[a_{ij}]_{n,n}$. Матрица-колона (вектор) $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$, $X \neq \Theta$ је сопс. вектор матрице A ако постоји λ, тако да је

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

Број λ је сопствена вредност матрице A која одговара сопс. вектору X

Једначина (1) се може писати $AX-\lambda X=\Theta$, или $(A-\lambda E)X=\Theta$ (2)

Даље се једначина 2 може писати као систем

$$(2') \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Деф 2

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + \dots + \underset{\text{сл члан}}{\det A}$$

је полином степена n и зове се карактеристични полином матрице A.

Систем (2') има нетрив. решења $\iff$ $\det(A-\lambda E)=0$

– $\det(A-\lambda E)=0$ је карактеристична ј-на матрице A, а њена решења су сопствене вредности те матрице.

Теорема 1 (*) Различитим сопств. вредностима одговарају независни сопс. вектори.

– Нез сопствени вектори могу и да одговарају истој сопственој вредности, али њихов број није већи од реда те сопств. вредности

Теорема 2 а) Ако је λ_i сопс. вредност матрице, а X_i одговарајући сопс. вектор, тада је λ_i^k $(k \in N)$ сопс. вредност матрице A^k, а сопствени вектор је исти

б) Ако је A регуларна и λ_i сопс. вредност матрице A, тада је $\frac{1}{\lambda_i}$ сопс. вредност матрице A^{-1}, док су сопс вектори исти.

Доказ: Претпоставка $Ax_i = \lambda_i x_i$ → одговарајући сопс вектор
↓ сопс вред

Докажимо да је $A^k x_i = \lambda_i^k x_i$ индукцијом по k

$k=1$: $A^1 x_i = \lambda_i^1 x_i$ (T)

Нека је $A^k x_i = \lambda_i^k x_i$ за $k \in N$

$$A^{k+1} x_i = A(A^k \cdot x_i) = A(\lambda_i^k x_i) = \lambda_i^k (Ax_i) = \lambda_i^k (\lambda_i x_i) =$$
$$= \lambda_i^{k+1} x_i$$

б) $A^{-1} \backslash \quad Ax_i = \lambda_i x_i$

$$A^{-1}(Ax_i) = A^{-1}(\lambda_i x_i)$$

$$\underbrace{(A^{-1}A)}_{E} x_i = \lambda_i (A^{-1} x_i)$$

$$\lambda^{-1} \backslash \quad x_i = \lambda_i (A^{-1} x_i) \; \cancel{/\lambda_i}$$

$$\frac{1}{\lambda_i} x_i = A^{-1} x_i$$

$$A^{-1} x_i = \frac{1}{\lambda_i} x_i, \quad \lambda_i \neq 0 \text{ јер је } \lambda_1 \lambda_2 \ldots x_n = \det A \,(\neq 0)$$

Теорема о дијагонализацији матрице

Ако матрица $A = [a_{ij}]_{n,n}$ има n независних вектора, тада је

$S^{-1}AS = D$, где је S матрица чије су колоне сопс. вектори матрице A, а D је дијагонална матрица чији су елементи на дијагонали одговарајуће сопствене вредности A.

• последица:

$$S^{-1}AS = D \Rightarrow A = SDS^{-1} \Rightarrow A^k = SD^k S^{-1} \text{ јер је}$$

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2 S^{-1}$$

17

(12) Множење вектора скаларом

$\vec{a} \in V_3$, $\vec{a} \neq 0$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$

Дефиниција

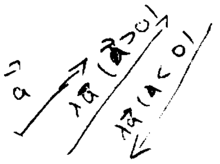
Вектор $\lambda\vec{a}$ је вектор такав да је његов интензитет $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$, истог је правца као вектор $\vec{a}$, док смер $\lambda\vec{a}$ зависи од λ, тј:

$\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ су истог смјера за $\lambda>0$

$\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ су различитог смера за $\lambda<0$

Узима се да је $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ $(\forall\lambda)$

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$



(13) Лин зависност и независност вектора

Теорема: Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни

Доказ: $(\Rightarrow)$

Нека је $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow a = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}$, тј. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни

$(\Leftarrow)$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow 1\cdot\vec{a} + (-\lambda)\vec{b} = 0$,

