Вежба бр. 1 28.09.2006.

Полиноми

Деф. 1 $P_m(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0$ је полином m-тог степена променљиве $z\in C$ где су $a_m,\dots,a_1,a_0\in C$ коефицијенти полинома и $a_m\neq 0$.

Теор. 1 За свака два полинома $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ при чему је $m\geq n$ постоје јединствени полиноми $U(z)$ и $V(z)$ такви да је $P_m(z)=Q_n(z)\cdot U(z)+V(z)$ ($U(z)$ - количник, $V(z)$ - остатак)

Деф. 2 Комплексни број z_0 је корен (нула) полинома $P_m(z)$ ако је $P_m(z_0)=0$

Теор. 2 За сваки полином m-тог степена постоји m комплексних бројева тако да је

$$P_m(z)=a_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)$$

(факторизација полинома на чиниоце)

Деф. 3 Комплексан број z_0 је корен реда k полинома $P_m(z)$ ако је

$$P_m(z)=a_m(z-z_0)^k\cdot Q_{m-k}(z)$$

при чему z_0 није корен полинома $Q_{m-k}(z)$.

Теор. 3 Ако су коефицијенти полинома реални бројеви, а комплексан број $z_0=x+iy$ корен тог полинома онда је и $\bar{z}_0=x-iy$ корен тог полинома.

Теор. 4. Ако је z_0 корен реда k полинома $P_m(z)$ онда је z_0 корен реда k-1 полинома $(P_m(z))'$

Теор. 5 Број z_0 је корен реда k полинома $P_m(z)$ акко је z_0 корен следећих полинома $P_m(z), (P_m(z))', (P_m(z))'', \dots, (P_m(z))^{(k-1)}$

Теор. 6 Ако полином $a_nz^n+\dots+a_1z+a_0$ има целобројне коефицијенте, онда је рационални број $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости цели бројеви корен тог полинома ако је p делилац слободног члана a_0, а q делилац коефицијента a_n.

Теор. 7 Остатак при дељењу полинома $P_m(z)$ полиномом $(z-a)$ једнак је $P_m(a)$.

Зад. 1 Факторисати следеће полиноме:

а) $P(x)=2x^3+x^2+6x+3$

б) $P(x)=3x^4-11x^3+14x^2-6x-4$

Решење: а) $\frac{p}{q}$, $p|3$, $q|2$ $\Rightarrow$ $p\in\{\pm1,\pm3\}$, $q\in\{\pm1,\pm2\}$

$P(-\frac{1}{2})=0$

$P(x)=(x+\frac{1}{2})(2x^2+6)=0$

$P(x)=2\cdot(x+\frac{1}{2})(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$

б) $p|4$, $q|3$, $p/q\in\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3}\}$

$P(2)=0$

$P(-\frac{1}{3})=0$

$P(x)=3\cdot(x-2)(x+\frac{1}{3})(3x^2-2x+2)$

$P(x)=3\cdot(x-2)(x+\frac{1}{3})(x-(1-i))(x-(1+i))$

Зад. 2 Одредити коефицијенте a, b, c тако да полином $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ буде дељив са $(x+1)$ и $(x-2)$, а да при дељењу са $(x-4)$ даје остатак 10.

Решење: $P(-1)=0$ $\quad -1+a-b+c=0$

$P(2)=0 \quad 8+4a+2b+c=0$

$P(4)=10 \quad 64+16a+4b+c=10$

$$a-b+c=1 \;/\cdot(-1)$$
$$4a+2b+c=-8$$
$$16a+4b+c=-54$$

$a=-4$

$b=1$

$c=6$

Зад. 3 Наћи полином 5. степена са реалним коефицијентима ако је број 1 нула 2. реда, број $1+i$ нула 1. реда и ако подељен са $x+1$ даје остатак 10, а подељен са $x-2$ даје остатак 13.

Решење: нуле полинома су $1+i$, $1-i$ и 1 (двострука)

$P_5(x)=(x-1)^2\,(x-(1+i))(x-(1-i))\,(ax+b)=(x-1)^2(x^2-2x+2)(ax+b)$

$P_5(-1)=10 \qquad 4\cdot 5\,(-a+b)=10 \qquad a=2$

$P_5(2)=13 \qquad 1\cdot 2\,(2a+b)=13 \qquad b=\frac{5}{2}$

$P_5(x)=(x-1)^2\,(x^2-2x+2)\,(2x+\frac{5}{2})$

Зад. 4 Наћи реалне параметре a и b тако да је $1+i$ нула полинома $P(x)=12x^5+ax^4+50x^3+bx^2-14x+8$. За тако добијене вредности параметра a и b наћи остале нуле тог полинома и факторисати га.

Решење: ако је $1+i$ нула полинома $P(x)$, онда је и $1-i$ такође
$\Rightarrow$ полином мора бити дељив са $(x-(1+i))(x-(1-i))=x^2-2x+2$;
делимо полином $P(x)$ са x^2-2x+2

$(12x^5+ax^4+50x^3+bx^2-14x+8):(x^2-2x+2)=12x^3+(a+24)x^2+(2a+77)x+b+2a+106$

остатак $(2b+44)x-(2b+4a+204)=0$

$b=-22 \qquad a=-40$

$P(x)=12x^5-40x^4+50x^3-22x^2-14x+8$

$=P(x)=(x^2-2x+2)(12x^3-10x^2-3x+4)$

$\frac{p}{q}\in\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4},\dots\}$

$Q(\frac{1}{2})=0$

$12x^2-10x-8=0$

$x_1=-\frac{1}{2} \qquad x_2=\frac{4}{3}$

$P(x)=12\,(x-(1+i))(x-(1-i))\,(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})\,(x-\frac{4}{3})$

$P(x)=(x^2-2x+2)\,(2x-1)\,(2x+1)\,(3x-4)$

Зад. 5 а) Одредити полином $P_4(x)$ са реалним коефицијентима који има двоструку нулу -2, комплексну нулу $1-2i$ и за који је $P_4(-3)=40$.
б) Одредити полиноме $Q(x)$ и $R(x)$ за које важи идентитет
$P_4(x)=Q(x)\,(x+2)^3+R(x)$.

Решење: $P_4(x)=(x+2)^2\,(x-(1-2i))(x-(1+2i))\cdot a=(x+2)^2\,(x^2-2x+5)\cdot a$

$P_4(-3)=40 \Rightarrow a=2$

$P_4(x)=2(x+2)^2\,(x^2-2x+5)=Q(x)\,(x+2)^3+R(x)$

$(x^2-2x+5):(x+2)=x-4 \quad (13)$

$P_4(x)=2(x+2)^2\,((x+2)(x-4)+13)$

$P_4(x)=2\,(x+2)^3(x-4)+26(x+2)^2$

$Q(x)=2(x-4) \qquad R(x)=26(x+2)^2$

29. 09. 2006.

предавање бр. 2

Детерминанте

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

→ врста
детерминанта n-тог реда
→ колона

Особине детерминанти:

1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

5) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \alpha = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

7) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3+b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3+c_3' \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + = \begin{vmatrix} a_1+\alpha c_1 & a_2+\alpha c_2 & a_3+\alpha c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 5a_1-b_1 & 5a_2-b_2 & 5a_3-b_3 \end{vmatrix} = 0$ (ако једна врста(колона) линеарна комбинација претх. две)

10) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$

Зад. 1 Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}$

Решење: $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right)^2 - \left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^2 = 1$

Зад. 2 Решити детерминанту

Решење: $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Зад. 3 Израчунати користећи Сарусово правило

Решење: а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 2\cdot3\cdot3 + 1\cdot2\cdot1 + 3\cdot5\cdot4 - 3\cdot3\cdot1 - 2\cdot2\cdot4 - 1\cdot5\cdot3 = 18 + 2 + 60 - 9 - 16 - 15 = 10$

б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 0 - 9 - 2 = -7$

Зад. 4 $D = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + z^3 + z^6 - z^3 - z^3 - z^3 = z^6 - 2z^3 + 1 = (z^3-1)^2$

Зад. 5 Решити неједначину $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} < 0$.

Решење: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 2x - 16x - 20 + 3 + 5 - 12 - x^2 - 2x = -x^2 - 10x - 24 < 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 + 10x + 24 > 0$

$x_1 = -6 \quad x_2 = -4$

$x \in (-\infty, -6) \cup (-4, +\infty)$

Зад. 6 Доказати $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Решење: $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2a & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(-b-c-a)(-c-a-b) = (a+b+c)^3$

Нека је дата детерминанта n-тог реда

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

j-та колона

i-та врста

Сарусово правило важи за $n \le 3$

Деф. 1 Минор елемента a_{ij} у ознаци M_{ij} добија се када из D избацимо i-ту врсту и j-ту колону.

Деф. 2 Број $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где је M_{ij} минор елемента a_{ij}, а A_{ij} кофактор елемента a_{ij}.

Теор. 1 (развој детерминанте по елементима једне врсте) Вредност детерминанте D се рачуна по формули:

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{за} \quad i = \overline{1,n}$$

Зад. 7. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

а) развијајући је по 3. врсти,

б) развијајући је по 4. колони,

в) применом елементарних трансформација.

Решење: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

а) $D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 2 - 7 - 7 = -5$

б) $D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 36 - 7 - 25 = 5 \cdot (-1)$

в) $D = \begin{vmatrix} 3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -5$

Зад. 8. Израчунати детерминанту

Решење: $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & z & y \\ -y & -z & 0 & y \\ -z & -x & -y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & 0 & 0 & z \\ -x & 0 & z & x \\ -y & -z & 0 & y \\ -z & -x & -y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & z & x \\ 0 & -z & 0 & y \\ -z & -x & -y & 0 \end{vmatrix} = -z \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ -z & -x & -y \end{vmatrix} = -z \cdot (-z^3) = z^4$

Зад. 9 Решити једначину: $\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$ (-1) (-2) (-3)

Решење: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = 0$

$1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x^2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = 0 \iff 1 \cdot (1-x^2) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = 0$

$(1-x^2)(-9+3x^2-3) = 0$

$(1-x^2)(3x^2-12) = 0$

$x_{1,2} = \pm 1 \qquad x_{3,4} = \pm 2$

Зад. 10 Израчунати детерминанту n-тог реда, $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 4 \end{vmatrix}$ (-1)

Решење: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3(n-1) = 3n+1$

вежба бр. 3 05. 10. 2006.

Матрице

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ је матрица у ознаци $A[a_{ij}]_{m\times n}$ где су a_{ij} елементи матрице која има m врста и n колона.

Деф. 1 $A[a_{ij}]_{m\times n}$ и $B[b_{ij}]_{p\times q}$ су једнаке ако је $m=p$ и $n=q$ и $a_{ij}=b_{ij}$ за $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$, тј. ако су истог типа и ако су им одговарајући елементи једнаки.

Деф. 2 Нека су дате матрице $A=A[a_{ij}]_{m\times n}$ и $B[b_{ij}]_{m\times n}$. Матрица $C[c_{ij}]_{m\times n}$ је збир матрица A и B ако је $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ за $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$, у запису $C=A+B$

Теор. 1 (особине сабирања код матрица)
- 1° $A+B=B+A$ (комутативност)
- 2° $(A+B)+C=A+(B+C)$ (асоцијативност)
- 3° $A+\Theta=A$ (Θ - нула матрица)
- 4° $(\forall A)(\exists A_1)(A+A_1=\Theta)$ (A_1 - инверзни елеменат)

Деф. 3 Дата је матрица $A[a_{ij}]_{m\times n}$ и реалан број α. Производ дате матрице и броја је матрица $B[b_{ij}]_{m\times n}$ где је $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, у запису $B=\alpha\cdot A$

Теор. 2 (особине множења матрица константом)
- 1° $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha(\beta A)$
- 2° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- 3° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Деф. 4 Множење $A[a_{ij}]_{m\times n}$ и $B[b_{ij}]_{n\times p}$. Матрица $C[c_{ij}]_{m\times p}$ је производ матрица A и B ако је $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ за $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,p}$ у запису $C=A\cdot B$.

Деф. 5 Квадратне матрице истог типа су комутативне акко важи да је $A\cdot B=B\cdot A$.

Теор. 3 (особине множења матрица)
- 1° $(\alpha A)\cdot B=\alpha(A\cdot B)=A\cdot(\alpha B)$
- 2° $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
- 3° $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
- 4° $A=B \Rightarrow A\cdot C=B\cdot C$
- 5° $A\cdot\Theta=\Theta\cdot A=\Theta$

Зад. 1 Наћи све производе датих матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad C=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3} \quad F=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Решење:
$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\cdot2+1\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot2+1\cdot3 & 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot1 \\ 1\cdot2+0\cdot3 & 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$C\cdot D=\begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\-6&3&0\end{bmatrix}$$

$$D\cdot C=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

Зад. 2 Дате су матрице $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}$. Израчунати $AB-BA$

Решење:
$$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&9&3\\6&8&4\\-1&11&4\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&11&13\\0&-6&-4\\6&6&9\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-2&9&3\\6&8&4\\-1&11&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&11&13\\0&-6&-4\\6&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&-2&-10\\6&14&8\\-7&5&-5\end{bmatrix}$$

Зад. 3 Наћи $(3A+2B)\cdot C$ $A=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-2&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&-3&0&2\\1&-1&4&0\\-1&1&-1&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\\7&8\end{bmatrix}$

Решење:
$$(3A+2B)\cdot C=\left(\begin{bmatrix}3&6&0&-3\\0&3&-6&3\\3&0&3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-6&0&4\\2&-2&8&0\\-2&2&-2&0\end{bmatrix}\right)\cdot C$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\2&1&2&3\\1&2&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot3+0\cdot5+1\cdot7&1\cdot2+0\cdot4+0\cdot6+1\cdot8\\2\cdot1+1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7&2\cdot2+1\cdot4+2\cdot6+3\cdot8\\1\cdot1+2\cdot3+1\cdot5+0\cdot7&1\cdot2+2\cdot4+1\cdot6+0\cdot8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&10\\36&44\\12&16\end{bmatrix}$$

Деф. 6 Дата је матрица $A[a_{ij}]_{m\times n}$. Матрица $B[b_{ij}]_{n\times m}$ где је $(B[b_{ij}])$ $b_{ij}=a_{ji}$ за $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$ је транспонована матрица матрице A и означава $B=A^T$

Пример: $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&0\end{bmatrix}$ $\quad B=A^T=\begin{bmatrix}2&-1\\1&3\\0&0\end{bmatrix}$

Теор. 4 (особине транспонована матрица)

1° $(A^T)^T=A$

2° $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$

3° $(A+B)^T=A^T+B^T$

4° $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

Деф. 7 За сваку квадратну матрицу важи да је
$$A^m=\begin{cases}A^{m-1}\cdot A=A\cdot A^{m-1}, & m\in N\\ E, & m=0\end{cases}$$
где је E јединична матрица при чему је $A\cdot E=E\cdot A=A$ $\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$

Деф. 8. Нека је дата матрица $A[a_{ij}]_{m\times m}$. Ако је

$A^2=E$ онда је матрица инволутивна

$A^2=A$ онда је идемпотентна

$A=A^T$ онда је симетрична

$A=-A^T$ онда је косо симетрична

$A\cdot A^T=E$ онда је ортогонална

Зад. 4 Ако је $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$ и матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ израчунати $P(A)$.

Решење: $P(A) = 3A^2 - 5A - 2E$

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Зад. 5 Наћи све матрице 2. реда које су идемпотентне.

Решење: $A^2 = A$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a^2 + bc = a$

$b(a+d) = b$

$c(a+d) = c$

$bc + d^2 = d$

i) $a + d \neq 1$

$b = 0 \quad c = 0$

$a^2 = a \quad a = 1 \lor a = 0$

$d^2 = d \quad d = 1 \lor d = 0$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lor A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $a + d = 1$

$d = 1 - a \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}, \ a, b, c \in R \land a^2 + bc = a$

вежба бр. 4 — 06. 10. 2006.

Инверзне матрице

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Инверзна матрица постоји само за квадратне матрице. Матрица A је инвертибилна акко постоји матрица X таква да важи $A \cdot X = X \cdot A = E$, у ознаци $X = A^{-1}$.

Деф. 1 Адјунгована матрица матрице A је

$$adj A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

где су $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ кофактори елемената за $i, j = \overline{1, n}$

Деф. 2 Ако је $\det A \neq 0$ A је регуларна матрица.
Ако је $\det A = 0$ A је сингуларна матрица.

