вежба бр. 1 06. 02. 2007.

Низови реалних бројева

Деф. 1. Низ реалних бројева је функција $f: N \to R$ и $f(n) = a_n$ зваћемо општи члан низа.

$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ за $n \in N$ – општа формула $1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \dots$

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ – рекурентна формула $a_n = n!$

Деф. 2. Низ a_n је ограничен акко постоји $(\exists M \in R^+)(\forall n \in N)(|a_n| < M)$.

Деф. 3. Низ a_n је
i) монотоно растући $(\forall n \in N)\ a_{n+1} > a_n$
ii) монотоно неопадајући $(\forall n \in N)\ a_{n+1} \geq a_n$
iii) монотоно опадајући $(\forall n \in N)\ a_n > a_{n+1}$
iv) монотоно нерастући $(\forall n \in N)\ a_n \geq a_{n+1}$

Пример: $a_n = \frac{1}{n}$ a_n је монотоно опадајући и ограничен $0 < a_n \leq 1$

Монотоност и ограниченост су међусобно независне.

Пример: $a_n = (-1)^n$ $-1 \leq a_n \leq 1$ није монотон, јесте ограничен

Пример: $a_n = n^2$ није ограничен, монотоно растући

Граничне вредности

I) неодређеност типа $\frac{\infty}{\infty}$

Зад. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+2}{4n^2-7n+3} \Leftrightarrow *$

Решење: овакав тип задатака решавамо тако што гледамо најстарије чланове

неодређене: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^\infty, \dots$

одређене: $\frac{0}{\infty} = 0, \frac{c}{\infty} = 0, \frac{\infty}{0} = \infty, \frac{\infty}{c} = \infty$.

$* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(4-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2})} = \frac{3}{4}$ најстарије чланове извлачимо напоље

Зад. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^5-3n^2+10}{1-5n^3} \Leftrightarrow *$

Решење: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5(7-\frac{3}{n^3}+\frac{10}{n^5})}{n^3(\frac{1}{n^3}-5)} = -\infty$

Зад. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2+2n+1+n^2-2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+2}{2n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2}{2n^2} = 3$

Зад. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot2+2\cdot3+\dots+n(n+1)}{n^3} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^3}$

$1+2+\dots+n = \frac{1}{2}(n+1)n$

$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} = \dfrac{1}{3}$

Зад. 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $1-\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1-\dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \dfrac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$ када имамо производ

$* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 3}\cdot\dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot\dfrac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}\cdots\dfrac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-1)}\cdot\cancel{n}}\cdot\dfrac{(n+2)\cancel{(n-1)}}{n\cdot\cancel{(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n} = \dfrac{1}{3}$

Зад. 6 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}$ $A=1$ $B=-1$ када имамо збир разломака

$* = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$

Зад. 7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{(n+1)!}\cdot\cancel{(n+2+1)}}{\cancel{(n+3)}(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2} = 0$

Зад. 8 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2}+4n}{\sqrt[3]{8n^3}-n^2} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{8n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

II) неодређености типа $\infty-\infty$

Зад. 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{25n^2+2n+4}-\sqrt{25n^2-3n-7}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{25n^2+2n+4}+\sqrt{25n^2-3n-7}}{\sqrt{25n^2+2n+4}+\sqrt{25n^2-3n-7}} = \dfrac{1}{2}$

Решење: рационалишемо израз тако да нам се изгуби корен

Зад. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(2n+3)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(2n+3)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1$

Зад. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2-4}-\sqrt{2}\,n}{\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{4n^2-1}} \Leftrightarrow *$

Решење: потребно је рационалисати и бројилац и именилац

$* = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2-4}-\sqrt{2}\,n}{\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{4n^2-1}}\cdot\dfrac{\sqrt{2n^2-4}+\sqrt{2}\,n}{\sqrt{2n^2-4}+\sqrt{2}\,n}\cdot\dfrac{\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2-1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\cancel{2n^2}-4-\cancel{2n^2})(\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2-1})}{(\cancel{4n^2}+3-\cancel{4n^2}+1)(\sqrt{2n^2-4}+\sqrt{2}\,n)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4\cdot2\cdot2n}{4\cdot2\cdot\sqrt{2}\,n} = -\sqrt{2}$

Зад. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}\right) \Leftrightarrow *$

Решење: вршимо рационализацију тако да добијемо разлику (збир) кубова
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$$* = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(2n+1)^2} + \sqrt[3]{(2n+1)(2n-1)} + \sqrt[3]{(2n-1)^2}}{-\|-}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{2n+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2n-1}\right)^3}{\sqrt[3]{(2n+1)^2} + \sqrt[3]{4n^2-1} + \sqrt[3]{(2n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt[3]{(2n+1)^2} + \sqrt[3]{4n^2-1} + \sqrt[3]{(2n-1)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{4n^2}\left(\sqrt[3]{(1+\underbrace{\tfrac{1}{2n}}_{0})^2} + \sqrt[3]{1-\underbrace{\tfrac{1}{4n^2}}_{0}} + \sqrt[3]{(1-\underbrace{\tfrac{1}{2n}}_{0})^2}\right)} = 0 \quad \left(\text{облик } \frac{c}{\infty}\right)$$