тј $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно зависни (јер је 1 коеф $\neq 0$)

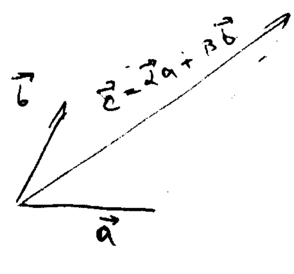
Теорема 2:

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су лин завусни $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су компланарни

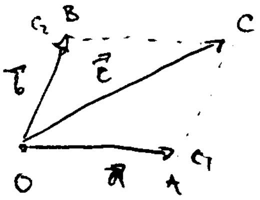
Доказ: $(\Rightarrow)$ $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су лин завусни $\Rightarrow \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$ и $\lambda_3 \neq 0$ (дпр)

$\Rightarrow \vec{c} = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}_{\alpha}\vec{a} - \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}_{\beta} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

па су $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни



(⇐)



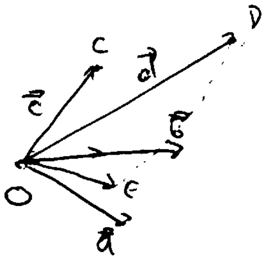
са слике $\vec c = \vec{OC} = \vec{OC_1} + \vec{OC_2} = \lambda_1 \vec a + \lambda_2 \vec b$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 \vec a + \lambda_2 \vec b + (-1)\vec c = \vec 0$, тј $\vec a, \vec b, \vec c$ су лин зависни

Теорема 3

Било која 4 вектора у простору су линеарно зависна (не постоје 4 лин независна вектора)

Доказ



Да су 3 вектора компланарна, доказ је очигледан.

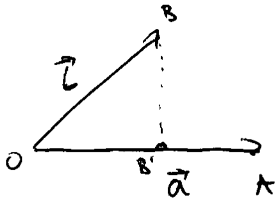
Нека је $ED \parallel OC$, где је E тачка равни која је одређена векторима $\vec a$ и $\vec b$. Са слике је $\vec d = \vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = \alpha \vec a + \beta \vec b + \gamma \vec c + (-1)\vec d = 0$,

тј. $\vec a, \vec b, \vec c$ су лин зависни вектори

14 Алгебарска вредност пројекције на вектор; скаларни производ вектора

Деф 1 Нека су дати вектори $\vec a$ и $\vec b$. Алгебарска вредност пројекције $\vec b$ на $\vec a$, у ознаци $Pr_{\vec a}\vec b$

$$Pr_{\vec a}\vec b \overset{def}{=} |\vec b|\cos(\vec a,\vec b)$$



$$Pr_{\vec a}\vec b = OB' = |\vec b|\cdot\cos\angle(\vec a,\vec b) \quad (>0)$$

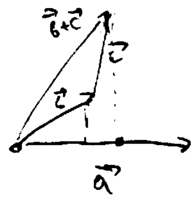
$Pr_{\vec a}\vec b = |\vec b|\cos\angle(\vec a,\vec b)$ (и то је <0 јер је $\cos<0$)

Теорема

Важе особине:

а) $Pr_{\vec a}(\vec b+\vec c) = Pr_{\vec a}\vec b + Pr_{\vec a}\vec c$

б) $Pr_{\vec a}(\lambda\vec b) = \lambda Pr_{\vec a}\vec b$



Деф скаларног производа

Нека су $\vec a,\vec b \neq 0$

Скаларни производ вектора $\vec a$ и $\vec b$, у ознаци $\vec a\cdot\vec b$ је број

$$\vec a\cdot\vec b \overset{def}{=} |\vec a||\vec b|\cdot\cos\angle(\vec a,\vec b)$$

Теорема о особинама скал. производа

1° $\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\, Pr_{\vec a}\vec b = \vec b\, Pr_{\vec b}\vec a$

2° $\vec a\cdot\vec b = \vec b\cdot\vec a$

3° $\cancel{|\vec a\vec b| = |\vec a\vec b|}$ $\quad |\vec a\vec b| \le |\vec a||\vec b|$

4° $\vec a\cdot\vec b = 0 \Leftrightarrow (\vec a=0 \vee \vec b=0 \vee \vec a\perp\vec b)$