Теор. 1 Матрица A је инвертибилна акко је регуларна и тада је $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A$ (формула за рачунање инверзне матрице)

Теор. 2 (особине инверзних матрица)

1° $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

2° $(A^{-1})^{-1} = A$

3° $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$, $k \in N$

4° $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5° $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

6° $(tA)^{-1} = t^{-1} A^{-1}$, $t \in R \setminus \{0\}$

Зад. 1 Израчунати A^{-1}, $A=\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{bmatrix}$

Решење: $\det A=\begin{vmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-3&1\\-5&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&-3\\3&-5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-4&5\\-5&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&5\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&-4\\3&-5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-4&5\\-3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&5\\2&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&-4\\2&-3\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}8&5&-1\\-29&-18&3\\11&7&-1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}8&-29&11\\5&-18&7\\-1&3&-1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}8&-29&11\\5&-18&7\\-1&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{bmatrix}$$

Зад. 2 Одредити A^{-1}, $A=\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{bmatrix}$

Решење: $\det A=\begin{vmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&9&5\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}4&9&5\\2&2&1\\1&2&1\end{vmatrix}=1$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{bmatrix}$$

Матричне једначине

$A^{-1}/\ A\cdot X=B$ (X непозната матрица)
$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}B$
$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$
$X=A^{-1}\cdot B$

$Y\cdot A=B\ /\cdot A^{-1}$ (Y непозната матрица)
$Y\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$
$Y\cdot E=B\cdot A^{-1}$
$Y=B\cdot A^{-1}$

Зад. 3 Решити матричну једначину $AX^{-1}B-C=AX^{-1}$

Решење: $AX^{-1}B-AX^{-1}=C$
$A^{-1}/\ AX^{-1}(B-E)=C$
$X^{-1}(B-E)=A^{-1}C\ /\ (B-E)^{-1}$
$X^{-1}=A^{-1}C(B-E)^{-1}$
$(X^{-1})^{-1}=(A^{-1}C(B-E)^{-1})^{-1}$
$X=(A^{-1}C(B-E)^{-1})^{-1}$
$X=(B-E)C^{-1}A$

Зад. 4 Решити матричну једначину $A+B(X^T)^{-1}=E+A(X^{-1})^T$

Решење: $A+B(X^T)^{-1}=E+A(X^{-1})^T$
$A-E=A(X^{-1})^T-B(X^T)^{-1}$
$A-E=A(X^T)^{-1}-B(X^T)^{-1}$
$(A-B)^{-1}/\ (A-B)(X^T)^{-1}=A-E$
$(X^T)^{-1}=(A-B)^{-1}(A-E)\ /^{-1}$
$X^T=((A-B)^{-1}(A-E))^{-1}$
$X^T=(A-E)^{-1}(A-B)\ /^T$
$(X^T)^T=((A-E)^{-1}(A-B))^T$
$X=((A-E)^{-1}(A-B))^T$

Зад. 5 Решити матричну једначину $AXB = (X^{-1}+B)^{-1}\cdot B$

Решење:

$$AXB = (X^{-1}+B)^{-1}B \quad / \, B^{-1}$$
$$AX = (X^{-1}+B)^{-1}$$
$$(AX)^{-1} = X^{-1}+B$$
$$X^{-1}A^{-1} = X^{-1}+B$$
$$X^{-1}A^{-1} - X^{-1} = B$$
$$X^{-1}(A^{-1}-E) = B$$
$$X = (A^{-1}-B)B^{-1}$$
$$\underline{\det A = 9}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \qquad A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 11 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-E = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 11 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 & -4 & 11 \\ 0 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 8 & -38 & 7 \\ -30 & -6 & 21 \\ -36 & 36 & -18 \end{bmatrix}$$

Зад. 6 Решити матричну једначину $(X-A)(B^{-1}XA-B)^{-1} = B$

Решење:

$$(X-A)(B^{-1}XA-B)^{-1} = B \quad / \cdot (B^{-1}XA-B)$$
$$X-A = AX-B^2$$
$$B^2-A = XA-(A)X$$
$$B^2-A = X(A-E) \quad / \, (A-E)^{-1}$$
$$(B^2-A)(A-E)^{-1} = X$$

Ранг матрице

Деф. 3 Ранг матрице $A_{m\times n}$ једнак је максималном броју линеарно независних врста (колона) те матрице (a, b, c су линеарно зависни ако постоје α, β, γ так да важи $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$)

Деф. 4 Елементарне трансформације на матрицама су:
1° замена места две врсте или колоне
2° множење врсте или колоне константом
3° додавање једној врсти или колони линерне комбинације осталих врста или колона

Деф. 5 Ако се после примене коначно много елементарних трансформација од матрице A добије матрица B тада кажемо да су матрице A и B еквивалентне у ознаци $A \sim B$

Теор. 3 Ако је $A \sim B$ онда је ранг матрице A једнак рангу матрице B у запису $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$

Зад. 7 Одредити ранг матрице $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 & -11 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & -16 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Решење: $A \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 & -11 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & -16 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-3) \\ 1 \\ (-4) \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -14 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 20 & 0 & -28 & -20 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-1) \\ (-4) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

број линеарно независних врста 2 $\Rightarrow$ rang $A=2$

Зад. 8 Одредити ранг матрице $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & a & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-3) \end{matrix}$

Решење: $A \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ a-8 & -6 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & a+9 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a-2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a+6 & 0 \end{bmatrix}$

ако $a=2 \vee a=-6$ онда rang $A=3$

вежба бр. 5 12.10.2006.

Системи линеарних једначина

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in R$ коефицијенти
$b_j \in R$ слободан члан
x_i непознате

$A \cdot X = B$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A_p=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A је матрица система
X је матрица колона непознатих
B је матрица колона слободних чланова
A_p је проширена матрица система

i) ако је $m=n$ систем (1) је квадратан
ii) ако је $b_1=b_2=\dots=b_m=0$ систем (1) је хомоген; ако $\exists b_i \neq 0$ систем нехомоген
iii) ако систем (1) има решења каже се да је решив (сагласан, непротивуречан); у супротном кажемо да је нерешив (несагласан, противуречан)
iv) ако систем (1) има само једно решење онда се каже да има јединствено решење

Деф. 1 Уређена n-торка реалних бројева $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ је решење система ако се заменом $x_i=\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$ свака једначина датог система преводи у идентитет.

Гаусов метод елиминације

Деф. 1 Елементарне трансформације система једначина су:
1° замена места
2° множење једне једначине константом различитом од нуле
3° тачка 2° и додавање некој другој једначини система

Теор. 1 Када се на систем примењује коначно много пута елементарне трансформације добије се систем еквивалентан датом систему.

Зад. 1 Применом Гаусовог метода решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7\\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2\\ x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Решење:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 8 & -7\\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6\\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -6 & -4 & 6\\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6\\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-2)\\ (-3)\\ (-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & \boxed{1} & 21 & 10 & -6\\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16\\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6\\ 0 & 0 & 96 & 48 & -40\\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{8}\\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6\\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 42 & 30 & -31 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-5)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6\\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6\\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -18 & 0 & -6 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6\\ x_2 + 21x_3 + 10x_4 &= -6\\ 12x_3 + 6x_4 &= -5\\ -18x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0\\ x_2 &= 2\\ x_4 &= -\tfrac{3}{2}\\ x_3 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Зад. 2 Решити систем.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3\\ 9x_1 + x_2 + 9x_3 - 5x_4 &= 1\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5\\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Решење:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & \boxed{1} & 6 & -1 & 7\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-3)\\ (-1)\\ (-2)\\ (-2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -1 & 7\\ -19 & 0 & -16 & 8 & -18\\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6\\ -12 & 0 & -9 & 6 & -9\\ -11 & 0 & -10 & 4 & -12 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{2}\\ \cdot\frac{1}{3}\\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -1 & 7\\ -19 & 0 & -16 & 8 & -18\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3\\ -4 & 0 & -3 & 2 & -3\\ -11 & 0 & -10 & 4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 19\\ 4\\ 11 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -1 & 7\\ \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -3\\ -19 & 0 & -16 & 8 & -18\\ -4 & 0 & -3 & 2 & -3\\ -11 & 0 & -10 & 4 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -1 & 7\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -35 & -30 & -75\\ 0 & 0 & -7 & -6 & -15\\ 0 & 0 & -21 & -18 & -45 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-5)\\ \\ (-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & 6 & -1 & 7\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -7 & -6 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7\\ x_1 - x_3 - 2x_4 &= -3\\ -7x_3 - 6x_4 &= -15 \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{15 - 6x_4}{7}$$

$$x_1 = x_3 + 2x_4 - 3 = \frac{8x_4 - 6}{7}$$

$$x_2 = \frac{1 - 13x_4}{7}$$

решење система је уређена четворка

$$\left(\frac{8\alpha - 6}{7}, \frac{1 - 13\alpha}{7}, \frac{15 - 6\alpha}{7}, \alpha\right), \alpha \in R$$

Крамерово правило

Теор. 1 Нека је дат квадратни систем линеарних једначина у матричном облику $A \cdot X = D$ при чему су X и B матрице колона и нека детерминанта D_k, $k=\overline{1,n}$ се добијају тако што се у детерминанти $D=\det A$ колона k замени колоном слободних чланова (в) B. Онда су елементи матрице колоне X редом једнаки $x_k = \frac{D_k}{D}$ за $k=\overline{1,n}$

1° $D \neq 0$ систем има јединствено решење $x=\frac{D_1}{D}$, $y=\frac{D_2}{D}$, $z=\frac{D_3}{D}$

2° $D=0$ i) $D_1=D_2=D_3=0$ систем је или неодређен или немогућ

ii) ако бар једно $D_i \neq 0$ систем је немогућ

(ово правило користимо код система у којима се јављају параметри)

Зад. 1 Применом Крамерове теореме решити систем линеарних једначина у зависности од реалних параметара.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (1-m)x_3 &= m \\ (1+m)x_1 + (-x_2) + x_3 &= -1 \qquad m \in R \\ x_1 + (m-1)x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Решење:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m-2)^2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1-m \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & m & 1-m \\ 1+m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(m+1)(m-2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1+m & -1 & -1 \\ 1 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = -(m+1)(m-1)(m-2)$$

i) $m \neq -1 \wedge m \neq 2$: $D \neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 0 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{m-2} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{(m-1)}{m-2} \qquad \left(0, -\frac{1}{m-2}, -\frac{(m-1)}{m-2}\right)$$

ii) $m=-1$: $D=0$, $D_1=D_2=D_3=0 \Rightarrow$ систем је неодређен или немогућ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

систем је неодређен

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - x_3$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - \alpha$$

$$x_1 = -1 - x_2 - 2x_3 = -\frac{2}{3} - \alpha$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{2}{3} - \alpha, -\frac{1}{3} - \alpha, \alpha\right), \ \alpha \in R$$

iii) $m=2$: $D=0$, $D_1=D_2=D_3=0 \Rightarrow$ систем је неодређен или немогућ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + (-x_2) + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\lightning$ систем је немогућ

Зад. 2 Решити систем применом Крамеровог правила

$$\begin{aligned} (1+p)x + y + z &= 1 \\ x + (1+p)y + z &= p \qquad p \in R \\ x + y + (1+p)z &= p^2 \end{aligned}$$

Решење:
$$D=\begin{vmatrix}1+p & 1 & 1\\ 1 & 1+p & 1\\ 1 & 1 & 1+p\end{vmatrix}=p^2(3+p)$$
$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ p & 1+p & 1\\ p^2 & 1 & 1+p\end{vmatrix}=p(2-p^2)$$
$$D_2=\begin{vmatrix}1+p & 1 & 1\\ 1 & p & 1\\ 1 & p^2 & 1+p\end{vmatrix}=p(2p-1)$$
$$D_3=\begin{vmatrix}1+p & 1 & 1\\ 1 & 1+p & p\\ 1 & 1 & p^2\end{vmatrix}=p(p^3+2p^2-p-1)$$

i) $p\neq 0 \wedge p\neq -3$: $D\neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење

$y=\frac{D_2}{D}=\frac{2p-1}{p(3+p)}$ $x=\frac{D_1}{D}=\frac{2-p^2}{p(3+p)}$ $z=\frac{D_3}{D}=\frac{p^3+2p^2-p-1}{p(3+p)}$

$\left(\frac{2-p^2}{p(3+p)}, \frac{2p-1}{p(3+p)}, \frac{p^3+2p^2-p-1}{p(3+p)}\right)$

ii) $p=0$: $D=0$, $D_1=D_2=D_3=0 \Rightarrow$ систем је неодређен или немогућ

$x+y+z=1$

$x+y+z=0$ $\lightning$ систем је немогућ

iii) $p=-3$: $D=0$, $D_1\neq 0 \Rightarrow$ систем је немогућ

Зад. 3 Решити систем применом Крамеровог правила:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1\\ 3x+(a+1)y+3z &= a \quad a\in\mathbb{R}\\ 2x+2y+(a-1)z &= 1\end{aligned}$$

Решење:
$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & a+1 & 2\\ 2 & 2 & a-1\end{vmatrix}=(a-2)(a-5)$$
$D_1=3(a-2)$

$D_2=(a-6)(a-2)$

$D_3=2-a$

i) $a\neq 2 \wedge a\neq 5$: $D\neq 0 \Rightarrow$ систем има јединствено решење

$(x_1, x_2, x_3)=\left(\frac{3}{a-5}, \frac{a-6}{a-5}, \frac{1}{5-a}\right)$

ii) $a=2$: $D=0$, $D_1=D_2=D_3=0 \Rightarrow$ систем је неодређен или немогућ

$x+y+2z=1$ $\quad$ $x+y+2z=1$

$3x+3y+3z=2$ $\quad$ $-3z=-1$ $\quad$ систем је неодређен

$2x+2y+z=1$ $\quad$ $-3z=-1$ $\quad$ $\left(\frac{1}{3}-\alpha, \alpha, \frac{1}{3}\right), \alpha\in\mathbb{R}$

iii) $a=5$: $D=0$, $D_1=9\neq 0 \Rightarrow$ систем је немогућ

вежбе бр. 6 $\quad$ 12. 10. 2006

Кронекер - Капелова теорема

$AX=B$ $\quad$ A_p - проширена матрица система

Теор. 1 Ако је ранг матрице A једнак рангу проширене матрице система онда је он сагласан и обрнуто. Ако је $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_p=n$ онда систем има јединствено решење. Ако је $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A_p=r<n$ онда систем има бесконачно много решења.

Зад. 1 У зависности од вредности реалних параметара решити систем применом Кронекер - Капелијеве теореме.

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2\\
-2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1\\
3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2\\
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= p\\
7x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

Решење:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -2 & -1\\ 3 & -3 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 2 & -2 & p\\ 7 & -5 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 9 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 6 & -4 & p-4\\ 0 & 2 & 12 & -4 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 6 & -4 & p-4\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

i) $p=3$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3 < 4 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2\\
-x_2 - 3x_3 &= 3\\
6x_3 - 4x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{1}{4}(-10\alpha-5), -3\alpha-3, \alpha, \tfrac{1}{4}(6\alpha+1)\right), \ \alpha \in R$$

ii) $p \neq 3$: $\operatorname{rang} A = 3 \neq 4 = \operatorname{rang} A_p \Rightarrow$ систем није сагласан

Зад. 2

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2\\
3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1\\
3x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 13x_4 + 3x_5 &= -8\\
9x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 + p^2x_5 &= p+1
\end{aligned}
$$

Решење:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 & -1\\ 3 & -7 & 9 & -13 & 3 & -8\\ 9 & -1 & -4 & 5 & p^2 & p+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & -7 & -11 & 0 & -7\\ 0 & -10 & -14 & -22 & 0 & -14\\ 0 & -10 & -14 & -22 & p^2-9 & p+7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & -7 & -11 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2-9 & p-3 \end{array}\right]
$$

i) $p \neq 3 \wedge p \neq -3$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3 < 5 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2\\
-5x_2 + 7x_3 - 11x_4 &= 7\\
(p^2-9)x_5 &= p-3
\end{aligned}
$$

$$\left(\tfrac{1}{5}\left(3\alpha - 4\beta - \tfrac{5}{p+3} + 3\right), \tfrac{1}{5}(7\alpha - 11\beta + 7), \alpha, \beta, \tfrac{1}{p+3}\right), \ \alpha, \beta \in R$$

ii) $p=3$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 2 < 5 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2\\
-5x_2 + 7x_3 - 11x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

$$\left(\tfrac{1}{5}(3\alpha - 4\beta - 5\gamma + 3), \tfrac{1}{5}(2\alpha - 11\beta + 7), \alpha, \beta, \gamma\right), \ \alpha, \beta, \gamma \in R$$

iii) $p=-3$: $\operatorname{rang} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rang} A_p \Rightarrow$ систем није сагласан

Зад. 3

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3\\
x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 &= 1\\
-x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 12x_4 - 11x_5 &= q\\
5x_1 + x_2 + 2x_3 + px_5 &= -7\\
x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 18x_4 - 13x_5 &= 13
\end{aligned}
$$

Решење:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & -2 & -2 & 3 & -1 & 1\\ -1 & 7 & -10 & 12 & -11 & q\\ 5 & 1 & 2 & 0 & p & -7\\ 1 & 11 & -14 & 18 & -13 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -4 & 5 & -4 & 4\\ 0 & 6 & -8 & 10 & -8 & q-3\\ 0 & 6 & -8 & 10 & p-15 & 8\\ 0 & 12 & -16 & 20 & -16 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -4 & 5 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

i) $p=7$, $q=11$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p < 5 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3\\
3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

$$\left(\tfrac{1}{5}(-2\alpha + \beta - 5\gamma - 5), \tfrac{1}{3}(4\alpha - 5\beta + 4\gamma + 4), \alpha, \beta, \gamma\right)$$

ii) $p=7$, $q \neq 11$: $\operatorname{rang} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rang} A_p \Rightarrow$ систем није сагласан

iii) $p \neq 7,\ q = 11$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3 < 5 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3 \\ 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 4 \\ (p-7)x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\tfrac{1}{3}(-2\alpha + \beta - 5),\ \tfrac{1}{3}(4\alpha - 5\beta + 4),\ \alpha,\ \beta,\ 0\right),\ \alpha, \beta \in R$$

iv) $p \neq 7,\ q \neq 11$: $\operatorname{rang} A = 3 \neq 4 = \operatorname{rang} A_p \Rightarrow$ систем није сагласан

Зад. 4

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= p+2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= p \\ 2x_1 - 17x_2 + 6x_3 + qx_4 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Решење:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 1 & 1 & p+2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & p \\ 2 & -17 & 6 & q & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & 1 & p+2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & p \\ 2 & -17 & 6 & q & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 & -4 & p-3 \\ 0 & 11 & -4 & -4 & p-3 \\ 0 & -11 & 4 & q-2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 & -4 & p-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q-6 & p-2 \end{array}\right]$$

i) $q = 6 \wedge p = 2$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p < 4 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 11x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\tfrac{1}{11}(\alpha + \beta + 8),\ \tfrac{1}{11}(4\alpha + 4\beta - 1),\ \alpha,\ \beta\right)\ \alpha, \beta \in R$$

ii) $q = 6 \wedge p \neq 2$: $\operatorname{rang} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rang} A_p \Rightarrow$ систем није сагласан

iii) $q \neq 6 \wedge p \in R$: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3 < 4 \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

$$\left(\tfrac{1}{11}(\alpha + \beta - 2),\ \tfrac{1}{11}\left(\alpha + \tfrac{p-2}{q-6} + 3p + 2\right),\ \alpha,\ \tfrac{p-2}{q-6}\right)\ \alpha \in R$$

Хомогени системи

$AX = \theta$

Деф. 1 Сваки хомогени систем има тривијално решење $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ми ћемо у задацима тражити нетривијална решења. Хомогени систем има нетривијална решења акко је $\det A = 0$ или $\operatorname{rang} A < n$.