Зад. 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right) \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - \sqrt[3]{n^2-n^3}\cdot n + n^2}{-\|-}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \cancel{n^3} + \cancel{n^3}}{\sqrt[3]{(n^2-n^3)^2} - \sqrt[3]{n^2-n^3}\cdot n + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(\sqrt[3]{(\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}-1)^2} - \sqrt[3]{\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}-1} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

III) неодређености типа 1^∞

сви се своде на број $e^{\square}$; користимо следеће познате лимесе

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{f(n)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$$

Зад. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+10} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+10} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}_{e}\right]^{\frac{n+10}{n} \to 1} = e^1 = e$

Зад. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{2n} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2-1}{n+2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)}}_{e}\right]^{-\frac{2n}{(n+2)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{-n-2}} = e^{-2}$

Зад. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n-2}{n^2+4n+3}\right)^{n^2-5n} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4n+3-5}{n^2+4n+3}\right)^{n^2-5n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-5}{n^2+4n+3}\right)^{n^2-5n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+4n+3}{-5}}\right)^{\frac{n^2+4n+3}{-5}}}_{e}\right]^{\frac{-5}{n^2+4n+3}\cdot(n^2-5n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-5(n^2-5n)}{n^2+4n+3}} = e^{-5}$$

Зад. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln(3n+2) - \ln(3n)\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\dfrac{3n+2}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{3n+2}{3n}\right)^n$

log и lim могу да замене места!

$$\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n}\right)^n = \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^n = \ln\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}}_{e}\right]^{\frac{2\cdot n}{3n}} = \ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}} = \frac{2}{3}$$

вежба бр. 2 08.02.2007.

Наставак

IV неодређености степена

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ +\infty, & q>1 \\ \text{не постоји}, & q\le -1 \end{cases}$$

Зад. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 8^{n+1}-15\cdot 2^n}{2^{n+1}-2\cdot 8^n} \Leftrightarrow *$

Решење: извлачимо онај који најбрже расте

$$* = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}\left(4-\frac{15}{8}\left(\frac{2}{8}\right)^{n+1}\right)}{8^n\left(2\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{8}\right)^n}_{0}-2\right)} = \frac{8\cdot 4}{-2} = -16$$

Зад. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^{n}+1\right)}{5^{n+1}\left(\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}}_{0}+1\right)} = \dfrac{1}{5}$

V $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Зад. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^5} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n^5}}_{1} = 1$

Зад. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3+3n} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{3}{2n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{n^3}}_{1}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{3}{2n^2}} = 1$

$$\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{3}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{3}{2n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\underbrace{\frac{3}{2n^2}}_{0}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1}{n} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$\ln L = 0 \Rightarrow L = 1$

T2M: $a_n \le b_n \le c_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

$$\sqrt[n]{2n^3} \le \sqrt[n]{2n^3+3n} \le \sqrt[n]{2n^3+3n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^3} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^3} = 1$$

$$\xRightarrow{T2M} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3+3n} = 1$$

VI) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$\log_a n << n^k << a^n << n! << n^n$

Зад. 1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + n^2 \cdot 3^n} \Leftrightarrow *$

Решенье: $* = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n^2 \cdot 3^n}{5^n}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + n^2 \cdot (\frac{3}{5})^n}$

$\ln L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{n^2}{(\frac{5}{3})^n}\right) = \frac{\ln 1}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$

$\ln L = 0 \Rightarrow L = 1 \Rightarrow * = 5$

Зад. 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n + \log n}{n - 3,5} \Leftrightarrow *$

Решенье: $* = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot (5 + \overset{0}{\frac{\log n}{n}})}{\cancel{n} \cdot (1 - \underset{0}{\frac{3,5}{n}})} = 5$

Зад. 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^{10}}{n^4 + n!} \Leftrightarrow *$

Решенье: $* = \frac{3^n \left(1 + \overset{0}{\frac{n^{10}}{3^n}}\right)}{n! \left(\underset{0}{\frac{n^4}{n!}} + 1\right)} = 0$

Зад. 4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \right) \Leftrightarrow *$

Решенье: $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$

$\vdots$

$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$

$\frac{n}{\sqrt[3]{n^3}} \le S_n \le \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} = 1$

1

Зад. 5. $a \in R$: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an^2+3}{n^2+5n+6} - \frac{n+1}{n+2} \right) = 0 \Leftrightarrow *$