5° $\lambda(\vec a\cdot\vec b) = (\lambda\vec a)\vec b = a\cdot(\lambda\vec b)$

6° $\vec a\cdot(\vec b+\vec c) = \vec a\cdot\vec b+\vec a\cdot\vec c$

7° $\vec a = (a_1, a_2, a_3)$

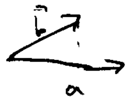
$\vec b = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec a\vec b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Доказ

1° $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot Pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot Pr_{\vec{b}}\vec{a}$

$Pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \cos\angle(\vec{a},\vec{b})$



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot Pr_{\vec{a}}\vec{b}$

6° $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) \overset{1°}{=} |\vec{a}|\, Pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) \overset{T1}{=} |\vec{a}|(Pr_{\vec{a}}\vec{b} + Pr_{\vec{a}}\vec{c}) =$

$|\vec{a}|\, Pr_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\, Pr_{\vec{a}}\vec{c} \overset{1°}{=} \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

Важно

7° $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$

$= a_1b_1\vec{i}\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\vec{k} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

20

15. Векторски производ вектора

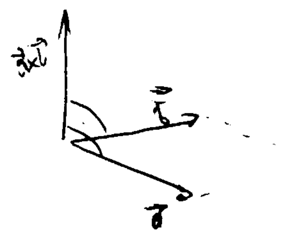
<u>Дефиниција вект про</u>

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq 0$), у ознаци $\vec{a} \times \vec{b}$ је вектор следећих особина:

1° $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормално на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а тројка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ образује триедар десне оријентације

2° $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Ако је $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$, тада је $\vec{a} \times \vec{b} = 0$



ТЕОРЕМА О СВОЈСТВИМА

1° $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2° $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \vee \vec{b}$ и $\vec{a}$ су колинеарни$)$

3° $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$

4° $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b}$

5° $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

6° $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада је

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

<u>Доказ</u>

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$

$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j}$ образују триедар десне оријентације па је $i \times j = \vec{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_2 \vec{i}\vec{j} + a_1 b_2 \vec{i}\vec{k} + a_2 b_1 \vec{j}\vec{i} + a_2 b_3 \vec{j}\vec{k} + a_3 b_1 \vec{k} \times \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \times \vec{j} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} =$

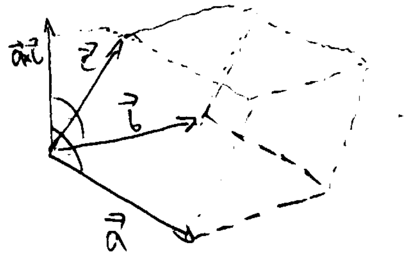
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

16 Мешовити производ вектора

Деф

Мешовити производ вектора $\vec a, \vec b, \vec c$ је број $(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$.

• Геометријска интерпретација



Нека $\vec a, \vec b$ и $\vec c$ нису компланарни и нека образују триедар десне орјентације (слика)

$$V = B \cdot H = |\vec a \times \vec b| \cdot H$$

$$V = |\vec a \times \vec b|\, |\vec c| \cos\measuredangle(\vec a \times \vec b, \vec c)$$

$$V = (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$$

За лијеву орјентацију је $V = -(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$;

генерално $V = |(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c|$

СВОЈСТВА

1° $(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = (\vec b \times \vec c)\cdot \vec a = (\vec c \times \vec a)\cdot \vec b = -(\vec b \times \vec a)\cdot \vec c = -(\vec c \times \vec b)\cdot \vec a =$

$= -(\vec a \times \vec c)\cdot \vec b$

Важи еквиваленција

$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = 0 \iff \vec a, \vec b, \vec c$ су компланарни

$\vec a = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec b = (b_1, b_2, b_3)$ $\vec c = (c_1, c_2, c_3)$

$$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказ: $(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

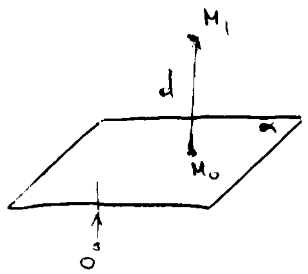
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1^{40}

23

17. Растојање тачке од равни



Дата је тачка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \alpha$

$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{u} = (A, B, C) \perp \alpha$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, M_0 је нормална пројекција тачке M_1 на раван α