Зад. 1 Наћи вредности реалног параметра за које хомоген систем линеарних једначина има нетривијална решења, а затим наћи то решење:

$$\begin{aligned} (a+1)x_1 - 2x_2 + (a+2)x_3 &= 0 \\ -2x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 0 \\ (a-1)x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Решење:
$$\begin{vmatrix} a+1 & -2 & a+2 \\ -2 & a & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 7a - 6$$

Хомогени систем има нетривијална решења акко је $D = 0$ тј. $a = 1 \vee a = 2 \vee a = -3$

i) $a = 1$:
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\alpha, \alpha, \alpha\right)\ \alpha \in R$$

ii) $a = 2$:
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (-2\alpha, -\alpha, \alpha)\ \alpha \in R$$

iii) $a = -3$:
$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\alpha, -\alpha, \alpha\right)\ \alpha \in R$$

Зад. 2 У зависности од вредности реалног параметра одредити фундаментални систем и опште решење система.

$$\begin{aligned} x - y + z \quad\quad\; - 2v &= 0 \\ x + y + 2z - u - 5v &= 0 \\ -x + 5y + z - 5u - 4v &= 0 \;/ (-1) \\ x - y + 4z + au - 9v &= 0 \end{aligned}$$

Решење:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & a & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & a-3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) $a=1$: $\operatorname{rang} A = 2 < 5 \Rightarrow$ систем има нетривијално решење

$\left(\frac{1}{2}(-3\alpha + 7\gamma), \frac{1}{2}(-\alpha + 2\beta + 3\gamma), \alpha, \beta, \gamma\right)$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$

$$X_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-3\alpha + 7\gamma) \\ \frac{1}{2}(-\alpha + 2\beta + 3\gamma) \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_2} + \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_3}$$

фундаментални систем решења чине матрице X_1, X_2, X_3

ii) $a \neq 1$: $\operatorname{rang} A = 3 < 5 \Rightarrow$ систем има нетривијално решење

$\left(\frac{1}{2}(-3\alpha + 7\beta), \frac{1}{2}(-\alpha + 3\beta), \alpha, 0, \beta\right)$ $\alpha, \beta \in R$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-3\alpha + 7\beta) \\ \frac{1}{2}(-\alpha + 3\beta) \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_2}$$

фундаментални систем решења чине матрице X_1 и X_2

Зад. 3
$$\begin{aligned} (8-p)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + px_4 &= 0 \\ x_1 + (9-p)x_2 + 4x_3 + px_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + (10-p)x_3 + px_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + px_4 &= 0 \end{aligned}$$

Решење:
$$\begin{bmatrix} 8-p & 2 & 3 & p \\ p-7 & 7-p & 1 & 0 \\ p-7 & 0 & 7-p & 0 \\ p-7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) $p=7$: $\operatorname{rang} A = 2 < 4$ систем има нетривијална решења

$(-2\alpha - 7\beta, \alpha, 0, \beta)$

$$X = \begin{bmatrix} -2\alpha - 7\beta \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_2}$$

X_1 и X_2 чине фундаментални скуп решења

ii) $p=0$: $\operatorname{rang} A = 3 < 4$ систем има нетривијална решења

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \\ -7x_1 \quad\quad\; + 7x_3 &= 0 \\ -7x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$X = (0, 0, 0, \alpha)$ ↘ фундаментални вектор

iii) $p \neq 7 \wedge p \neq 0$: $\operatorname{rang} A = 4 \Rightarrow$ систем има тривијално решење вежба бр. 7

19. 10. 2006.

Сопствене (карактеристичне) вредности и сопствени вектори

Деф. 1 Нека је дата квадратна матрица A реда n. Реални број λ је сопствена вредност дате матрице ако постоји матрица колона X различита од нула матрице тако да важи $A\cdot X = \lambda X$. Матрица X се у том случају назива сопствени вектор матрице A.
$AX - \lambda X = 0$
$(A - \lambda E)X = 0$ (хомоген систем)

Особине сопствених вредности:

1° збир свих сопствених вредности матрице A једнак је збиру елемената њене главне дијагонале, а производ сопствених вредности матрице једнак је детерминанти те матрице (ово правило користимо за проверу решења)

2° ако су сопствене вредности матрице различите онда су одговарајући сопствени вектори линеарно независни

3° ако је λ сопствена вредност матрице A, онда је λ сопствена вредност матрице A^T

4° ако је λ сопствена вредност матрице A и X њој одговарајући сопствени вектор матрице и $p \in \mathbb{R} \wedge p \neq 0$ онда је $p\lambda$ сопствена вредност, а X одговарајући сопствени вектор матрице $p\cdot A$.

5° ако је λ сопствена вредност, X одговарајући сопствени вектор матрице A и $m \in \mathbb{N}$ онда је λ^m сопствена вредност, X сопствени вектор матрице A^m

6° ако је λ сопствена вредност, X одговарајући сопствени вектор матрице A, онда је λ^{-1} сопствена ~~сопствена~~ вредност, а X одговарајући сопствени вектор матрице A^{-1}

Деф. 2 Матрице A и B су сличне ако постоји регуларна матрица T тако да је $A = T\cdot B\cdot T^{-1}$ $(\det T \neq 0,\ A \sim B)$

Теор. 1 Ако су матрице сличне онда су њихове сопствене вредности исте.

Теор. 2 Ако матрица A реда n има n линеарно независних вектора, онда је слична (главној дијагонали) дијагоналној матрици код које су елементи главне дијагонале сопствене вредности матрице A. Колоне матрице T су тада сопствени вектори матрице A написани у оном редоследу у коме су одговарајуће сопствене вредности написане на дијагонали матрице D.

Теор. 3 Ако је матрица A слична матрици B онда је $A^m = T\cdot B^m\cdot T^{-1}$

Зад. 1 Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

а) наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице A

б) израчунати A^m за $m \in \mathbb{N}$

Решење: сопствене вредности матрице A су решења карактеристичне једначине $\det(A - \lambda E) = 0$

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) = P(\lambda)$$

$P(\lambda)$ - карактеристични полином

сопствене вредности су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$
матрица 3. реда $\Rightarrow$ 3 сопствене вредности
сопствени вектори матрице A који одговарају тим сопственим
су нетривијална решења матричних једначина

$$(A - \lambda_k E)X = 0 \qquad k = 1, 2, 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda_k & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda_k & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3-\lambda_k)x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + (5-\lambda_k)x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda_k)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1° за $\lambda = 2$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2° за $\lambda = 3$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3° за $\lambda = 6$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

б) матрица A је слична дијагоналној матрици D ако постоји регуларна матрица T таква да је $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$. По један вектор из сваке класе сопствених вектора чине колоне матрице T (бирамо их произвољно)

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (x_3 = 1) \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ (x_2 = 1) \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \ (x_3 = 1)$$

пошто су вектори X_1, X_2, X_3 линеарно независни, јер одговарају различитим сопственим вредностима онда је матрица

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}$$

матрица D је дијагонална, а елементи дијагонале су сопствене вредности матрице A које одговарају сопственим векторима у оном редоследу у коме су они записани у матрици T.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n & 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 6^n & -3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n \\ 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 6^n & 2 \cdot 3^n + 4 \cdot 6^n & 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 6^n \\ -3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n & 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 6^n & 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n \end{bmatrix}$$

Зад. 2 Дата је матрица $A=\begin{bmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

а) наћи сопствене вредности и сопствене векторе
б) израчунати A^n

Решење: $\det(A-\lambda E)=(\lambda-3)^2(2-\lambda)=0$

сопствене вредности су $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=3$

сопствени вектори

$(A-\lambda_k E)X=\theta \quad k=1,2,3$

$$\begin{aligned}(4-\lambda_k)x_1-x_2-x_3&=0\\ x_1+(2-\lambda_k)x_2-x_3&=0\\ x_1-x_2+(2-\lambda_k)x_3&=0\end{aligned}$$

1° за $\lambda_1=2$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1\\x_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad x_1\in R\setminus\{0\}$$

2° за $\lambda_2=\lambda_3=3$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2+x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

при чему $x_2, x_3\in R$
битно је да нису истовремено нуле
$x_2^2+x_3^2\neq 0$

б) $A\sim D$ ако $\exists T$ тако да је $A=T\cdot D\cdot T^{-1}$

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad X_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\qquad X_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

проверавамо да ли су представници класа линеарно независни

$\alpha X_1+\beta X_2+\gamma X_3=0$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0\\ \alpha+\gamma&=0\\ \alpha+\beta&=0\end{aligned}\qquad \text{хомоген систем}\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$\Rightarrow$ систем има само тривијално решење
$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow$ линеарно независни

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\quad D^n=\begin{bmatrix}2^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&3^n\end{bmatrix}\quad A^n=TD^nT^{-1}$$

$$A^n=\begin{bmatrix}-2^n+2\cdot3^n&2^n-3^n&2^n-3^n\\-2^n+3^n&2^n&2^n-3^n\\-2^n+3^n&2^n-3^n&2^n\end{bmatrix}$$

Зад. 3 Дата је матрица $A=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}$

Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A и A^{-2} и одредити A^{2n} када $n\in N$.

Решење: $\det(A-\lambda E)=\begin{bmatrix}-\lambda&2&2\\2&-\lambda&2\\2&2&-\lambda\end{bmatrix}=(4-\lambda)(\lambda+2)^2=0$

сопствене вредности $\lambda_1=\lambda_2=-2 \ \wedge\ \lambda_3=4$

сопствени вектори $(A-\lambda_k E)X=\theta \quad k=1,2,3$

$$\begin{aligned}-\lambda_k x_1+2x_2+2x_3&=0\\ 2x_1-\lambda_k x_2+2x_3&=0\\ 2x_1+2x_2-\lambda_k x_3&=0\end{aligned}$$

1° $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2, x_3 \in R, \ x_2^2 + x_3^2 \neq 0$$

2° $\lambda_3 = 4$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_1 \in R \setminus \{0\}$$

$A^{-2} = (A^{-1})^2$

λ - сопствена вредност $\Rightarrow \lambda^{-1}$ сопствена вредност за A^{-1}

X - сопствена вредност $\Rightarrow X$ сопствена вредност за A^{-1}

λ - сопствена вредност $\Rightarrow \lambda^{2}$ сопствена вредност за A^{2}

X - сопствена вредност $\Rightarrow X$ сопствена вредност за A^{2}

сопствене вредности матрице A^{-2} су

$\lambda_1^* = \lambda_2^* = (-2)^{-2} = +\frac{1}{4}$

$\lambda_3^* = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

сопствени вектори матрице A^{-2} су

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X_1, X_2, X_3 линеарно независни

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \quad D^n = \frac{1}{16^n} \begin{bmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A^{-2})^n = T D^n T^{-1}$$

$$(A^{-2})^n = \frac{1}{3 \cdot 16^n} \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^n + 1 & 1 - 4^n & 1 - 4^n \\ 1 - 4^n & 2 \cdot 4^n + 1 & 1 - 4^n \\ 1 - 4^n & 1 - 4^n & 2 \cdot 4^n + 1 \end{bmatrix}$$

Зад. 4 а) Ако су $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ сопствене вредности, а $x_1, \dots, x_n$ сопствени вектори матрице A n-тог реда, нађи сопствене векторе матрице $E+A$ где је E јединична матрица n-тог реда.

б) Нађи сопствене вредности и сопствене векторе матрице $E + B^T C$ где је E јединична матрица 3. реда и $B = [1 \ 2 \ 3]$ и $C = [1 \ -1 \ 1]$

в) израчунати $(E + B^T C)^n$ где $n \in N$

Решење: а) $\lambda_1 \dots \lambda_n$ - сопствене вредности

$x_1 \dots x_n$ - сопствени вектори матрице A

$AX = \lambda X \ / + EX$

$EX + AX = EX + \lambda X$

$(E+A)X = (1+\lambda)X \Rightarrow \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 2, \dots, \lambda_n + n$ сопствене вредности

$x_1, x_2, \dots, x_n$ сопствени вектори матрице $E+A$

б) $$A = E + B^T C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

сопствене вредности $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (3 - \lambda) = 0$

сопствене вредности су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

сопствени вектори $(A - \lambda_k E) X = 0 \quad k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} (2 - \lambda_k) x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + (-1 - \lambda_k) x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + (4 - \lambda_k) x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1° $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2, x_3 \in R, \; x_2^2 + x_3^2 \neq 0$$

2° $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} x_3 \\ \frac{2}{3} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_3 \in R \setminus \{0\} \quad x_3 = 3 \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

в) сопствени вектори X_1, X_2, X_3

$$\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\gamma &= 0 \\ \beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{bmatrix}$$

$$A \sim D \rightarrow A = TDT^{-1}$$

$$A^m = TD^mT^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1+3^m & 1-3^m & -1+3^m \\ -2+2\cdot 3^m & 4-2\cdot 3^m & -2+2\cdot 3^m \\ -3+3\cdot 3^m & 3-3\cdot 3^m & -1+3\cdot 3^m \end{bmatrix}$$

Зад. 2 а) Ако је за матрицу A $\lambda_0 \neq 1$ њена сопствена вредност и X_0 њој одговарајући сопствени вектор, доказати да је за матрицу $(E-A)^{-1}(E+A)$ њена сопствена вредност $\frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0}$, као и да је X_0 њој одговарајући сопствени вектор

б) Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице $B = (E-A)^{-1}(E+A)$ као и B^m за $m \in N$ ако је $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Решење: а) λ_0 је сопствена вредност

X_0 је сопствени вектор матрице $A \Rightarrow AX_0 = \lambda_0 X_0 \quad (*)$

$$(E+A)X_0 = EX_0 + AX_0 = X_0 + AX_0 = X_0 + \lambda_0 X_0 = (1+\lambda_0)X_0 \quad (**)$$

$$(E-A)X_0 = EX_0 - AX_0 = X_0 - AX_0 = X_0 - \lambda_0 X_0 = (1-\lambda_0)X_0 \quad (***)$$

$$X_0 = (1-\lambda_0)(E-A)^{-1}X_0$$

$$(E-A)^{-1}X_0 = \frac{1}{1-\lambda_0} X_0$$

из (**) и (***) следи

$$\begin{aligned} (E-A)^{-1}(E+A)X_0 &= (E-A)^{-1}(1+\lambda_0)X_0 \\ &= (1+\lambda_0)\cancel{(1)}(E-A)^{-1}X_0 \\ &= (1+\lambda_0)\frac{1}{1-\lambda_0} X_0 = \frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0} X_0 \end{aligned}$$

$\frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0}$ – сопствена вредност

X_0 је сопствени вектор матрице $B = (E-A)^{-1}(E+A)$

б) $$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-7)(\lambda+3) = 0$$

сопствене вредности $\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 7$

сопствени вектори $(A - \lambda_k E)X = 0 \quad k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} (2-\lambda_k)x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + (2-\lambda_k)x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_2 + (2-\lambda_k)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1° $\lambda_1 = -3$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} x_2 \\ x_2 \\ -\frac{3}{5} x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \qquad x_2 \in R \setminus \{0\} \qquad x_2 = 5 : \quad X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2° $\lambda_2 = 2$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad x_1 \in R \setminus \{0\} \qquad x_1 = 3 : \quad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3° $\lambda_3 = 7$

$$X = X_2 \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad X_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad X_2 = 5 : X_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

сопствене вредности матрице $B = (E-A)^{-1}(E+A)$

$$\lambda_1^* = \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1} = -\frac{1}{2} \qquad \lambda_2^* = \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2} = -3 \qquad \lambda_3^* = \frac{1+\lambda_3}{1-\lambda_3} = -\frac{4}{3}$$

сопствени вектори су

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

вектори x_1, x_2 и x_3 су линеарно независни јер одговарају различитим сопственим вредностима

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 40 \\ 20 & 25 & -15 \\ -20 & 25 & 15 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{250}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad D^n = \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{4}{3})^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{bmatrix} 18\cdot(-3)^n + 16(-\frac{1}{2})^n + 16(-\frac{4}{3})^n & 20(-\frac{1}{2})^n - 20(-\frac{4}{3})^n & \cdots \\ 20\cdot(-\frac{1}{2})^n - 20(-\frac{4}{3})^n & 25(-\frac{1}{2})^n + 25(-\frac{4}{3})^n & \cdots \\ 24(-3)^n - 12(-\frac{1}{2})^n - 12(-\frac{4}{3})^n & -15(-\frac{1}{2})^n + 15(-\frac{4}{3})^n & \cdots \end{bmatrix}$$

---

26. 10. 2006.