Решенье: $* = \lim_{n\to\infty} \frac{(an^3+3)(n+2) - (n+1)(n^2+5n+6)}{(n^2+5n+6)(n+2)} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n^3 + (\cdots)n^2 + \cdots}{n^3 + (\cdots)n^2 + \cdots} = 0$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Зад. 6. $a \in R$: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+4} + \frac{\sqrt{n}+5n}{\sqrt{n}-4} \right) = 2 \Leftrightarrow *$

Решенье: $* = \lim_{n\to\infty} \frac{(a\sqrt{n}+3)(\sqrt{n}-4) + (\sqrt{n}+5n)(\sqrt{n}+4)}{(\sqrt{n}+4)(\sqrt{n}-4)} = 2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)n + (\cdots)\sqrt{n} + (\cdots)}{n - 16} = 2$

$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$

Зад. 7. $a \in R: \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+an+2}{n^2+an+3}\right)^{an^2+3n} = 1$

Решење: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+an+2}{n^2+an+3}\right)^{an^2+3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n^2+an+3)-1}{n^2+an+3}\right)^{an^2+3n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-(n^2+an+3)}\right)^{-(n^2+an+3)}\right]^{\frac{an^2+3n}{-(n^2+an+3)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an^2+3n}{-n^2-an-3}} = e^{-a} = 1 \Rightarrow a=0$

Теорема о конвергенцији низова

Теор. 1. Сваки монотоно неопадајући низ ограничен одозго је конвергентан.

Теор. 2. Монотоно нерастући низ ограничен одоздо је конвергентан.

Зад. 1. Показати да је низ $a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ конвергентан и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решење: 1) монотоност

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n \cdot n!}} = \frac{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1)^{n+1}}{3 \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{n!} \cancel{(n+1)} \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{3 \cdot n^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{3} < 1$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ низ a_n је монотоно опадајући

2) ограниченост

сигурно су сви већи од нуле јер $n=1,2,\dots$

ТОКН $\Rightarrow$ низ a_n конвергира $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot a_n$

$a = \frac{1}{3} e \cdot a \qquad a=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Зад. 2. Доказати да је низ (a_n) дефинисан са $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2}$, $n \in N$ конвергентан и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решење: $a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{7} \quad a_4 = \frac{1}{15} \quad a_5 = \frac{1}{31} \qquad (a_n \searrow,\ a_n > 0)$

1) ограниченост

Низ (a_n) је ограничен одоздо, тј. $a_n > 0$

Математичка индукција

1) $n=1: a_1 > 0,\ 1 > 0$ (Т)

2) претпоставимо да тврђење важи за природан број n, тј. $a_n > 0$

3) докажимо да тврђење важи за $n+1$

$a_{n+1} > 0$ (?)

(их) $\frac{a_n}{a_n+2} > 0$ (Т) $\Rightarrow$ низ (a_n) је ограничен одоздо

(их)

2) монотоност

Низ (a_n) је монотоно опадајући $a_n > a_{n+1}$

математичка индукција:

1) $n=1$: $a_1 > a_2$, $1 > \frac{1}{3}$ (Т)

2) ПП да ТВ важи за ПР БР n, тј. $a_n > a_{n+1}$ (ИХ)

3) докажимо да тв. важи за ПР БР $n+1$

$a_{n+1} > a_{n+2}$ (?)

$$\frac{a_n}{a_n+2} > \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2}$$

$$\frac{a_n}{a_n+2} - \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+2} > 0$$

$$\frac{a_n \cdot a_{n+1} + 2a_n - a_n \cdot a_{n+1} - 2a_{n+1}}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)} > 0$$

$$\frac{2(a_n - a_{n+1})}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)} > 0$$ => Низ (a_n) је монотоно опадајући

(1) и (2) => низ (a_n) је КВ тј. $\exists_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n+2}$$

$a = \frac{a}{a+2}$ => $a = 0$ v $\cancel{a=-1}$

вежба бр. 3 09. 02. 2007.

Наставак

Зад. 3. Доказати да низ (a_n) дефинисан са $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}$ конвергира и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Решење: $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{4}{5}$ $a_3 = \frac{40}{41}$ $(a_n \nearrow, a_n < 1)$

2° монотоност:

низ (a_n) је монотоно растући, тј. $a_{n+1} > a_n$

доказ математичком индукцијом

1) $n=1$: $a_2 > a_1$, $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$ (Т)

2) ПП да ТВ важи за ПР БР n, тј. $a_{n+1} > a_n$ (ИХ)

3) докажимо да ТВ важи за $n+1$

$a_{n+2} > a_{n+1}$

$$\frac{2a_{n+1}}{\underbrace{1+a_{n+1}^2}_{>0}} > \frac{2a_n}{\underbrace{1+a_n^2}_{>0}} \Leftrightarrow 2a_{n+1}(a_n^2+1) > 2a_n(1+a_{n+1}^2)$$

$$2a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n^2 - 2a_n - 2a_n a_{n+1}^2 > 0 \;/:2$$

$$(a_{n+1} - a_n) + a_n a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) > 0$$