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0 \, , \, y_1 - y_0 \, , \, z_1 - z_0)$$

$$M_0 \in \alpha \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

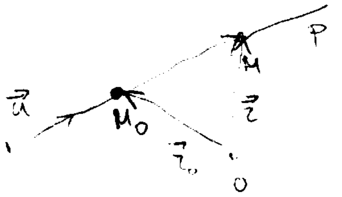
$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{u} = |\overrightarrow{M_0M_1}| \, |\vec{u}| \cdot \underbrace{\cos \measuredangle (\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u})}_{\pm 1 \text{ јер су } \overrightarrow{M_0M_1} \text{ и } \vec{u} \text{ колинеарни}} = d \cdot |\vec{u}| \cdot (\pm 1)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{u}| = d \cdot |\vec{u}| \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (\overbrace{Ax_0 + By_0 + Cz}^{= -D})|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

дакле $d = d(M, \alpha) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + D^2}}$

18. Права



$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ је вектор правца праве p

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ – фиксирана тачка

$M(x, y, z) \in p$ – произвољна тачка

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$M \in p$ акко су вектори $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ колинеарни, тј $\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a} = 0$, или

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = \vec{0}$$

Одавде је $\vec{r} \times \vec{a} = \underbrace{\vec{r}_0 \times \vec{a}}$, тј

$\vec{b}$ – фиксиран вектор за дату праву

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b}} \rightarrow \text{општи облик векторске једначине праве}$$

2° Из колинеарности вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ имамо, такође,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R},$$

t – то је као λ

тј. $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a_1, a_2, a_3)$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = x_0 + ta_1, \quad y = y_0 + ta_2, \quad z = z_0 + ta_3, \quad t \in \mathbb{R}$$

тј

$$p: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \rightarrow \text{параметарски облик ј-не праве}$$

3° Из претходног облика је

$$p: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (= t) \Rightarrow \text{канонски облик}$$

4° Права кроз 2 тачке

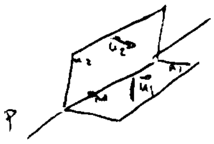
$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

или x_2 или y_2 или z_2

$$p: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5° Права као пресек 2 равни



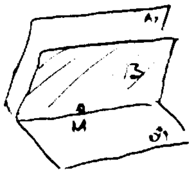
$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$p = \alpha_1 \cap \alpha_2 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n_1} &= (A_1, B_1, C_1) \\ \vec{n_2} &= (A_2, B_2, C_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\vec{a} = \lambda(\vec{n_1} \times \vec{n_2})}_{\text{вектор правца праве}}$$

6° прамен равни

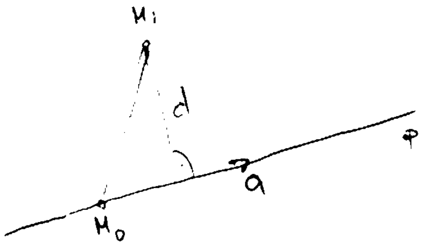


$p = \alpha_1 \cap \alpha_2$

$p \in \beta$

$$\beta : A_1x + B_1y + C_1z + D + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

19 Растојање тачке од праве



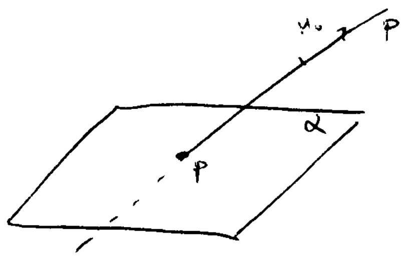
$M_0 \in p$

Површина паралелограма над векторима $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ се може рачунати на 2 начина:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ P &= |\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}| \\ 2)\ P &= |\vec{a}| \cdot d \end{aligned}\right\} |\vec{a}| \cdot d = |\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}|$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

20. Продор праве кроз раван



$$p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} = t$$

$$p: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, \quad t \in R$$

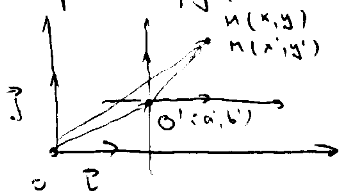
$$\alpha: Ax + By + Cz + D$$

Замењујући x, y, z из параметарских једначина у једначину равни α, одређујемо t које одговара тачки продора P. Затим, убацимо у параметарски облик и одредимо координате тачке P.