вежба бр. 8

Вектори

- линеарна зависност и независност вектора -

Деф. 1 Нека су $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ вектори и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Тада можемо формирати линеарну зависност облика (комбинацију) $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a} + \dots + \alpha_n\vec{a_n} = \vec{0}$
Вектори a_i су:
1° линеарно независни акко су $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$
2° линеарно зависни акко је бар један од $\alpha_i \neq 0$

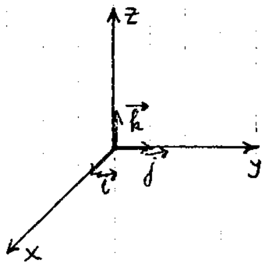
Деф. 2 Вектори чији се правци поклапају или су паралелни су колинеарни.
Вектори који припадају истој или паралелним равнима су компланарни.

Теор 1 Ако се међу векторима $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ налази нула вектор тада су вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ линеарно зависни.

Теор 2 У равни постоје два линеарно независна вектора. Свака три вектора те равни су линеарно зависна.

Теор 3 У простору постоје три међусобно линеарно независна вектора. Свака четири вектора тог простора су међусобно линеарно зависна.

$\vec{a}' = \alpha_1\vec{a}' + \alpha_2\vec{a_2} + \alpha_3\vec{a_3}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}'(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ координатни вектори
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ су координате вектора $\vec{a}$



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ су вектори који чине ортонормирани координатни сист.

$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ нормални (орто)

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Зад. 1 Доказати да су вектори

$\vec{l} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$

$\vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

компланарни ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарни.

Решење: $\alpha\vec{l} + \beta\vec{m} + \gamma\vec{n} = \vec{0}$

$\alpha(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + \beta(2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) + \gamma(2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$

$(2\alpha - \beta - \gamma)\vec{a} + (-\alpha + 2\beta - \gamma)\vec{b} + (-\alpha - \beta + 2\gamma)\vec{c} = \vec{0}$

како су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни, онда су они линеарно независни

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \quad \cdot(-1) \\ -\alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \quad \cdot 2 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{систем има нетривијална решења}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha + \beta \cdot 3 &= 0 \\ 3\alpha - 3\beta &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \beta \\ \gamma &= \beta \\ \beta &\in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

нпр. $\beta = 1$, $\alpha = \gamma = 1$ $\quad \vec{l} + \vec{m} + \vec{n} = \vec{0}$ што значи да су $\vec{l}, \vec{n}, \vec{m}$ лин. зависни

$\Rightarrow \vec{l}, \vec{m}$ и $\vec{n}$ су компланарни

Зад. 2 Испитати линеарну зависност вектора

$\vec{a} = (2, 3, 1, -1) \quad \vec{b} = (1, -2, 1, 0) \quad \vec{c} = (\alpha, 8, 1, -2), \ \alpha \in \mathbb{R}$

У случају зависности изразити вектор $\vec{a}$ преко вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$

Решење: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$

$\alpha(2, 3, 1, -1) + \beta(1, -2, 1, 0) + \gamma(\alpha, 8, 1, -2) = (0, 0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \lambda\gamma &= 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 8\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha \qquad - 2\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1° $\lambda \neq 3$: $\operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow$ систем има тривијално решење

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су линеарно независни

2° $\lambda = 3$: $\operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow$ систем има нетривијално решење

$\beta - \gamma = 0 \Rightarrow \beta = \gamma$

$-\alpha - 2\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

нпр. $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = -2$: $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

Зад. 3 Нека је $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ база векторског простора, и нека је вектор

$\vec{a} = 3\vec{v_1} - \vec{v_2} + \vec{v_3}$

$\vec{b} = \vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}$

$\vec{c} = 2\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$

а) доказати да вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора

б) вектор $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$ разложити по бази $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Решење: пошто радимо са векторима из тродимензионог простора довољно је доказати линеарну независност вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

$\alpha(3\vec{v_1} - \vec{v_2} + \vec{v_3}) + \beta(\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}) + \gamma(2\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}) = (0, 0, 0)$

$(3\alpha + \beta + 2\gamma)\vec{v_1} + (-\alpha + \beta + \gamma)\vec{v_2} + (\alpha - \beta + \gamma)\vec{v_3} = (0, 0, 0)$

како су $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ и $\vec{v_3}$ као вектори базе линеарно независни одакле следи да су одговарајући коефицијенти једнаки нули

$$\begin{aligned} 3\alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow$ систем има тривијално решење $\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су линеарно независни и чине базу векторског простора

б) $\vec{v} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$

$\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3} = \alpha_1(3\vec{v_1}-\vec{v_2}+\vec{v_3}) + \beta_1(-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\vec{v_2} + (\alpha_1-\beta_1+\gamma_1)\vec{v_3}$

$$\begin{aligned} 3\alpha_1+\beta_1+2\gamma_1 &= 1 \\ -\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 &= 1 \\ \alpha_1-\beta_1+\gamma_1 &= 1 \end{aligned} \iff \alpha_1=-\frac{1}{4} \quad \beta_1=-\frac{1}{4} \quad \gamma_1=1$$

$\Rightarrow \vec{v} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{c}$

вежба бр. 9 02. 11. 2006.

Скаларни производ

Деф. 1 Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ који нису нула вектори је број $\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\,|b|\cos\varphi$ где је φ угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теор. 1 Особине скаларног вектора:

1° $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2° $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \vee \vec{a}\perp\vec{b}$

3° $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$

4° $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b})$, $\alpha\in R$

5° $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

·	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Примена скаларног производа $(\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

1° рачунање угла између два вектора: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

2° услов ортогоналности два вектора: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

3° налажење модула вектора: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Зад. 1 Одредити угао између вектора $\vec{m} = 2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a}-\vec{b}$

Решење: $|\vec{a}|=2 \quad |\vec{b}|=1 \quad \varphi = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$

$\alpha = \measuredangle(\vec{m},\vec{n})$

$\cos\alpha = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$

$\vec{m}\cdot\vec{n} = (2\vec{a}-4\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}\vec{a} + 4|\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = 2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$\vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot4 - 6 + 4\cdot1 = 6$

$|\vec{m}|^2 = \vec{m}\cdot\vec{m} = (2\vec{a}-4\vec{b})(2\vec{a}-4\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 8\vec{a}\vec{b} - 8\vec{a}\vec{b} + 16|\vec{b}|^2 = 16$

$|\vec{m}| = 4$

$|\vec{n}|^2 = \vec{n}\cdot\vec{n} = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$

$|\vec{n}| = \sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Зад. 2 Дато је $|\vec{a}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-7$ и познато је да су вектори $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{b}+\vec{c}$ нормални
а) наћи интензитет вектора $\vec{b}$
б) помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изразити вектор $\vec{e}$ који лежи у равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такав да је вектор $\vec{c}-\vec{e}$ нормалан на ту раван
в) наћи интензитет вектора $\vec{e}$

Решење: а) $\vec{m}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{n}=0$

$$(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=0$$
$$\vec{a}\vec{b}-|\vec{b}|^2+\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}=0$$
$$-1-|\vec{b}|^2-2+7=0$$
$$|\vec{b}|^2=4$$
$$|\vec{b}|=2$$

б) $\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

$(\vec{c}-\vec{e})\perp\vec{a} \Rightarrow (\vec{c}-\vec{e})\vec{a}=0$

$$\vec{c}\vec{a}-\vec{e}\vec{a}=0$$
$$\vec{c}\vec{a}=\vec{e}\cdot\vec{a} \quad (*)$$

$(\vec{c}-\vec{e})\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{c}\vec{b}=\vec{e}\vec{b} \quad (**)$

$\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \;/\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{e}=\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\vec{b}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\vec{b}$

$-2=4\alpha-\beta$

$\vec{e}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \;/\cdot\vec{b}$

$\vec{e}\cdot\vec{b}=\alpha\vec{a}\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2$

$\vec{c}\cdot\vec{b}=\alpha\vec{a}\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2$

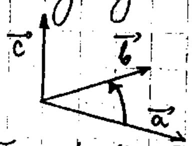
$-7=-\alpha+4\beta$

решење система $\alpha=-1$ $\beta=-2$ $\Rightarrow$ $\vec{e}=-\vec{a}-2\vec{b}$

в) $|\vec{e}|^2=\vec{e}\cdot\vec{e}=(-\vec{a}-2\vec{b})(-\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\vec{b}+4|\vec{b}|^2=16 \Rightarrow |\vec{e}|=4$

Векторски производ

Деф. 1 Нека су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ чији је правац ортогоналан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чији је смер такав да вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ чине триедар десне оријентације и чији је интензитет једнак $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ је векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у ознаци $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$



Теор. 1 Особине векторског производа

1° $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}=\vec{0} \vee \vec{b}=\vec{0} \vee \vec{a}\parallel\vec{b}$

2° $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

3° $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

4° $\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=(\alpha\vec{a})\times\vec{b} \vee \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$, $\alpha\in\mathbb{R}$

5° $|\vec{a}\times\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

x	i	j	k
i	0	k	-j
j	-k	0	i
k	+j	-i	0

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$
$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\det\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Примена векторског производа $(\vec{a}, \vec{b}\neq 0)$

1° услов колинеарности $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ $\left(\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\right)$

2° за израчунавање површине троугла $\left(\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\right)$ и паралелограма $(|\vec{a}\times\vec{b}|)$

Зад. 2 Дате су тачке $A(1,2,3)$, $B(2,2,3)$, $C(1,3,3)$
Израчунати:
а) површину ΔABC
б) дужине страница
в) мере углова
г) дужину висине h_a ΔABC

Решење: $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2,2,3) - (1,2,3) = (1,0,0)$
$\vec{AC} = (0,1,0)$
$\vec{BC} = (-1,1,0)$

а) $P = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\vec{k}| = \frac{1}{2}|(0,0,1)| = \frac{1}{2}$

б) $|\vec{AB}| = 1$ $\quad |\vec{AC}| = 1$ $\quad |\vec{BC}| = \sqrt{2}$

в) $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{AB}|} = \frac{(1,0,0)\cdot(0,1,0)}{1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

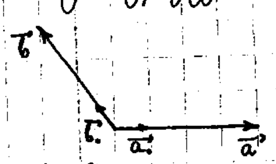
$\cos\beta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{|\vec{AB}||\vec{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$

г) $P = \frac{1}{2}h_a|\vec{BC}| \Rightarrow h_a = \frac{2P}{|\vec{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Зад. 2 Дати су вектори $\vec{a} = 2\vec{m} - 2\vec{n}$ где је $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 6\vec{n}$, $\varphi = \sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$
Нађи површину троугла конструисану над $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вектор симетрале $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ чији је интензитет $10\sqrt{3}$.

Решење: $P = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}|(2\vec{m} - 2\vec{n})\times(3\vec{m} + 6\vec{n})| = \frac{1}{2}|\cancel{6\vec{m}\times\vec{m}} - 6\vec{n}\times\vec{m} + 12\vec{m}\times\vec{n} - \cancel{12\vec{n}\times\vec{n}}|$
$= \frac{1}{2}|6\vec{m}\times\vec{n} + 12\vec{m}\times\vec{n}| = \frac{1}{2}\cdot 18|\vec{m}\times\vec{n}| = 9|\vec{m}\times\vec{n}|$
$= 9\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\sin\varphi = 9\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

сада одређујемо вектор симетрале угла



јединични вектори вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су

$a_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\qquad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$|\vec{a}|^2 = 4 - 8\vec{m}\cdot\vec{n} + 4 = 12$ $\qquad |\vec{b}|^2 = 27$
$|\vec{a}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $\qquad |\vec{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{m} - \vec{n})$ $\qquad \vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{m} + 2\vec{n})$

њихов збир $\vec{c}_0 = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$ је такође јединични вектор, па је тражени вектор симетрале угла $\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\vec{c}_0$
$\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\vec{c}_0 = 10\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{m} - \vec{n}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{m} + 2\vec{n})\right) = 10(2\vec{m} + \vec{n})$

Двоструки векторски производ

Деф. 1 Двоструки векторски производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је вектор $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

Теор. 1 За свака три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ важи да је $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

Мешовити производ

Деф. 1 Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је број $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$
Теор. 1 Особине мешовитог производа
1° $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$
2° $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$
3° $[\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$
4° $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}] + [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]$
5° $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$

$a(a_1, a_2, a_3)$
$b(b_1, b_2, b_3)$ $\quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
$c(c_1, c_2, c_3)$

Примена мешовитог производа:

1° услов компланарности три вектора јесте $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

2° израчунавање запремине:
i) паралелопипеда $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
ii) четвороугаоне пирамиде $\frac{1}{3}[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
iii) тетраедра (тростране пирамиде) $\frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

Зад. 1 Дати су вектори $\vec{a} = (-2, -6, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$, $\vec{c} = (2, -1, 0)$.
а) одредити онај од јединичних вектора нормалних на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ који са вектором $\vec{c}$ образује оштар угао
б) у смеру тог јединичног вектора одредити вектор $\vec{d}$ тако да вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ образују паралелопипед запремине 18

Решење: а) $m \perp \vec{a}, \vec{b}$ $\quad \vec{m} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 2)$

$\cos\varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{c}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{(2,-1,2)\cdot(2,-1,0)}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} > 0 \Rightarrow \vec{m}$ образује оштар угао са $\vec{c}$

$\vec{m_0} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{(2,-1,2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

б) $\vec{d} = |\vec{d}| \cdot \vec{m_0}$
$V = 18$
$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]| = 18 \iff \frac{|\vec{d}|}{3}\begin{vmatrix} -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow |\vec{d}| = 6$

$\vec{d} = 6 \cdot \frac{1}{3}(2, -1, 2)$
$\vec{d} = (4, -2, 4)$

Вежба бр. 10 $\qquad$ 03.11.2006

Наставак

Зад. 2 Дати су вектори $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 1)$, $\vec{c} = (10, 2, m)$
а) одредити вредности параметра m тако да запремина паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ буде једнака 140.
б) за ону вредност параметра m нађену под а) за коју вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образују тетраедар десне оријентације разложити вектор $\vec{d}(13, -6, -4)$ по бази коју образују вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.
в) наћи вектор $\vec{r}$ из услова $\vec{a} \cdot \vec{r} = 20$, $\vec{b} \cdot \vec{r} = 6$, $\vec{c} \cdot \vec{r} = 14$, $\vec{a} \cdot \vec{r} = 20$

Решење: а) $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 10 & 2 & m \end{vmatrix}$

$|m+7| = 10 \qquad m+7 = 10 \quad \vee \quad m+7 = -10$
$m_1 = 3 \quad \vee \quad m_2 = -17$

б) ако је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]>0$ онда вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образују триедар десне оријентације $\Rightarrow m_2=3$

$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$(19,-6,-4)=\alpha(3,2,-2)+\beta(1,4,1)+\gamma(10,2,3)$

$3\alpha-\beta+10\gamma=19$

$2\alpha+4\beta+2\gamma=-6 \quad \Rightarrow \alpha=2 \quad \beta=-3 \quad \gamma=1$

$-2\alpha+\beta+3\gamma=-4 \quad \vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