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{>0\ (ИХ)}\underbrace{(1 - a_n a_{n+1})}_{>0} > 0$$ (мора прво ограниченост)

1° ограниченост:

низ (a_n) је ограничен одозго, тј. $a_n < 1$

доказ математичком индукцијом

1) $n=1$: $a_1 < 1$, $\frac{1}{2} < 1$ (Т)

2) ПП да ТВ важи за n, $a_n < 1$ (ИХ)

3) докажимо да ТВ важи за $n+1$

$a_{n+1} < 1$ $\qquad a_n^2 - 2a_n + 1 > 0$

$\frac{2a_n}{1+a_n^2} < 1$ $\qquad (a_n - 1)^2 > 0$ (Т)(ИХ) => низ (a_n) је ограничен одозго

$\Rightarrow$ низ (a_n) је монотоно растући
1° и 2° $\Rightarrow$ низ (a_n) је конвергентан тј. $\exists_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2a_n}{1+a_n^2}$

$a = \frac{2a}{1+a^2}$ $\quad a^3+a = 2a$

$a^3 - a = 2a$

$a(a-1)(a+1) = 0 \quad \cancel{a=0} \lor a=1 \lor \cancel{a=-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Зад. 4. Доказати да је низ (a_n) дефинисан са $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ конвергентан и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решење: $a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $\quad (a_n \nearrow)$

1° монотоност
низ (a_n) је монотоно растући, тј. $a_{n+1} > a_n$
доказ математичком индукцијом:
1) $n=1$: $a_2 > a_1$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ (T)
2) ПП да ТВ важи за n, $a_{n+1} > a_n$ (ИХ)
3) докажимо да ТВ важи за $n+1$
$a_{n+2} > a_{n+1}$ (?)
$\sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n} \;/^2$
$2 + a_{n+1} > 2 + a_n$
$a_{n+1} > a_n$ (T) (ИХ) $\Rightarrow$ низ (a_n) је монотоно растући
с обзиром да ограничености не можемо наћи одокативном методом претпоставићемо да низ конвергира и наћи лимес, па ћемо за тај број доказивати ограниченост
$\exists_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$ $\quad a = \sqrt{2+a}$
$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \cancel{a=-1} \lor a = 2$

2° ограниченост
низ (a_n) је ограничен одозго, тј. $a_n < 2$
доказ математичком индукцијом:
1) $n=1$: $a_n < 2$, $\sqrt{2} < 2$ (T)
2) ПП да ТВ важи за ПР. БР n, тј. $a_n < 2$ (ИХ)
3) докажимо да ТВ важи за $n+1$
$a_{n+1} < 2$ (?)
$\sqrt{2+a_n} < 2 \;/^2 \Rightarrow 2 + a_n < 4 \Rightarrow a_n < 2$ (T) (ИХ)
$\Rightarrow$ низ (a_n) је ограничен одозго
1° и 2° $\Rightarrow$ низ (a_n) је КВ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Поднизови

Деф. 1 Низ $(b_n)_{n\in N}$ када n пролази N је подниз низа (a_n) ако је $b_n = a_{p_n}$ где је $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$ растући низ природних бројева.

Деф. 2 Тачка $t \in R$ је тачка нагомилавања скупа S ако свака околина тачке t садржи бесконачно много елемената скупа S.

Деф. 3 За дати низ реалних бројева сваки од лимеса њехових подизова зовемо делимични лимес тог низа.

Деф. 4 Највећа тачка нагомилавања низа (a_n) зове се горњи лимес или лимес супериор низа (a_n), а ознака је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$. Аналогно се дефинише доњи лимес или лимес инфериор (најмања тачка нагомилавања) $\underline{\lim} a_n = \lim \inf a_n$.

Теор. 1 Низ (a_n) има граничну вредност акко је $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$, тј. акко има тачно једну тачку нагомилавања.

Заједнички текст за наредне задатке:
За дате поднизове $(a_n)_{n\in N}$ одредити тачке нагомилавања, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$

Зад. 1. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

Решење: 1) $n=2k$: $a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1+(-1)^{2k}}{2} = \frac{1}{2k}+1$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$$

2) $n=2k+1$: $a_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} = \frac{-1}{2k+1} + 0$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

има два подниза $\{a_{2k}, a_{2k+1}\}$ Т. Н. 0, 1

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$ $\quad \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_n = 1$

Зад. 2. $a_n = 1+\frac{n}{n+1}\cdot \cos\frac{n\pi}{2}$

Решење: 1) $n=2k$: $a_{2k} = 1+\frac{2k}{2k+1}\cos k\pi = 1+\frac{2k}{2k+1}\cdot(-1)^k$