3^{00}

II Транслација и ротација коорд. система у равни

I Транслација



Нека је $O'(a,b)$ нови почетак транслираног коорд. система

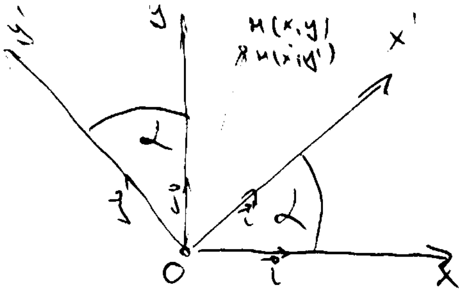
Ако изаберемо тачку $M(x,y)$ у старом систему, онда ће та тачка бити у новом систему $M(x',y')$

Са слике је јасно да је $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$, или

$$(x,y) = (a,b) + (x',y')$$
$$\Updownarrow$$
$$(x,y) = (a+x', b+y'), \text{ тј } \left.\begin{array}{l} x = a + x' \\ y = b + y' \end{array}\right\} \text{ зависност старих од нових}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x' = x - a \\ y' = y - b \end{array}\right\} \text{ зависност нових од старих}$$

II ротација



ротирано систем око O

Тачка $M(x,y)$, ако стоји на истом месту у новом систему има коорд. $M(x',y')$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \text{у старом}$$
$$\vec{OM} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \rightarrow \text{у новом}$$

$$\Rightarrow \quad x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \quad / \cdot \vec{i}$$
$$x\vec{i}\cdot\vec{i} + y\vec{j}\cdot\vec{i} = x'\vec{i}'\vec{i} + y'\vec{j}'\cdot\vec{i}$$
$$\Rightarrow \quad x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$\vec{i}'\cdot\vec{i} = |\vec{i}'||\vec{i}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{i}',\vec{i}) = \cos\alpha$$
$$\vec{j}'\cdot\vec{i} = |\vec{j}'||\vec{i}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{j}',\vec{i}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$$

Множењем са $\vec{j}$, аналогно добијамо

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Дакле,

релације трансформације су $\quad \begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{array}$

Алгебарске криве другог реда

АКДР је скуп тачака у равни чије x,y задовољавају ј-ну

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (1)$$

(A,B или C различито од 0) у неком декартовом правоуглом координатном систему

Извршимо ротацију система xOy у $x'Oy'$.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Једначина постаје

$$A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0 \quad (2)$$

Изаберимо α тако да је $2B_1=0$ у једначини (2)

како је коефицијент уз $x'y'$ ↗ $2B_1 = -2A\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) +$
$+ 2C\cos\alpha\sin\alpha = -A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha =$
$= (C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha$

Сада је $2B_1=0 \iff (C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0 \iff$

$\iff B \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B} \Rightarrow$ ако је $A=C$, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, тј $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Дакле, уз избор угла α, ј-на (2) је еквивалентна ј-ни

$$A_1x'^2 + C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F_1 = 0 \quad (3)$$

случај $A_1C_1 \neq 0$

додамо да би био потпун квадрат

$$A_1\left(x'^2 + 2x'\frac{D_1}{A_1} + \left(\frac{D_1}{A_1}\right)^2\right) + C_1\left(y'^2 + 2y'\cdot\frac{E_1}{C_1} + \left(\frac{E_1}{C_1}\right)^2\right) -$$
$$-\frac{D_1^2}{A} - \frac{E_1^2}{C_1} + F_1 = 0$$

$$A_1\left(x'+\frac{D_1}{A_1}\right)^2+C_1\left(y'+\frac{E_1}{C_1}\right)^2=G_1$$

$$x'+\frac{D_1}{A_1}=x'' \quad ; \quad y'+\frac{E_1}{C_1}=y''$$

па је $\quad A_1 x''^2 + C_1 y''^2 = G_1$

ТЕОРЕМА Алгебарске криве другог реда су:
елипса, хипербола, парабола, пар правих које се секу, пар паралелних правих, праве, тачке, празан скуп.