в) нека је $\vec{r}=(x,y,z)$

$\vec{a}\cdot\vec{r}=20 \iff 3x+2y-2z=20 \quad x=2$

$\vec{b}\cdot\vec{r}=6 \iff -x+4y+z=6 \quad y=3 \quad \vec{r}=(2,3,-4)$

$\vec{c}\cdot\vec{r}=14 \iff 10x+2y+3z=14 \quad z=-4$

Зад 3 Дате су тачке $A(2,3,-4)$, $B(1,0,2)$, $C(-1,2,3)$, $D(2,-1,m)$

а) одредити m тако да запремина тетраедра $ABCD$ буде једнака $(18-8)/3$

б) за ону од тако добијених вредности m за коју вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ образују триедар десне оријентације разложити вектор $\vec{v}=(7,-11,-6)$

i) по бази $\vec{q}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AD}$

ii) по бази $\vec{p_0},\vec{q_0},\vec{r_0}$ јединичних вектора p,q,r

Решење: а) $\vec{p}=\overrightarrow{AB}=(-1,-3,3)$

$\vec{q}=\overrightarrow{AC}=(-3,-1,4)$

$\vec{r}=\overrightarrow{AD}=(0,-4,m+1)$

сви вектори у мешовитом производу полазе из једног темена

$$V=\frac{1}{6}\left|[\vec{p},\vec{q},\vec{r}]\right|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-1&-3&3\\-3&-1&4\\0&-4&m+1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-8m+12\right|=\frac{10}{3}$$

$-2m+3=5 \qquad -2m+3=-5$

$m_1=-1 \qquad m_2=4$

б) (1) $[\vec{p},\vec{q},\vec{r}]>0$ за $m_1=-1$

$\vec{v}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$

$(7,-11,-6)=\alpha(-1,-3,3)+\beta(-3,-1,4)+\gamma(0,-4,0)$

$-\alpha-3\beta=7$

$-3\alpha-\beta-4\gamma=-11 \quad \Rightarrow \alpha=2 \quad \beta=-3 \quad \gamma=2 \quad \Rightarrow \vec{v}=2\vec{p}-3\vec{q}+2\vec{r}$

$3\alpha+4\beta+\gamma=-6$

(2) $\vec{p_0},\vec{q_0},\vec{r_0}$

$\vec{p_0}=\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \Rightarrow \vec{p}=|\vec{p}|\cdot\vec{p_0}$

$|\vec{p}|=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$

$|\vec{q}|=\sqrt{26} \qquad \Rightarrow \vec{v}=2\cdot\sqrt{19}\cdot\vec{p_0}-3\cdot\sqrt{26}\cdot\vec{q_0}+8\vec{r_0}$

$|\vec{r}|=4$

Зад 1. Тачке $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(1,5,0)$, $D(1,1,\lambda)$, $\lambda>0$ представљају темена тетраедра. Одредити вредности параметра λ тако да ивица AD буде нормална на раван одређену тачкама BCD

б) за тако нађену вредност параметра израчунати запремину тетраедра и вектор висине који одговара страници ACD

Решење: $AD \perp BCD \Rightarrow \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\overrightarrow{AD}=(-2,1,\lambda)$

$\overrightarrow{BD}=(1,-2,\lambda)$

$(-2,1,\lambda)\cdot(1,-2,\lambda)=0 \Rightarrow -2-2+\lambda^2=0$

$\cancel{\lambda_1=-2} \lor \lambda_2=2, \ \lambda>0$

б) $V_T = \frac{1}{3} BH$ $\qquad V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \cdots = 3$

$H = \frac{3V_T}{B}$ $\qquad B = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|(10,4,8)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+4^2+8^2} = 3\sqrt{5}$

$H = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\vec{H} = \lambda\left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = \lambda(10,4,8)$

$\vec{H_0} = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = \frac{(10,4,8)}{6\sqrt{5}}$

$\vec{H} = |\vec{H}| \cdot \vec{H_0}$

$\vec{H} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2(5,2,4)}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{5}(5,2,4)$

Зад. 5 Дати су вектори $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$, $\vec{c} = (2,-2,4)$

а) разложити на компоненте у правцима вектора $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$

б) показати да се вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ могу узети за ивице паралелопипеда и наћи вектор висине $\vec{H}$ ортогоналан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решење: а) $\vec{a}+\vec{b} = (1,1,-1)$

$\vec{a}-\vec{b} = (-2,-1,2)$

$\vec{a}\times\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{c} = \alpha(\vec{a}+\vec{b}) + \beta(\vec{a}-\vec{b}) + \gamma(\vec{a}\times\vec{b})$

$\alpha = -3,\ \beta = -1,\ \gamma = -6 \Rightarrow \vec{c} = -3(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}-\vec{b}) - 6(\vec{a}\times\vec{b})$

б) ако је мешовити производ различит од нуле вектори образују паралелопипед

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ су некомпланарни

$V = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = 3$

$V = BH \Rightarrow H = \frac{V}{B}$

$B = |\vec{a}\times\vec{b}| = \left|-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$H = \frac{V}{B} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$\vec{m} = \vec{a}\times\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{m_0} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{H} = H \cdot \vec{m_0} = \frac{6}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = (-3, 0, -3)$

Зад. 6 Упростити израз $((\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b}))(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) = *$

Решење: $* = (\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0} - \vec{a}\times\vec{b} + 2\vec{b}\times\vec{a} - \cancel{2\vec{b}\times\vec{b}}^{\,0} - \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$= (-3\vec{a}\times\vec{b} - \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$= -3\cancel{[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]}^{\,0} + 3\cancel{[\vec{a},\vec{b},\vec{b}]} + 3[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] - \cancel{[\vec{c},\vec{a},\vec{a}]}^{\,0} + [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] + \cancel{[\vec{c},\vec{a},\vec{c}]}^{\,0} + [\vec{c},\vec{b},\vec{a}] - \cancel{[\vec{c},\vec{b},\vec{b}]}^{\,0} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

$= 3[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] + [\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = 3[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

Зад. 7 Упростити израз $((2\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}))(\vec{a}-\vec{b})$ ако је $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 1$

Решење: $((2\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}))(\vec{a}-\vec{b}) =$

$= (\cancel{2\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0} + 2\vec{b}\times\vec{a} - 3\vec{c}\times\vec{a} - 2\vec{a}\times\vec{b} - \cancel{2\vec{b}\times\vec{b}}^{\,0} + 3\vec{c}\times\vec{b} + 6\vec{a}\times\vec{c} + 6\vec{b}\times\vec{c} - \cancel{9\vec{c}\times\vec{c}}^{\,0})(\vec{a}-\vec{b})$

$= 2\cancel{[\vec{b},\vec{a},\vec{a}]}^{\,0} - 3\cancel{[\vec{c},\vec{a},\vec{a}]}^{\,0} - 2\cancel{[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]}^{\,0} + 3[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] + 6\cancel{[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]}^{\,0} + 6[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] - 2\cancel{[\vec{b},\vec{a},\vec{b}]}^{\,0} + 3[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] + 2\cancel{[\vec{a},\vec{b},\vec{b}]}^{\,0} - 3\cancel{[\vec{c},\vec{b},\vec{b}]}^{\,0} + 6[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] + 6[\vec{b}$

$= 3[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] + 6[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] + 3[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] + 6[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$

$= 12[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 12$

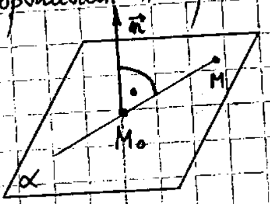
09.11.2006

вежба бр. 11

Аналитичка геометрија у простору

Раван

Раван α једнозначно је одређена тачком M_0 и вектором $\vec{n}$ који је нормалан на раван α



$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$

$\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$

$M(x, y, z) \in \alpha$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

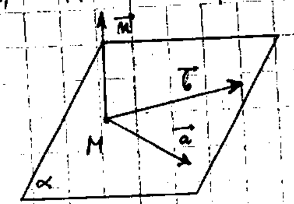
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ општа једначина равни

$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$

$Ax + By + Cz + D = 0$

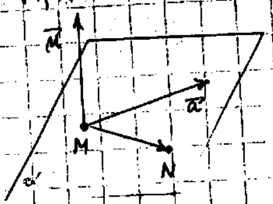
Раван је одређена и следећим елементима:

1° $M \in \alpha$ $\vec{a}, \vec{b} \in \alpha$



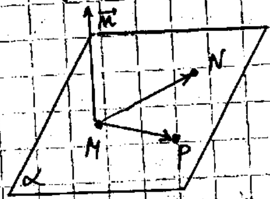
$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

2° $M, N \in \alpha$ $\vec{a} \in \alpha$



$\vec{n} = \vec{a} \times \overrightarrow{MN}$

3° $M, N, P \in \alpha$



$\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$

Међусобни положај две равни $(\alpha_1(M_1, \vec{n_1}), \alpha_2(M_2, \vec{n_2}))$

1° равни се поклапају $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} = \lambda \vec{n_2}$ и имају бар једну заједничку тачку

2° равни су паралелне $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} = \lambda \vec{n_2}$ и немају заједничких тачака

3° равни се секу $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{p\} \Leftrightarrow \vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ нису колинеарни при чему $\measuredangle(\alpha_1, \alpha_2) = \measuredangle(\vec{n_1}, \vec{n_2})$
специјалан случај: $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

Зад. 1 Написати једначину равни која садржи тачку $M(2,1,0)$ и паралелна је равни $\alpha: x + 2y - 3z - 5 = 0$

Решење: $M \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$

$\vec{n_\alpha}(1, 2, -3)$

$\vec{n_\beta} = \lambda \vec{n_\alpha}$, $\lambda \neq 0$

$\vec{n_\beta} = \lambda (1, 2, -3)$

$\lambda = 1: \vec{n_\beta} = (1, 2, -3)$

$1 \cdot (x - 2) + 2(y - 1) - 3(z - 0) = 0$

$x + 2y - 3z - 4 = 0$

Зад. 2 Написати једначину равни која садржи тачку $M(2, -3, 1)$ и нормална је на равни $\alpha: 2x + y - z - 2 = 0$ и $\beta: x - y + z - 3 = 0$

Решење: $M \in \gamma$ $\gamma \perp \alpha$ $\gamma \perp \beta$ $\vec{n_\gamma} \perp \vec{n_\alpha}$, $\vec{n_\gamma} \perp \vec{n_\beta} \Rightarrow \vec{n_\gamma} = \lambda(\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta})$

$\vec{n_\alpha} = (2, 1, -1)$
$\vec{n_\beta} = (1, -1, 1)$

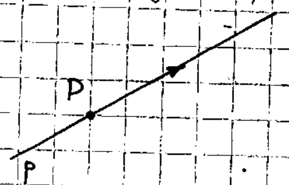
$$\Rightarrow \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1) \Rightarrow \vec{n_\gamma} = (0, 1, 1)$$

$\gamma: 0(x - 2) + 1(y + 3) + 1(z - 1) = 0$

$\gamma: y + z + 2 = 0$

Права

Права p једнозначно је одређена тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{p}(a,b,c)$ који јој је паралелан.



$P(x_0, y_0, z_0) \in p$

$\vec{p}(a,b,c) \parallel p$

канонски облик (основни)

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

1° дате су две тачке $P(x_0, y_0, z_0)$ и $Q(x_1, y_1, z_1)$ $\quad \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

2° параметарски облик $x = at + x_0 \quad y = bt + y_0 \quad z = ct + z_0, \ t \in R$

3° права као пресек две равни $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

вектор праве $\vec{p} = \lambda(\vec{n_1} \times \vec{n_2})$ $\quad$ тачка: решење система

Међусобни положај две праве

1° праве су паралелне: $p \parallel q \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda \vec{q}$ и немају заједничку тачку
специјалан случај праве се поклапају $p \equiv q \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda \vec{q}$ и имају бар једну заједничку тачку

2° праве се секу: $p \cap q \Leftrightarrow \{A\} \Leftrightarrow P \in p,\ Q \in q,\ \vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}$ су компланарни $\Leftrightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = 0$
секу се под углом φ: $\varphi = \angle(p,q) = \angle(\vec{p}, \vec{q})$, $\cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$

3° праве су мимоилазне: $\vec{p}$ и $\vec{q}$ (а), $\vec{PQ} \Leftrightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] \neq 0$

Зад. 1 Кроз тачку $M(3,-1,-1)$ поставити праву која сече праву $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ под углом од 60°.

Решење: $M \in q \quad \angle(p,q) = 60° \quad \cos\varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$

$\vec{p} = (1,-1,2) \quad P(3,-2,0)$

$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PM}] = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = a - b - c$$

$\cos 60° = \frac{|(1,-1,2)(a,b,c)|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2}$

$2|a-b+2c| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} \ \wedge \ a - b - c = 0$

$a^2+b^2+c^2 = 6$ произвољно

$2|a-b+2c| = 6$

$|a-b+2c| = 3$

$a-b+2c=3$		$a-b+2c=-3$
$a-b-c=0$		$a-b-c=0$
$c=1$	$\vee$	$c=-1$
$a-b=1$		$a-b=-1$
$a^2+b^2=5$		$a^2+b^2=5$
$a=2 \vee a=-1$	$\equiv$	$\cancel{a=1} \vee \cancel{a=-2}$
$b=+1 \vee b=-2$		$\cancel{b=2} \vee \cancel{b=-1}$

$\vec{q_1} = (2,1,1) \qquad q_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$

$\vec{q_2} = (-1,-2,1) \qquad q_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Зад. 2 Написати једначину праве која садржи тачку $M(3,-2,-4)$, сече праву $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ и паралелна је равни $3x - 2y - 3z - 7 = 0$

Решење: $M \in q \quad p \cap q = \{Q\} \quad q \parallel \alpha \quad \vec{p} = (3,-2,2) \quad P(2,-4,1) \quad \vec{n_\alpha} = (3,-2,-3) \quad \vec{q} = (a,b,c)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ a & b & c \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = [\vec{p}, \vec{q}, \vec{PM}] = 0 = 6a + 17b + 8c \ (*)$$

$q \parallel \alpha,\ \vec{n_\alpha} \perp \vec{q}: (3a - 2b - 3c) = 0 \ (**)$

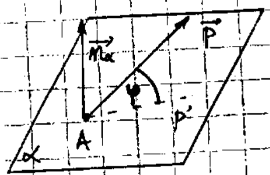
$(*)(**)$: $3a - 2b - 3c = 0$, $6a + 17b + 8c = 0$ $\quad b = -\frac{2}{3}c$, $a = \frac{5}{9}c$ $\quad$ нпр $c=9$ $b=-6$ $a=5 \Rightarrow \vec{q} = (5,-6,9) \Rightarrow q: \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$

Међусобни положај праве и равни

$p(P, \vec{p})$ $\quad \alpha(M, \vec{m})$

1° $p \parallel \alpha \Rightarrow \vec{m}_\alpha \perp \vec{p}$, $\quad p \subset \alpha \Leftrightarrow \vec{m}_\alpha \perp \vec{p}$ и имају бар једну заједничку тачку

2° $p \cap \alpha = \{A\} \Rightarrow \vec{p} \not\perp \vec{m}_\alpha$ $\quad$ спец. $p \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda \vec{m}_\alpha$



угао између праве и равни

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{m}_\alpha, \vec{p})$

$\cos \measuredangle(\vec{m}_\alpha, \vec{p}) = \frac{\vec{m}_\alpha \cdot \vec{p}}{|\vec{m}_\alpha| |\vec{p}|} = \sin\varphi$

Зад. 1 Написати једначину равни која садржи праву $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$ и паралелна је правој $q = \begin{cases} x = -t-2 \\ y = 2t+1 \\ z = -2t+3 \end{cases}$ $t \in R$

Решење: $\vec{p} = (2, -3, 1)$ $\quad P(1, -2, 1)$ $\quad \vec{q} = (-1, 2, -2)$ $\quad Q(-2, 1, 3)$

$p \subset \alpha: \vec{p} \perp \vec{m}_\alpha$

$q \parallel \alpha: \vec{q} \perp \vec{m}_\alpha$ $\quad \Rightarrow \vec{m}_\alpha = \lambda(\vec{p} \times \vec{q})$ $\quad \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (4, 3, 1) = \vec{m}_\alpha$

$\alpha: 4(x-1) + 3(y+2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha: 4x + 3y + z + 1 = 0$

Зад. 2 Дате су праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ и $q: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$. Показати да се праве p и q секу, наћи њихову пресечну тачку и једначину равни одређену тим правама.

Решење: $\vec{p} = (2, 3, 1)$ $\quad P(1, 1, 1)$ $\quad \vec{q} = (-1, 2, 4)$ $\quad Q(-1, -2, 0)$

$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = 0$ и $\vec{p} \neq \lambda \vec{q} \Rightarrow p$ и q се секу

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \wedge \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} \Rightarrow x = -1, y = -2$, када убацимо $z = 0$

$A(-1, -2, 0)$ пресечна тачка

$\vec{m}_\alpha = \lambda(\vec{p} \times \vec{q})$

$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (10, -9, 7)$ $\quad \alpha: 10(x+1) - 9(y+2) + 7(z-0) = 0$

$\alpha: 10x - 9y + 7z - 8 = 0$

вежбе бр. 12 $\quad$ 10. 10. 2006.