а) $k=2m$: $a_{4m} = 1+\frac{4m}{4m+1}\cdot(-1)^{2m} = 1+\frac{4m}{4m+1}$ $\quad \lim\limits_{m\to\infty} a_{4m} = 2$

б) $k=2m-1$: $a_{4m-2} = 1+\frac{4m-2}{4m+1}\cdot(-1)^{2m-1} = 1-\frac{4m-2}{4m+1}$ $\quad \lim\limits_{m\to\infty} a_{4m-2} = 0$

2) $n=2k-1$: $a_{2k-1} = 1+\frac{2k-1}{2k}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2} = 1$

$\{a_{4m}, a_{4m-2}, a_{2k-1}\}$ Т. Н. 0, 1, 2

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$ $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 2$

Зад. 3. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\cos n\pi + \sin\frac{n\pi}{4}$

Решење: $a_n = (-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$

1) $n=4k$: $a_{4k} = (-1)^{4k}\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k} + \sin k\pi = \left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k}$; $\quad \lim\limits_{k\to\infty} a_{4k} = e$

2) $n=4k-1$: $a_{4k-1} = (-1)^{4k-1}\left(1+\frac{1}{4k-1}\right)^{4k-1} + \sin\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

а) $k=2m$: $a_{8m-1} = -\left(1+\frac{1}{8m-1}\right)^{8m-1} + \sin\left(2m\pi-\frac{\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-1} = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}$

б) $k=2m-1$: $a_{8m-5} = -\left(1+\frac{1}{8m-5}\right)^{8m-5} + \sin\left((2m-1)\pi-\frac{\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-5} = -e+\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $n=4k-2$: $a_{4k-2}=(-1)^{4k-2}\left(1+\frac{1}{4k-2}\right)^{4k-2}+\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$

а) $k=2m$: $a_{8m-2}=\left(1+\frac{1}{8m-2}\right)^{8m-2}+\sin\left(2m\pi-\frac{\pi}{2}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-2}=e-1$

б) $k=2m-1$: $a_{8m-6}=\left(1+\frac{1}{8m-6}\right)^{8m-6}+\sin\left((2m-1)\pi-\frac{\pi}{2}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-6}=e+1$

4) $n=4k-3$: $a_{4k-3}=(-1)^{4k-3}\left(1+\frac{1}{4k-3}\right)^{4k-3}+\sin\left(4\pi-\frac{3\pi}{4}\right)$

а) $k=2m$: $a_{8m-3}=-\left(1+\frac{1}{8m-3}\right)^{8m-3}+\sin\left(2m\pi-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-3}=-e-\frac{\sqrt{2}}{2}$

б) $k=2m-1$: $a_{8m-7}=-\left(1+\frac{1}{8m-7}\right)^{8m-7}+\sin\left((2m-1)\pi-\frac{3\pi}{4}\right)$; $\lim\limits_{m\to\infty} a_{8m-7}=-e+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Т. Н. $e, -e+\frac{\sqrt{2}}{2}, -e-\frac{\sqrt{2}}{2}, e-1, e+1$

$\underline{\lim}\, a_n=-e-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \overline{\lim}\, a_n=e+1$

Зад. 4. Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) и вредност параметра a за које низ конвергира.

$$a_n=\frac{1+2n(-1)^n}{3+4n(-1)^n}+\frac{1+(-1)^n}{n}\cdot a, \quad a\in R$$

Решење: 1) $n=2k$: $a_{2k}=\frac{1+2(2k)(-1)^{2k}}{3+4(2k)(-1)^{2k}}+\frac{1+(-1)^{2k}}{k}\cdot a=\frac{1+4k}{3+8k}+\frac{a}{2}$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1+4k}{3+8k}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$$

2) $n=2k-1$: $a_{2k-1}=\frac{1+2(2k-1)(-1)^{2k-1}}{3+4(2k-1)(-1)^{2k-1}}+\frac{1+(-1)^{2k-1}}{n}\cdot a$

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}=\frac{1}{3}$$

Т. Н. $\frac{1+a}{2}, \frac{1}{3}$

$\frac{1+a}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

Зад. 5. Дат је низ $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}+\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n+(1+\alpha)\sin\frac{n\pi}{2}$

Одредити α из услова да низ конвергира и наћи његову граничну вредност

Решење: $\underline{\lim}\, a_n=\overline{\lim}\, a_n \Rightarrow (a_n)$ КВ

$\sin\frac{n\pi}{2}\in\{-1,0,1\}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{3^n\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}+\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{n-1}\cdot n}+(1+\alpha)\cdot 1\right)=\frac{1}{3}+e^2+(1+\alpha)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(-\text{''}-\ \text{''}-+(1+\alpha)(-1)\right)$$

$\overline{\lim}\, a_n=\underline{\lim}\, a_n$

$\frac{1}{3}+e^2+(1+\alpha)=\frac{1}{3}+e^2-(1+\alpha)$

$\alpha=-1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{3}+e^2$

вежба бр. 4 13. 02. 2007.

Редови реалних бројева

Деф. 1. Израз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ назива се бесконачним реалним редом са општим чланом a_n.

Деф. 2. За дати низ реалних бројева $(a_n)_{n\in N}$ бројеви $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ су његове делимичне суме индекса n, а низ $(S_n)_{n\in N}$ је његов низ делимичних сума

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$

Деф. 3. Ако постоји коначан лимес S_n $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ онда кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и да му је збир једнак S.

Ми ћемо се бавити само испитивањем да ли ред конвергира. Ако не постоји $\lim_{n\to\infty} S_n$ кажемо да ред дивергира.

Теор. 1. Ако ред бројева $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Обрнуто не важи.

Теор. 2. Ако општи члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не тежи нули онда ред дивергира.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ $a\neq 0,\ q\neq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}, \quad q\neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ +\infty, & q>1 \\ \text{не постоји}, & q\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q|<1 \\ \infty, & q>1 \\ \text{не постоји}, & q\leq 1 \end{cases}$$

Геометријски ред конвергира за $|q|<1$ и $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$

Редови са позитивним члановима

Деф. 1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при чему $a_n > 0$ је ред бројева са позитивним члановима.

Када испитујемо конвергенцију редова са позитивним члановима прво гледамо да ли је испуњено $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, а онда применимо критеријум за конвергенцију редова.

Поредбени критеријум

Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) редови са позитивним члановима.

Теор. 1. Нека за чланове редова (1) и (2) за неко $n_0 \in N$ важи да је за свако $n \geq n_0$ испуњено да је $a_n \leq b_n$. Онда:

1° из конвергенције реда (2) следи конвергенција реда (1)
2° из дивергенције реда (1) следи дивергенција реда (2)

Теор. 2. Нека за чланове реда (1) и (2) постоји (коначан је) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,\ L\neq 0$. Онда ти редови или оба конвергирају или оба дивергирају (еквиконвергентни редови) у ознаци $a_n \sim b_n$.

Поредбени критеријум ћемо везивати за ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{KB} & p>1 \\ \text{ДВ} & p\leq 1 \end{cases}$

Испитати конвергенцију следећих редова.

Зад. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

Решење: $a_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \to 0 \quad (n\to\infty)$ задовољен 1. услов па користимо критеријум

$a_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \frac{1}{n}$ понаша се исто као и ред $\frac{1}{n}$

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ДВ

Зад. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^5+3n+7}}$

Решење: $a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^5+3n+7}} \to 0 \quad (n\to\infty)$

$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^5+3n+7}} \sim \frac{n}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ KB

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ KB

Зад. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

Решење: $a_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty) \quad \overset{\text{T.2.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ ДВ

Зад. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

Решење: $a_n \to 0 \quad (n\to\infty)$

$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-n+1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$

$a_n \sim \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ KB

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ KB

Зад. 5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-1}$

Решење: $\ln n < n \quad n>1 \qquad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

$\sum\limits_{2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ДВ $\qquad \underset{b_n}{\downarrow} \quad \underset{a_n}{\downarrow}$

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ДВ

Зад. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^2}$

Решење: $a_n = \frac{\sin(n!)}{n^2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ не постоји али коначан $\frac{\text{const}}{\infty} = 0 \Rightarrow a_n \to 0 \ (n\to\infty)$

$a_n = \frac{\sin(n!)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ KB

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ KB

У следећим задацима користићемо познате граничне вредности.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Ако ставимо да је $x = \frac{1}{n}$ онда када $x \to 0$, $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$

Зад. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$

Решење: $a_n = \ln\frac{n^2+1}{n^2} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ КВ $\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} a_n$ КВ

Зад. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

Решење: $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$a_n = \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \sqrt{n}\cdot 2\sin^2\frac{1}{2n} \sim 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{2\sqrt{n}}{4n^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $\sum\limits_1^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ КВ

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} a_n$ КВ

вежба бр. 5 16. 02. 2007.

Наставак

Зад. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+5n)^p}{2n+\sqrt{n}}$, $p\in\mathbb{R}$, у зависности од p одредити када ред КВ

Решење: $a_n = \frac{(n^2+5n)^p}{2n+\sqrt{n}} \sim \frac{n^{2p}}{2n} \sim \frac{1}{n^{1-2p}}$ сводимо на познати облик $\sum\limits_1^{\infty}\frac{1}{n^p}$

и $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^{1-2p}} \begin{cases} \text{КВ} & 1-2p>1,\ p<0 \\ \text{ДВ} & 1-2p\le 1,\ p\ge 0 \end{cases} \overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} a_n \begin{cases} \text{КВ} & p<0 \\ \text{ДВ} & p\ge 0 \end{cases}$