Наставак

Зад. 3 Написати једначину равни која је паралелна правама $p: \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad q: \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ и једнако је удаљена од њих

Решење: $\vec{p} = \lambda(\vec{m}_1 \times \vec{m}_2)$ $\quad \vec{q} = \lambda(\vec{m}_3 \times \vec{m}_4)$

$\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -1, 1) = \vec{p}$ $\quad \vec{m}_3 \times \vec{m}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4, -8, -1) = \vec{q}$

$\alpha \parallel p, q \Rightarrow \vec{m}_\alpha \perp \vec{q}$, $\vec{m}_\alpha \perp \vec{p}$ $\quad \vec{m}_\alpha = \lambda(\vec{p} \times \vec{q}) = (-9, 9, -36) = -9(1, -1, +4)$

узећемо раван xOy, једначина $z = 0$

$p: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad P(5, 2, 0)$ $\quad q: \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$ $\quad Q(1, 5, 0)$

средиште дужи $x_s = \frac{x_P + x_Q}{2}$ $\quad y_s = \frac{y_P + y_Q}{2}$ $\quad z_s = \frac{z_P + z_Q}{2}$ $\quad S(x_s, y_s, z_s) \Rightarrow S(3, \frac{7}{2}, 0) \in \alpha$

$\alpha: 1(x-3) - 1(y - \frac{7}{2}) + 4(z-0) = 0$ $\quad \alpha: x - y + 4z + \frac{1}{2} = 0$

Зад 4 Написати једначину равни која садржи праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$, $q: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{6}$

Решење: $\vec{p} = (1,2,3)$ $\quad P(1,2,1)$ $\quad \vec{q} = (2,4,6)$ $\quad Q(2,2,-1)$

$\vec{PQ} = (1,0,-2)$

$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{m_\alpha}$

$PQ \subset \alpha \Rightarrow \vec{PQ} \perp \vec{m_\alpha} \Rightarrow \vec{m_\alpha} = \lambda(\vec{p} \times \vec{PQ}) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \lambda(-4,5,-2)$

$\alpha: 4(x-1) - 5(y-2) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y + 2z + 4 = 0$

Зад 5 Показати да су праве $p: \frac{x-1}{0} = y-3 = \frac{z-2}{-1}$ и $q: x-3 = y-3 = z-4$ мимоилазне, а затим написати једначину праве r која сече праве p и q, нормална је на праву p и паралелна равни $\alpha: 2x-3y-z=0$

Решење: $\vec{p} = (0,1,-1)$ $\quad P(1,3,2)$ $\quad \vec{q} = (1,1,1)$ $\quad Q(3,3,4)$

$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ праве p и q су мимоилазне

нека је $\vec{r} = (a,b,c)$

1) $p \perp r \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{r} = 0$

$(0,1,-1)(a,b,c) = 0$

$b - c = 0 \Rightarrow b = c$

2) $r \parallel \alpha \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{m_\alpha} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{m_\alpha} = 0$

$(a,b,c)\cdot(2,-3,-1) = 0$

$2a - 3b - c = 0$

$2a - 4c = 0$

$a = 2c$

нпр. $c=1$, $a=2$, $b=1$ $\quad \vec{r} = (2,1,1)$

$r \cap p \neq \emptyset \Rightarrow r \cap p = \{P_1\}$ $\quad M(x,y,z)$ тачка на правој r

$[\vec{r}, \vec{p}, \vec{PM}] = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x-1 & y-3 & z-2 \end{vmatrix} = x - y - z + 4 = 0$

$r \cap q = \{Q_1\}$ $\quad [\vec{r}, \vec{q}, \vec{QM}] = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-3 & y-3 & z-4 \end{vmatrix} = y - z + 1 = 0$

$r: \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad$ нпр. $x=3$, $y=3$, $z=4$ $\quad M(3,3,4) \in r$

$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$

Зад. 6 Дате су праве $p: \begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases}$ и $q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$. Написати једначину заједничке нормале правих p и q.

Решење: $\vec{m_1} \times \vec{m_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-4,-1) = \vec{p}$ $\quad P(2,-3,4)$ $\quad Q(2,2,2)$

I начин:

$p: \begin{cases} x = t_1 + 2 \\ y = 4t_1 - 3 \\ z = t_1 + 4 \end{cases}$ $\quad t_1 \in R$ $\quad m \cap p = \{P\}$ $\quad P(t_1+2, 4t_1-3, t_1+4)$

$q: \begin{cases} x = t_2 + 2 \\ y = 2 \\ z = -t_2 + 2 \end{cases}$ $\quad t_2 \in R$ $\quad m \cap q = \{Q\}$ $\quad Q(t_2+2, 2, -t_2+2)$

$\vec{m} = \vec{PQ} = (t_2 - t_1, 5 - 4t_1, -2 - t_1 - t_2)$

$\vec{m} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{m} \cdot \vec{p} = 0$

$1(t_2 - t_1) + 4(5 - 4t_1) + 1(-2 - t_1 - t_2) = 0$ $\quad -18t_1 = -18 \Rightarrow t_1 = 1$

$\vec{m} \perp \vec{q} \Rightarrow \vec{m} \cdot \vec{q} = 0$: $1\cdot(t_2 - t_1) + 0 - 1(-2 - t_1 - t_2) = 0$ $\quad 2t_2 = -2 \Rightarrow t_2 = -1$

$P(3,1,5)$ $\quad Q(1,2,3)$ $\quad \vec{PQ} = (-2,1,-2)$

$m: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-2}$

II начин: $\vec{m} \perp \vec{p}, \vec{q} \Rightarrow \vec{m} = \vec{p} \times \vec{q}$

$m \cap p = \{P\} \Rightarrow [\vec{m}, \vec{p}, \overrightarrow{PM}] = 0$

$M(x,y,z) \in m \quad \Rightarrow 9x - 9z + 18 = 0$

$m \cap q = \{Q\} \Rightarrow [\vec{m}, \vec{q}, \overrightarrow{QM}] = 0$

Продор праве кроз раван

Најлакше се одређује ако се једначина праве напише у параметарском облику, замени у једначину равни, одакле добијамо непознати параметар t и тачку продора.

Зад. 1 Дате су права $p: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$ и раван $\alpha: 6x-8y-5z-5=0$. Наћи тачку продора праве p кроз раван α и угао између њих.

Решење:
$$p: \begin{cases} x = -6t-3 \\ y = t+2 \\ z = 4t+5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &6(-6t-3)-8(t+2)-5(4t+5)-5=0 \\ &-64t-64=0 \\ &t=-1 \end{aligned} \quad \Rightarrow P(3,1,1)$$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{n_\alpha}}{|\vec{p}|\,|\vec{n_\alpha}|} = \frac{(-6,1,4)(6,-8,-5)}{\sqrt{36+1+16}\cdot\sqrt{36+64+25}} = \frac{-64}{5\sqrt{265}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(-\frac{64}{5\sqrt{265}}\right)$$

Зад. 2 Одредити продор праве $p: \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 2x+y+3z-11=0 \end{cases}$ кроз раван $\alpha: 3x+2y+z-5=0$

Решење: $p \cap \alpha = \{P\}$
$$\begin{aligned} 2x+3y+z &= 1 \\ 2x+y+3z &= 11 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{aligned} \qquad P(2,-2,3)$$

Пројекције

Зад. 1 У равни $\alpha: 10x-9y+7z-8=0$ наћи тачку B најближу тачки $A(19,-3,3)$

Решење: $\vec{n_\alpha} = (10,-9,7)$

$n = ? \quad A \in n \qquad n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = (10,-9,7)$

$$n: \begin{cases} x = 10t+19 \\ y = -9t-3 \\ z = 7t+3 \end{cases} \qquad n \cap \alpha = \{B\}$$

$$10(10t+19) - 9(-9t-3) + 7(7t+3) - 8 = 0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow B(9,6,-4)$$

Зад. 2 Написати канонски облик једначине пројекције праве $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ на раван $\alpha: 2x-4y+z+5=0$

Решење: p' добијамо (када) у пресеку α и β која је нормална на α и садржи праву p

$\beta \perp \alpha, \; p \subset \beta, \; \beta = ?$

$\vec{n_\beta} = \lambda(\vec{n_\alpha} \times \vec{p}) = (13,4,-10)$

$\beta: 13(x-1) + 4(y+2) - 10(z-3) = 0 \iff \beta: 13x+4y-10z+25=0$

$\alpha \cap \beta = p'$

$$p': \begin{cases} 2x-4y+z+5=0 \\ 13x+4y-10z+25=0 \end{cases}$$

$\vec{p'} = (\vec{n_\beta} \times \vec{n_\alpha}) = (12,11,12)$

$P(1,3,5) \in p'$

$$p': \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{11} = \frac{z-5}{20}$$

вежба бр. 13

16.11.2006.

Симетрије

Зад. 1 Наћи тачку симетричну тачки $P(1,3,1)$ у односу на праву $p: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$

Решење: $\vec{p}=(1,2,-1)$ $\quad P_1(2,-1,0)$ $\quad \vec{n_\alpha}=(1,2,-1)$

$\alpha:\ 1(x-1)+2(y-3)-1(z-1)=0$

$x+2y-z-6=0$

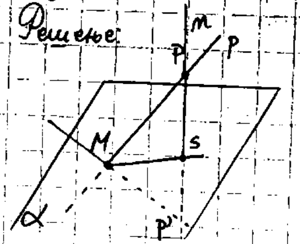
$$p: \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t-1 \\ z=-t \end{cases} \quad t\in R \qquad \begin{aligned} &t+2+2(2t-1)-(-t)-6=0 \\ &6t-6=0 \\ &t=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow S(3,1,-1)$$

$PS=SP'$

$$\begin{aligned} x_{P'} &= 2x_S-x_P=5 \\ y_{P'} &= 2y_S-y_P=-1 \\ z_{P'} &= 2z_S-z_P=-3 \end{aligned} \quad \Rightarrow P'(5,-1,-3)$$

Зад. 2 Наћи праву симетричну правој $p: \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ у односу на раван $\alpha: x-z+2=0$

Решење:



$\vec{p}=(0,2,2)$ $\quad P(1,1,1)$ $\quad \vec{n_\alpha}=(1,0,-1)$

$p\cap\alpha=\{M\}$

$$p: \begin{cases} x=1 \\ y=2t+1 \\ z=2t+1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &1-(2t+1)+2=0 \\ &t=1 \\ &M(1,3,3) \end{aligned}$$

$m\perp\alpha$, $P\in m$

$$m: \begin{cases} x=t+1 \\ y=1 \\ z=-t+1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &m\cap\alpha=\{S\} \\ &t+1-(-t+1)+2=0 \\ &t=-1 \end{aligned} \quad \Rightarrow S(0,1,2)$$

$PS=SP'$

$$\begin{aligned} x_{P'} &= 2x_S-x_P=-1 \\ y_{P'} &= 2y_S-y_P=1 \\ z_{P'} &= 2z_S-z_P=3 \end{aligned} \quad \Rightarrow P'(-1,1,3)$$

$\vec{p'}=(1,1,0)=\vec{MP'}$ $\quad \Rightarrow p': \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{0}$

Растојање

1° између две тачке $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $\quad |M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2° између тачке и равни $M(x_0,y_0,z_0)$, $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, $\quad d(M,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3° између тачке и праве $M(x_0,y_0,z_0)$, $p(P,\vec{p})$, $\quad h_a=\frac{P_\square}{|\vec{p}|}=\frac{|\vec{p}\times\vec{PM}|}{|\vec{p}|}$

4° између две праве $p(P,\vec{p})$, $q(Q,\vec{q})$ $\quad$ а) $p\parallel q$ $\quad d(p,q)=d(P,q) \Rightarrow 3°$

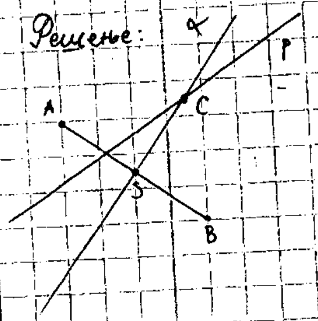
б) праве мимоилазне $\quad d(p,q)=\frac{|[\vec{p},\vec{q},\vec{PQ}]|}{|\vec{p}\times\vec{q}|}=\frac{V}{B}$

5° праве и равни $p(P,\vec{p})$, $\alpha(M,\vec{n_\alpha})$ $\quad d(p,\alpha)=d(P,\alpha) \Rightarrow 2°$

6° између две равни $\quad d(\alpha_1,\alpha_2)=d(M_1,\alpha_2) \Rightarrow 2°$

Зад. 1 На правој $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ наћи тачку C једнако удаљену од тачака $A(2,1,-2)$ и $B(4,-5,4)$ и проверити резултат

Решење:



$AS = SB \quad S(3,-2,1)$

$S \in \alpha,\ \alpha \perp AB \Rightarrow \vec{n_\alpha} = \vec{AB} = (2,-6,6) = (1,-3,3)$

$\alpha: 1\cdot(x-3) - 3\cdot(y+2) + 3\cdot(z-1) = 0$

$\alpha: x - 3y + 3z - 12 = 0$

$p \cap \alpha = \{C\} \qquad p: \begin{cases} x = -t+1 \\ y = t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases} \quad t \in R$

$(-t+1) - 3(t+2) + 3(2t+1) - 12 = 0$

$2t - 14 = 0 \Rightarrow t = 7$

$C(-6,9,15)$

провера: $\left.\begin{array}{l} d(A,C) = |AC| = \sqrt{64+64+289} = \sqrt{417} \\ d(B,C) = |BC| = \sqrt{100+196+16} = \sqrt{417} \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BC$

Зад. 2 Написати једначине симетријске равни диедра одређеног равнима $\alpha: x+2y+2z-4=0$ и $\beta: 6x-3y+2z+6=0$

Решење: $d(\alpha,\gamma) = d(\beta,\gamma) \quad \gamma$ - симетријска раван

$d(M,\alpha) = d(M,\beta) \quad M(x,y,z) \in \gamma$

$$\frac{|x+2y+2z-4|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|6x-3y+2z+6|}{\sqrt{36+9+4}}$$

$7|x+2y+2z-4| = 3|6x-3y+2z+6|$

$7(x+2y+2z-4) = \pm 3(6x-3y+2z+6)$

$\gamma_1: 7(x+2y+2z-4) = 3(6x-3y+2z+6)$

$11x - 23y - 8z + 46 = 0$

$\gamma_2: 7(x+2y+2z-4) = -3(6x-3y+2z+6)$

$25x + 5y + 20z - 10 = 0 \ /:5$

$5x + y + 4z - 2 = 0$

Зад. 3 Наћи једначину скупа тачака подједнако удаљених од правих $p: x = \frac{y}{0} = 1-z$ и $q: x = -y = z+1$

Решење: $\vec{p'} = (1,0,-1) \quad P(0,0,1) \qquad \vec{q'} = (1,-1,1) \quad Q(0,0,-1)$

$d(M,p) = d(M,q)$

$$\frac{|\vec{p'} \times \vec{PM}|}{|\vec{p'}|} = \frac{|\vec{q'} \times \vec{QM}|}{|\vec{q'}|}$$

$|\vec{p'}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

$|\vec{q'}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$\vec{p'} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z-1 \end{vmatrix} = (y, -x-z+1, y)$$

$$\vec{q'} \times \vec{QM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & z+1 \end{vmatrix} = (-z-y-1, x-z-1, y+x)$$

$$\frac{\sqrt{y^2+(-x-z+1)^2+y^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(-z-y+1)^2+(x-z-1)^2+(y+x)^2}}{\sqrt{3}} \ /^2$$

$3\left(2y^2 + (x+z-1)^2\right) = 2\left((z+y-1)^2 + (x-z-1)^2 + (x+y)^2\right)$

$\Gamma: x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y + 14z + 1 = 0$

Прамен равни

Прамен равни је скуп свих равни које садрже праву p.

$$p: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad \lambda\in R$$

Зад. 1 Написати једначину равни која садржи праву $p: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ и чије је растојање од тачке $A(1,2,-1)$ једнако $\frac{4}{3}$.

Решење: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1} \iff x+2y-2=0$

$\frac{x}{2}=\frac{z+1}{2} \iff x-z-1=0$

прамен равни кроз праву p

$x+2y-2+\lambda(x-z-1)=0$

$(1+\lambda)x+2y-\lambda z-2-\lambda=0$

$d(A,\alpha)=\frac{4}{3}$

$$\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+2\cdot 2-\lambda(-1)-2-\lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+2^2+(-\lambda)^2}}=\frac{4}{3}$$

$3(\lambda+3)=4\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+5} \;/^2$

$9(\lambda+3)^2=16(2\lambda^2+2\lambda+5)$

$23\lambda^2-22\lambda-1=0$

$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=-\frac{1}{23} \implies \alpha_1: 2x+2y-z-3=0$

$\alpha_2: 22x+46y+z-45=0$

Зад. 2 Права $p: \begin{cases} 2x+y+2z+3=0 \\ 4x-y+z-3=0 \end{cases}$ сече раван $\alpha: x+y+z+2=0$ и $\beta: x-y+z+3=0$ редом у тачкама A и B. Наћи једначину равни γ која садржи пресечну праву равни α и β и пролази кроз средиште C дужи AB.