Зад. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+1} - 2n)^p}{4n^2+1}$

Решење: $a_n = \frac{(\sqrt{4n^2+1} - 2n)^p}{4n^2+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{4n^2+1}+2n}\right)^p = \frac{(4n^2+1-4n^2)^p}{(4n^2+1)(\sqrt{4n^2+1}+2n)^p} \sim \frac{1}{4n^2\cdot(4n)^p} \sim \frac{1}{n^2 n^p} = \frac{1}{n^{p+2}}$

и $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}} \begin{cases} \text{КВ}, & p+2>1,\ p>-1 \\ \text{ДВ}, & p+2\le 1,\ p\le -1 \end{cases} \overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} a_n \begin{cases} \text{КВ}, & p>-1 \\ \text{ДВ}, & p\le -1 \end{cases}$

Зад. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n+1) - \ln n)^p}{(2n-1)^2}$

Решење: $a_n = \frac{(\ln(n+1) - \ln n)^p}{(2n-1)^2} = \frac{\left(\ln\frac{n+1}{n}\right)^p}{(2n-1)^2} = \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^p}{(2n-1)^2} \sim \frac{\frac{1}{n^p}}{4n^2} \sim \frac{1}{n^{p+2}}$

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} a_n \begin{cases} \text{КВ} & p>-1 \\ \text{ДВ} & p\le -1 \end{cases}$

Зад. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4 - an}\right)$, $a\in\mathbb{R}$

Решење: $a_n = \left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4-an}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} = \frac{n^4+2n+1-n^4 an}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} \sim \frac{(2-a)n}{2n^2}$

1° $a\ne 2$: $a_n \sim \frac{(2-a)n}{2n^2} \sim \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_1^{\infty}\frac{1}{n}$ ДВ

2° $a=2$: $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ КВ хиперхармонијски редови $\frac{1}{n^k}$

Даламберов критеријум

Теор. 1. Нека за ред сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

1° Ако је $l<1$ ред конвергира
2° Ако је $l>1$ ред дивергира
3° Ако је $l=1$ нема одговора помоћу овог критеријума.

Зад. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n-1)!}$

Решење: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+2)^3}{(2n+1)!}}{\frac{(n+1)^3}{(2n-1)!}} = \frac{(2n-1)!\,(n+2)^3}{(2n+1)!\,(n+1)^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n-1)!}\,\overbrace{(n+2)^3}^{\to 1}}{\cancel{(2n-1)!}\,2n(2n+1)\,(n+1)^3} = 0 < 1 \overset{Д.К.}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ КВ.}$$

Зад. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$

Решење: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\,2^{n+1}}}}{\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 2^n}}} = \frac{(4n+1)\sqrt{n\cdot 2^n}}{(4n-3)\sqrt{(n+1)}\,2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{(4n+1)}{(4n-3)}}_{1}\,\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{1}\,\frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \overset{Д.К.}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ КВ.}$$

Зад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Решење: $a_n = \frac{n^n}{n!} \to \infty \ (n\to\infty) \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ДВ

Зад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Решење: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\cdot n^n}{\cancel{n!}\,(n+1)^{\cancel{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\overset{Д.К.}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ КВ}$$

Даламберов критеријум користимо за редове где фигурирају степени и факторијели, а поредбени за редове са полиномима.

Зад. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

Решење: $(2n)!! = 2n\,(2n-2)(2n-4)\cdots 2$
$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}}{\frac{n!}{(2n-1)!!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,\cancel{n!}\,\cancel{(2n-1)!!}}{\cancel{n!}\,(2n+1)\,\cancel{(2n-1)!!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\overset{Д.К.}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ КВ}$$

Зад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+4^n}$

Решење: $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}+4^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n+4^n}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{\to 1}\cdot\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(\overbrace{\left(\tfrac{3}{4}\right)^n}^{0}+1\right)}{4^{n+1}\left(\underbrace{\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n+1}}_{0}+1\right)} = \frac{1}{4} < 1$$

$$\overset{Д.К.}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ КВ}$$

Зад. 7.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6n-4)(6n-7)\cdots 8\cdot 5\cdot 2}{3^{pn}(2n)!}$, $p \neq 2$

Решење: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(6n+2)(6n-1)(6n-4)\cdots 8\cdot 5\cdot 2}{3^{p(n+1)}(2(n+1))!}}{\frac{(6n-4)(6n-7)\cdots 8\cdot 5\cdot 2}{3^{pn}(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^{pn}}(2n)!(6n+2)(6n-1)}{\cancel{3^{pn}}\cdot 3^p(2n+2)(2n+1)(2n)!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(6n+2)(6n-1)}^{3^2}}{3^p(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{3^{p-2}}$

1° Ако је $\frac{1}{3^{p-2}} < 1$ онда ред КВ, $p-2>0$, $p>2$

2° Ако је $\frac{1}{3^{p-2}} > 1$ онда ред ДВ, $p-2<0$, $p<2$

Зад. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n\cdot n!}{n^n}$, $p>0$

Решење: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{p^n}\cdot n!}{n^n}} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{p}{e}$

$\xRightarrow{\text{Д.К.}}$ 1° Ако је $\frac{p}{e}<1$, $0<p<e$ ред КВ

2° Ако је $\frac{p}{e}>1$, $p>e$ ред ДВ

3° Ако је $\frac{p}{e}=1$, $p=e$?