Решење: $p\cap\alpha=\{A\}$

$2x+y+2z=-3$

$4x-y+z=3 \implies A(1,-1,-2)$

$x+y+z+2=0$

$p\cap\beta=\{B\}$

$2x+y+2z=-3$

$4x-y+z=3 \implies B(2,1,-4)$

$x-y+z+3=0$

$AC=CB$

$C(\frac{3}{2},0,-3)$

$C\in\gamma, \; \alpha\cap\beta\subset\gamma$

$\alpha\cap\beta: \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$

прамен кроз $\alpha\cap\beta$

$x+y+z+2+\lambda(x-y+z+3)=0$

$\gamma: (1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(1+\lambda)z+2+3\lambda=0$

$(1+\lambda)\frac{3}{2}+(1-\lambda)0+(1+\lambda)\cdot 3+2+3\cdot\lambda=0$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda=0$

$\lambda=-\frac{1}{3}$

$\gamma: \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z+1=0$

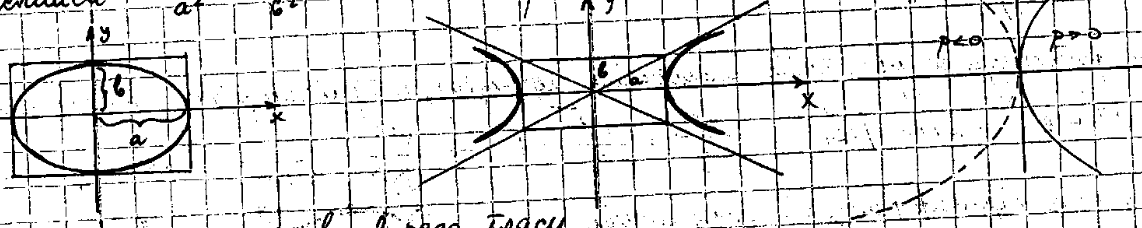
$\gamma: 2x+4y+2z+3=0$

вежба бр. 14 23.11.2006.

Криве 2 реда

Задатке углавном решавамо свођењем на канонски облик. Канонске једначине тражених кривих су:

1° елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 2° хипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 3° парабола $y^2=2px$



Општа једначина криве 2 реда гласи

$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

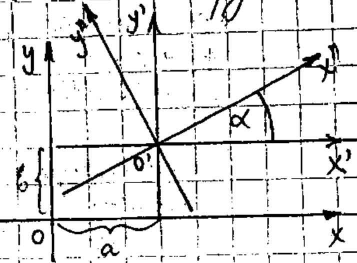
Помоћу детерминанти $\delta=\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix}$ и $\Delta=\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}$ криве 2 реда могу се класификовати на следећи начин.

	недегенерисане криве $\Delta\neq0$	дегенерисане криве $\Delta=0$
$\delta>0$	елипса	тачка
$\delta<0$	хипербола	пар правих које се секу
$\delta=0$	парабола	пар паралелних правих

Т → Р → кан. облик
Т → Р → кан. облик
Р → Т → кан. облик

Ако је $\delta\neq0$ тада крива има центар O' са координатама a и b. Координате центра се добијају као решења једначина

$f'_x(a,b)=0$, $f'_y(a,b)=0$ $\Rightarrow$ $A\cdot a+B\cdot b+D=0$, $B\cdot a+C\cdot b+E=0$



- вршимо транслацију $xOy\rightarrow x'O'y'$ $x=x'+a$ $y=y'+b$
- вршимо ротацију $x'O'y'\rightarrow x''O'y''$

$x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha$
$y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}$ $A=C\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$ $\sin\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

3. Дату једначину свести на канонски облик и наћи формуле трансформације координата, а затим скицирати криву: $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+6=0$.

Решење: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$
$5x^2+8xy+5y^2+(-18x)+(-18y)+6=0$
$A=5$ $B=4$ $C=5$ $D=-9$ $E=-9$ $F=6$

$\delta=\begin{vmatrix}5&4\\4&5\end{vmatrix}=9>0$ $\Rightarrow$ крива је елиптичног типа и има центар
координате центра O' су a и b

$Aa+Bb+D=0$, $Ba+Cb+E=0$ $\Leftrightarrow$ $5a+4b-9=0$, $4a+5b-9=0$ $\Rightarrow$ $O'(1,1)$

1° транслација $xOy\rightarrow x'O'y'$

$x=x'+a$, $y=y'+b$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x=x'+1\\y=y'+1\end{cases}$ убацујемо у једначину и сређујемо

$5(x'+1)^2+8(x'+1)(y'+1)+5(y'+1)^2-18(x'+1)-18(y'+1)+6=0$
$5x'^2+8x'y'+5y'^2-12=0$

2° ротација $x'O'y' \to x''O''y''$

$tg\,2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ $\quad A=C \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha$
$y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha$
$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt2}(x''-y'') \\ y' = \frac{\sqrt2}{\sqrt2}(x''+y'') \end{cases}$ убацујемо у једначину и сређујемо

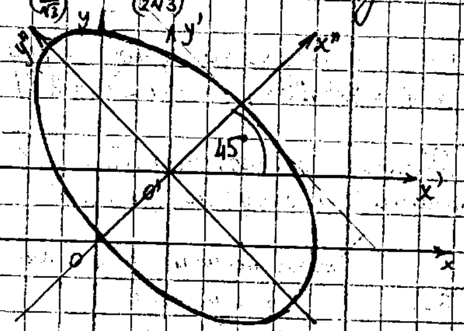
$\frac52(x''-y'')^2 + \frac82(x''-y'')(x''+y'') + \frac52(x''+y'')^2 - 12 = 0$
$18x''^2 + 2y''^2 - 24 = 0$

при ротацији се увек губи мешовити производ, а транслацијом линеарни чланови

$18x''^2 + 2y''^2 - 24 = 0 \ /:24$ $\quad \frac{x''^2}{\frac43} + \frac{y''^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{(\frac{2}{\sqrt3})^2} + \frac{y''^2}{(2\sqrt3)^2} = 1$ канонска ј-на елипсе

формуле трансформације координата

$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt2}(x''-y'') \\ y = 1 + \frac{1}{\sqrt2}(x''+y'') \end{cases}$



Зад. 2 $7x^2 - 8xy + y^2 - 26x + 20y + 28 = 0$

Решење: $A=7 \quad B=-4 \quad C=1 \quad D=-13 \quad E=10 \quad F=28$

$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 16 = -9 < 0$ $\quad (\Delta = \dots \neq 0) \Rightarrow$ крива је хиперболичног типа

координате центра $O'(a,b)$

$Aa + Bb + D = 0$
$Ba + Cb + E = 0$ $\Leftrightarrow$ $7a - 4b - 13 = 0$, $-4a + b + 10 = 0$ $\Leftrightarrow$ $a = 3$, $b = 2$ $\quad O'(3,2)$

1° транслација $xOy \to x'O'y'$

$\begin{cases} x = x'+3 \\ y = y'+2 \end{cases}$ када убацимо губе се линеарни чланови

$7(x'+3)^2 - 8(x'+3)(y'+2) + (y'+2)^2 - 26(x'+3) + 20(y'+2) + 28 = 0$
$7x'^2 - 8x'y' + y'^2 + 9 = 0$

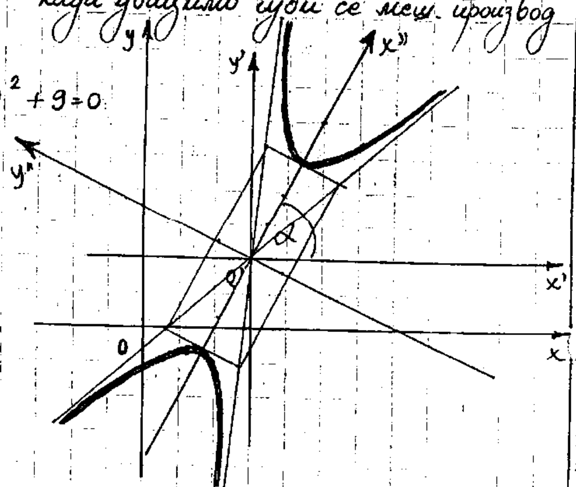
2° ротација $x'O'y' \to x''O''y''$

$tg\,2\alpha = \frac{2B}{A-C} = -\frac43 = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\qquad 2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$
$tg\alpha = 2 > 0 \vee tg\alpha = -\frac12$

$\sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

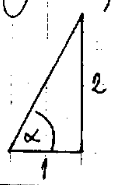
$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt5}(x''-2y'') \\ y' = \frac{1}{\sqrt5}(2x''+y'') \end{cases}$ када убацимо губи се меш. производ

$\frac75(x''-2y'')^2 - \frac85(x''-2y'')(2x''+y'') + \frac15(2x''+y'')^2 + 9 = 0$
$-5x''^2 + 45y''^2 + 45 = 0 \ /\cdot(-1)$
$x''^2 - 9y''^2 = 9 \ /:9$
$\frac{x''^2}{3^2} - \frac{y''^2}{1^2} = 1$ $\qquad$ полуосе $a=3$ $b=1$



формуле трансформације координата

$\begin{cases} x = 3 + \frac{1}{\sqrt5}(x''-2y'') \\ y = 2 + \frac{1}{\sqrt5}(2x''+y'') \end{cases}$



$tg\alpha = 2$

Зад. 3 $x^2-4xy+4y^2+10\sqrt{5}x-32=0$

Решење: $A=1 \quad B=-2 \quad C=4 \quad D=5\sqrt{5} \quad E=0 \quad F=-32$

$\delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0 \Rightarrow$ крива је параболичког типа

1° ротација $xOy \to x'Oy'$

$tg\,2\alpha=\frac{2B}{A-C}=\frac{4}{3}>0$

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{4}{3} \Rightarrow tg\alpha=\frac{1}{2} \vee tg\alpha=-2$

$\sin=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha=\frac{(tg\alpha)^0}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')\end{cases}$

$\frac{1}{5}(2x'-y')^2-\frac{4}{5}(2x'-y')(x'+2y')+\frac{4}{5}(x'+2y')^2+10(2x'-y')-32=0 \;/\cdot 5$

$5y'^2+20x'-10y'-32=0$

до канонске једначине криве доћи ћемо непосредним трансформацијама

$5(y'^2-2y'+1)-5+20x'-32=0$

$5(y'-1)^2=-20x'+37 \;/:5$

$(y'-1)^2=-4x'+\frac{37}{5}$

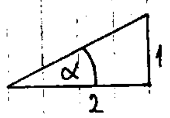
$(y'-1)^2=-4(x'-\frac{37}{20})$

одавде читамо формуле за транслацију

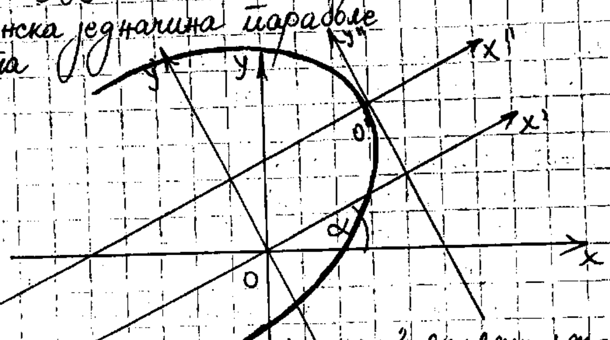
$\begin{cases} y'=y''+1\\ x'=x''+\frac{37}{20}\end{cases} \qquad y''^2=-4x''$ канонска једначина параболе

формуле трансформација координата

$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x''-y''+\frac{27}{10})\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x''+2y''+\frac{77}{20})\end{cases}$



$tg\alpha=\frac{1}{2}$



Зад. 4 Испитати коју криву дефинише једначина $x^2+4xy+my^2-2x+2my+m=0$ у зависности од m. За $m=-2$ свести дату криву на канонски облик и нацртати скицу.

Решење: $A=1 \quad B=2 \quad C=m \quad D=-1 \quad E=m \quad F=m$

$\delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=m-4 \qquad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & m & m\\ -1 & m & m\end{vmatrix}=-9m$

i) за $m=4$: $\delta=0,\ \Delta\neq 0 \Rightarrow$ парабола

ii) за $m>4$: $\delta>0,\ \Delta\neq 0 \Rightarrow$ елипса

iii) за $m<4$: $\delta<0 \Rightarrow$ а) $m\neq 0,\ \Delta\neq 0$ хипербола

б) $m=0,\ \Delta=0$ пар (паралелних) правих које се секу

за $m=-2$ тражена крива је хипербола

$x^2+4xy-2y^2-2x-4y-2=0$

координате центра

$a+2b-1=0$

$2a-2b-2=0 \Rightarrow O'(1,0)$

1° транслација $xOy \to x'O'y'$

$$\begin{cases} x = x'+1 \\ y = y' \end{cases}$$

$$(x'+1)^2 + 4(x'+1)y' - 2y'^2 - 2(x'+1) - 4y' - 2 = 0$$

$$x'^2 + 4x'y' - 2y'^2 - 3 = 0$$

2° ротација $x'O'y' \to x''O'y''$

$tg\, 2\alpha = \frac{4}{3}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$

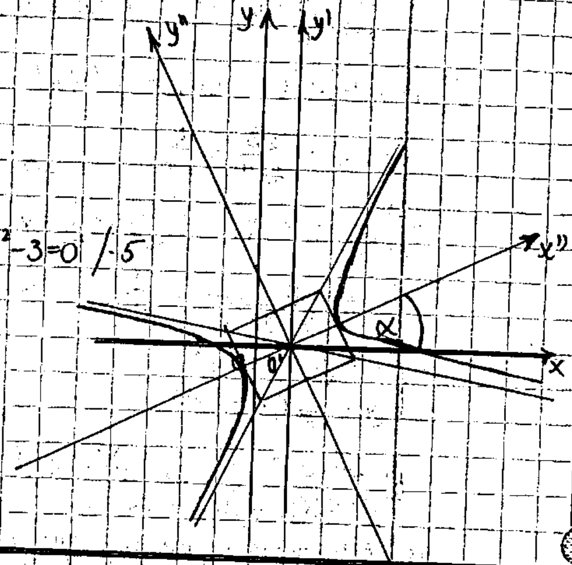
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt5}(2x''-y'') \\ y' = \frac{1}{\sqrt5}(x''+2y'') \end{cases}$$

$$\frac15(2x''-y'')^2 + \frac45(2x''-y'')(x''+2y'') - \frac25(x''+2y'')^2 - 3 = 0 \;/\cdot 5$$

$$10x''^2 - 15y''^2 = 15 \;/:15$$

$$\frac{x''^2}{\frac32} - \frac{y''^2}{1} = 1$$

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac32}\right)^2} - \frac{y''^2}{1^2} = 1$$ канонска једначина хиперболе



вежба бр. 15

30.11.2006.

Сфера

$S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ $\quad C(a,b,c)$ центар сфере $\quad R$ полупречник

Зад. 1 Написати једначину сфере која додирује паралелне равни $\alpha: x+2y-2z-2=0$ и $\beta: x+2y-2z+4=0$ а центар јој се налази на правој $p: \begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$

Решење: раван γ, $\gamma \parallel \alpha, \beta$

$d(\gamma,\alpha) = d(\gamma,\beta)$

$M(x,y,z) \in \gamma$

$d(M,\alpha) = d(M,\beta)$ $\quad \frac{|x+2y-2z-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|x+2y-2z+4|}{\sqrt{1+4+4}}$

$(x+2y-2z-2) = \pm(x+2y-2z+4)$

$x+2y-2z-2 = -x-2y+2z-4$

$2x+4y-4z+2 = 0 \;/:2$

$\gamma: x+2y-2z+1=0$

$p \cap \gamma = C$

$2x+4y-z-7=0$

$4x+5y+z-14=0 \quad \Rightarrow C(-1,3,3)$

$x+2y-2z+1=0$

$R = d(C,\alpha) = \frac{|-1+2\cdot3-2\cdot3-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{3} = 1$

$S: (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$

Зад. 2 Написати једначину равни која додирује сферу $S: x^2+y^2+z^2-10x+26z-113+2y=0$ и паралелна је правама $p_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$ и $p_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}$

Решење: $S: x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$

$(x^2-10x+25) + (y^2+2y+1) + (z^2+26z+169) - 25 - 1 - 169 - 113 = 0$

$(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z+13)^2 = 308$

$C(5,-1,-13)$ центар

$R = \sqrt{308}$

$\vec{p_1} = (2,-3,2) \qquad \vec{p_2} = (3,-2,0)$

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4,6,5)$$

$\vec{m} = (4,6,5) \qquad m: \begin{cases} x = 4t+5 \\ y = 6t-1 \\ z = 5t-13 \end{cases} \quad t \in R$

$m \cap S = \{N_1, N_2\}$

$(4t+5-5)^2 + (6t-1+1)^2 + (5t-13+13)^2 = 308$

$16t^2 + 36t^2 + 25t^2 = 308$

$t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$

$N_1(13, 11, -3) \qquad N_2(-3,-13,-23)$

$\alpha_1: 4(x-13) + 6(y-11) + 5(z+3) = 0$

$\alpha_1: 4x + 6y + 5z - 103 = 0$

$\alpha_2: 4(x+3) + 6(y+13) + 5(z+23) = 0$

$\alpha_2: 4x + 6y + 5z + 205 = 0$

Зад. 3 На праву $p: \frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{-3}$ наћи тачку најближу сфери $S: x^2+y^2+z^2=4$, а затим наћи одговарајућу тачку на сфери.

Решење: $C(0,0,0) \qquad \vec{p} = (2,2,-3)$

$\alpha \perp p, \quad C \in \alpha$

$\alpha: 2x + 2y - 3z = 0$

$p \cap \alpha = \{P\}$

$p: \begin{cases} x = 2t+4 \\ y = 2t+6 \\ z = -3t+1 \end{cases} \qquad 2(2t+4) + 2(2t+6) - 3(-3t+1) = 0$

$t = -1$

$P(2,4,4)$

$m = CP: \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in R$

$m \cap S = \{N_1, N_2\}$

$4t^2 + 16t^2 + 16t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{3} \qquad N_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad N_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$d(P, N_1) = |\vec{PN_1}| < d(P, N_2) = |\vec{PN_2}| \Rightarrow N_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Зад. 4 Дате су равни $\alpha: 3x-3y+5z-6=0$ и $\beta: 2x-y+3z-4=0$ и сфера $S: x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$

а) написати једначину равни која пролази кроз C и садржи пресек равни α и β.

б) написати једначину равни која садржи пресечну праву равни α и β и сече дату сферу по кругу полупречника $r=4$.

Решење: $(x^2-2x+1) + (y^2+4y+4) + (z^2-6z+9) - 1 - 4 - 9 - 11 = 0$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

$C(1,-2,3) \qquad R = 5$

а) постављамо прамен равни кроз $\alpha \cap \beta$

$3x - 3y + 5z - 6 + \lambda(2x - y + 3z - 4) = 0$

$\pi: (3+2\lambda)x + (-3-\lambda)y + (5+3\lambda)z - 6 - 4\lambda = 0$

$C \in \pi: (3+2\lambda)\cdot 1 + (-3-\lambda)\cdot(-2) + (5+3\lambda)\cdot 3 - 6 - 4\lambda = 0$

$18 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$\pi: (3-4)x + (-3+2)y + (5-6)z - 6 + 8 = 0$

$-x - y - z + 2 = 0$

$\pi: x + y + z - 2 = 0$

б) γ припада прамену $\Rightarrow \gamma: (3+2\lambda)x + (-3-\lambda)y + (5+3\lambda)z - 6 - 4\lambda = 0$

$d(C, \gamma) = 3$ (преко Питагорине теореме)

$$\frac{|(3+2\lambda) + (-3-\lambda)(-2) + (5+3\lambda)\cdot 3 - 6 - 3\lambda|}{\sqrt{(3+2\lambda)^2 + (-3-\lambda)^2 + (5+3\lambda)^2}} = 3$$

$|9\lambda + 18| = 3\sqrt{14\lambda^2 + 48\lambda + 43} \;/:3 \Leftrightarrow 5\lambda^2 + 12\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = -\frac{7}{5}$

Зад. 5 Написати једначину сфере која садржи кружницу $k: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ и пролази кроз тачку $A(4,4,4)$.

Решење: Једначина фамилије сфера које садрже дату кружницу k је
$$x^2+y^2+z^2-16+\lambda(x+y+z-4)=0$$
$$A\in S: \quad 16+16+16-16+\lambda(4+4+4-4)=0$$
$$8\lambda=-32$$
$$\lambda=-4$$
$$S: \ x^2+y^2+z^2-16-4x-4y-4z+16=0$$
$$(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4)=12$$
$$S: \ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12$$

Зад. 6 Написати канонску једначину пројекције кружнице k на раван xOy.

Решење: $k: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x+y+z=4 \end{cases} \rightarrow xOy$

Једначина пројекције круга k на раван xOy добија се када се из једначине круга елиминише променљива z.
$$z=4-x-y$$
$$x^2+y^2+(4-x-y)^2=16$$
$$2x^2+2y^2+2xy-8x-8y=0 \ /:2$$
$$k': \ x^2+xy+y^2-4x-4y=0$$
$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \text{крива је елиптичног типа}$$
координате центра $O'(a,b)$
$$a+\frac{1}{2}b-2=0$$
$$\frac{1}{2}a+b-2=0 \qquad O'\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$
1° транслација $xOy \rightarrow x'O'y'$
$$\begin{cases} x=x'+\frac{4}{3} \\ y=y'+\frac{4}{3} \end{cases}$$
убацујемо у једначину криве
$$x'^2+x'y'+y'^2-\frac{16}{3}=0$$
2° ротација $x'O'y' \rightarrow x''O'y''$
$$A=C \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$
$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y'') \\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'') \end{cases}$$
$$\frac{1}{2}(x''-y'')^2+\frac{1}{2}(x''-y'')(x''+y'')+\frac{1}{2}(x''+y'')^2-\frac{16}{3}=0$$
$$3x''^2+y''^2=\frac{32}{3} \ \Big/ :\frac{32}{3}$$
$$\frac{x''^2}{\frac{32}{9}}+\frac{y''^2}{\frac{32}{3}}=1 \quad \text{канонска једначина елипсе}$$

вежбе бр. 16

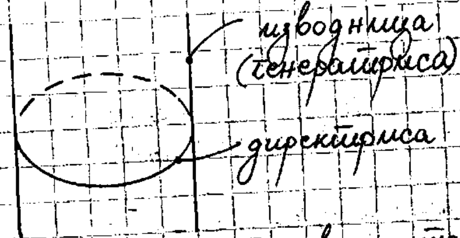
07. 12. 2006.

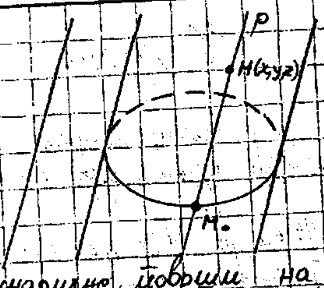
Цилиндрична површ

Зад. 1 Кружница k је пресек сфере $S: (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ и равни $\alpha: 2x-2y-z+9=0$
а) наћи центар и полупречник кружнице k
б) наћи једначину цилиндричне површи чија је директриса кружница k, а изводница јој је паралелна правој $a: x=y=z$

Решење: а) $C(3,-2,1) \quad R=10 \quad \vec{n_\alpha}=(2,-2,-1) \quad C\in n$
$$n: \begin{cases} x=2t+3 \\ y=-2t-2 \\ z=-t+1 \end{cases} \qquad n\cap\alpha=\{C_1\}$$
$$2(2t+3)-2(-2t-2)-(-t+1)+9=0$$
$$9t+18=0$$
$$t=-2$$
$C_1(-1,2,3)$ - центар кружнице
$$d(C,C_1)=|\overrightarrow{CC_1}|=|(4,-4,-2)|=6$$
$$r^2=R^2-d^2=100-36 \Rightarrow r=8 \quad \text{из Питагорине теореме}$$

б)





Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка цилиндричне површи на изводници p
Нека је $M_0(x_0,y_0,z_0)$ пресечна тачка изводнице p и кружнице k. Тада је:

$$M_0 \in k = D: \begin{cases} (x_0-3)^2+(y_0+2)^2+(z_0-1)^2=100 & (*) \\ 2x_0-2y_0-z_0+9=0 & (**) \end{cases}$$

$$\vec{a} = (1,1,1)$$
$$M_0 \in p = G: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1} \qquad (***)$$

$$(***): \quad y_0 = y-x+x_0, \quad z_0 = z-x+x_0$$

$$(**): \quad 2x_0-2(y-x+x_0)-(z-x+x_0)+9=0$$
$$x_0 = 3x-2y-z+9$$
$$y_0 = 2x-y-z+9$$
$$z_0 = 2x-2y+9$$

$$(*): \quad C: (3x-2y-z+6)^2+(2x-y-z+11)^2+(2x-2y+8)^2=100$$

Зад. 2. Дате су сфере једначинама $S_1: x^2+y^2+z^2=25$ и $S_2: (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$.
а) Написати једначину цилиндра описаног око сфера S_1 и S_2.
б) наћи пресек добијеног цилиндра са равни xOy.

Решење: а) $C_1(0,0,0)$ $\quad C_2(2,1,0)$ $\quad R_1=R_2=R=5$

$$\vec{n_\alpha} = \overrightarrow{C_1C_2} = (2,1,0) \quad C_1 \in \alpha \Rightarrow \alpha: 2x+y=0$$

$$k \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 2x+y=0 \end{cases} \qquad M_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$D: \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=25 & (*) \\ 2x_0+y_0=0 & (**) \end{cases}$$

$$M_0 \in G: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{0} \quad (***)$$

$$(***): \quad y_0 = y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0, \quad z_0 = z$$

$$(**): \quad 2x_0+y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0=0$$
$$x_0 = \frac{1}{5}(x-2y)$$
$$y_0 = \frac{1}{5}(4y-2x)$$
$$z_0 = z$$

$$(*): \quad C: \frac{1}{25}(x-2y)^2+\frac{1}{25}(4y-2x)^2+z^2=25$$
$$C: x^2-4xy+4y^2+5z^2-125=0$$

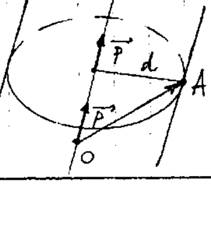
б) $C \cap xOy: x^2-4xy+4y^2-125=0$ (за $z=0$)
$$(x-2y)^2=125$$
$$x-2y=5\sqrt{5} \quad \vee \quad x-2y=-5\sqrt{5}$$

пресек цилиндра и равни xOy су две паралелне праве p_1 и p_2

$$p_1: \begin{cases} x-2y=5\sqrt{5} \\ z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad p_2 = \begin{cases} x-2y=-5\sqrt{5} \\ z=0 \end{cases}$$

Зад. 3 Дата је оса $p: x=-y=z$ кружног цилиндра и једна његова тачка $A(2,2,0)$.

Решење:



$$\vec{p} = (1,-1,1) \qquad O(0,0,0) \in p$$
$$d(A,p) = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{OA}|}{|\vec{p}|} = \frac{2\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$
$$\vec{p} \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,4)$$

Произвољна тачка M са координатама (x,y,z) припада кружном цилиндру чија је оса права p и који садржи тачку A акко је $d(M,p)=2\sqrt{2}$.

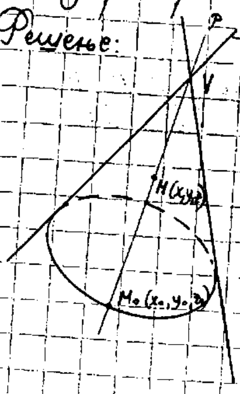
$$\frac{\sqrt{(-y-z)^2+(x-z)^2+(x+y)^2}}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{2} \quad \Big/^2$$

$$C: x^2+y^2+z^2+xy-xz+yz-12=0$$

Конусна површ

Зад. 1 Написати једначину конусне површи чији је врх у тачки $V(0,2,10)$, а директриса јој је кружница $k\,(x^2+y^2-4y=0,\ z=0)$ (цилиндар $\cap$ раван)

Решење:



Нека је $M(x,y,z)$ произвољна тачка конусне површи и нека је $M_0(x_0,y_0,z_0)$ пресечна тачка круга k и изводнице p на којој се налази тачка M. Тада је:

$$M_0 \in k = D: \begin{cases} x_0^2+y_0^2-4y_0=0 & (*) \\ z_0=0 & (**) \end{cases}$$

$$M_0 \in p = G: \quad \frac{x-x_0}{x_0-0} = \frac{y-y_0}{y_0-2} = \frac{z-z_0}{z_0-10} \quad (***)$$

$$(***) \rightarrow \quad y_0 = \frac{x_0(y-2)}{x}+2 \qquad (**) \rightarrow \quad \frac{x_0(z-10)}{x}+10=0$$

$$z_0 = \frac{x_0(z-10)}{x}+10 \qquad x_0 = -\frac{10x}{z-10}$$

$$y_0 = \frac{-10(y-2)}{z-10}$$

$$z_0=0$$

$$(*) \rightarrow \frac{100x^2}{(z-10)^2} + \frac{100(y-2)^2}{(z-10)^2} = y \ \Big/ \cdot \frac{(z-10)^2}{y}$$

$$K:\ 25x^2+25(y-2)^2=(z-10)^2$$

Зад. 2 Одредити једначину конусне површи чији је врх центар круга $k\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36\\ 3x+y-z=0\end{cases}$, а директриса ортогонална пројекција круга k на раван xOz.

Решење: $C(2,2,-3)$ центар сфере

$\vec{n}_\alpha = (3,1,-1)$

$m \perp \alpha$, $C \in m$

$$m: \begin{cases} x=3t+2 \\ y=t+2 \\ z=-t-3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$m \cap \alpha = \{C_1\}$

$3(3t+2)+(t+2)-(-t-3)=0$

$t=-1 \Rightarrow C_1(-1,1,-2)$ центар круга и врх конуса

елиминацијом променљиве y из једначине круга k добијамо пројекцију круга k на xOz

$y = z-3x$

$(x-2)^2+(z-3x-2)^2+(z+3)^2=36$

$10x^2-6xz+2z^2+8x+2z-19=0$ $\qquad \delta>0 \Rightarrow$ крива је елиптичног типа

$$D: \begin{cases} 10x^2-6xz+2z^2+8x+2z-19=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$M_0 \in D: \begin{cases} 10x_0^2-6x_0z_0+2z_0^2+8x_0+2z_0-19=0 & (*) \\ y_0=0 & (**) \end{cases}$$

$$M_0 \in G: \left\{ \frac{x-x_0}{x_0+1} = \frac{y-y_0}{y_0-1} = \frac{z-z_0}{z_0+2} \right. \quad (***)$$

$$(***) \rightarrow \quad x_0 = \frac{x+y}{1-y}$$

$$(**) \rightarrow \quad y_0 = 0$$

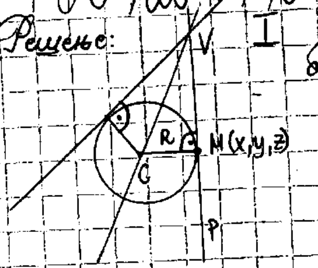
$$z_0 = \frac{z+2y}{1-y}$$

$$(*) \rightarrow 10\left(\frac{x+y}{1-y}\right)^2 - 6\left(\frac{x+y}{1-y}\right)\cdot\frac{z+2y}{1-y} + 2\cdot\left(\frac{z+2y}{1-y}\right)^2 + 8\,\frac{x+y}{1-y} + 2\,\frac{z+2y}{1-y} - 19 = 0 \ \Big/ \cdot (1-y)^2$$

$$K:\ 10(x+y)^2-6(x+y)(z+2y)^2+8(x+y)(1-y)+2(z+2y)(1-y)-19(1-y)^2=0$$

Зад. 3 Написати једначину конуса коме је врх тачка $V(1,1,1)$ и чије изводнице додирују сферу $S: x^2+y^2+z^2=1$

Решење:



I Једначину конуса наћи ћемо из услова да је одстојање центра сфере од произвољне изводнице конуса једнако полупречнику сфере.

$$d(C,p)=\frac{|\overrightarrow{VC}\times\overrightarrow{VM}|}{|\overrightarrow{VM}|}=R$$

$C(0,0,0) \quad R=1$

$\overrightarrow{VC}=(-1,-1,-1)$

$\overrightarrow{VM}=(x-1,y-1,z-1)$

$\overrightarrow{VC}\times\overrightarrow{VM}=(y-z,\ z-x,\ x-y)$

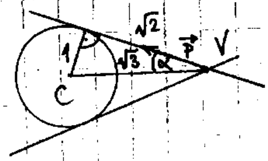
$|\overrightarrow{VM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

$$\frac{\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}}=1 \quad /^2$$

$$K: (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$

$$K: x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz+2x+2y+2z-3=0$$

II $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



$$p: \frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-1}{c}$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{VC}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|\cdot|\overrightarrow{VC}|}=\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{|(-1,-1,-1)(a,b,c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|-a-b-c|$$

$$2(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2 \quad /:b^2$$

$$2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right)=\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)^2$$

$$2\left(\left(\frac{x-1}{y-1}\right)^2+1+\left(\frac{z-1}{y-1}\right)^2\right)=\left(\frac{x+1}{y-1}+1+\frac{z-1}{y-1}\right)^2$$

$$K: 2\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right)=(x-1+y-1+z-1)$$