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{e}{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\nearrow e}} > 1$

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ ред дивергира

Чланови реда образују монотоно растући низ позитивних бројева и не може бити $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, што значи да није задовољен потребан услов за конвергенцију, па за $p=e$ дати ред из Зад. 8 дивергира.

Кошијев критеријум

Теор. 1. Нека за ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постоји $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

1° ако је $l<1$ ред конвергира

2° ако је $l>1$ ред дивергира

3° ако је $l=1$ критеријум не даје одговор на конвергенцију реда.

Зад. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n}$

Решење: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{1}\cdot \overbrace{\sqrt[n]{2^{n+1}}}^{2}}{\underbrace{\sqrt[n]{3^n}}_{3}} = \frac{2}{3} < 1 \xRightarrow{\text{К.К.}} \sum_1^{\infty} a_n$ КВ

Зад. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Решење: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1 \xRightarrow{\text{К.К.}} \sum_1^{\infty} a_n$ КВ

Зад. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n$

Решење: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\Big)^n = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} e^n = \infty > 1 \xRightarrow{\text{К.К.}} \sum_1^{\infty} a_n$ КВ

Зад. 4. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\frac{6m+1}{5m-3}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2m}{3}}$

Решење: $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{6m+1}{5m-3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}} < 1 \overset{\text{к.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ КВ

Зад. 5. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \ln^m \frac{3m+1}{m}$

Решење: $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \ln\left(\frac{3m+1}{m}\right) = \ln \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{3m+1}{m}\right) = \ln 3 > 1 \overset{\text{к.к.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ ДВ

Зад. 6*. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m^2+am-3}{m^2+2m+5}\right)^{m^2}, \quad a\in\mathbb{R}$

Решење: $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{m^2+am-3}{m^2+2m+5}\right)^{m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{m^2+2m+5-2m-5+am-3}{m^2+2m+5}\right)^{m}$

$= \lim\limits_{m\to\infty} \left(1+\frac{(a-2)m-8}{m^2+2m+5}\right)^{m} = \lim\limits_{m\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{m^2+2m+5}{(a-2)m-8}}\right)^{\frac{m^2+2m+5}{(a-2)m-8}}\right]^{\cdots} = e^{a-2}$

$\overset{\text{к.к.}}{\Longrightarrow}$ 1° Ако је $e^{a-2}<1$, $a-2<0$, $a<2$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ КВ

2° Ако је $e^{a-2}>1$, $a>2$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ ДВ

3° Ако је $e^{a-2}=1$, тј. $a=2$ (?)

$\lim\limits_{m\to\infty} a_m = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{m^2+2m-3}{m^2+2m+5}\right)^{m^2} = \cdots = \lim\limits_{m\to\infty} \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{m^2+2m+5}{-8}}\right)^{\frac{m^2+2m+5}{-8}}}_{e}\Bigg)^{\frac{-8m^2}{m^2+2m+5}\to -8}$

$= e^{-8} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ ДВ

вежба бр. 6 20. 02. 2007.

Редови са произвољним члановима - апсолутна и условна конвергенција

Деф. 1. За ред бројева $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$, $a_m\in\mathbb{R}$ ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_m|$ је његов модуларни ред.

Деф. 2. Ако модуларни ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_m|$ реда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ КВ кажемо да ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ апсолутно конвергира.

Теор. 1. Ако $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ АКВ онда он и конвергира.

Деф. 3. Ако је ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ КВ али није АКВ кажемо да ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ условно конвергира.

Алтернативни ред

Деф. 4. Нека је $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ низ бројева са позитивним члановима. Редови облика $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} a_m$ и $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m} a_m$ су алтернативни редови.

Теор. 2. (Лајбницов критеријум) Ако је $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ опадајући низ позитивних бројева, такав да је $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = 0$, онда алтернативни ред $\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} a_m$ ($\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m} a_m$) онда овај ред конвергира (условно конвергира)!

Зад. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

Решење: проверавамо да ли модуларни ред конвергира
универзални водич за народне задатке

$1^\circ \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

КВ $\rightarrow$ дати ред АКВ

ДВ $\rightarrow$ дати ред не КВА

(ДВ или УКВ) Лајбницов критеријум

1) $|a_n| \searrow$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow$ УКВ

$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} > 0$

$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ КВ $\overset{\text{П.К.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ КВ $\Rightarrow$ дати ред АКВ

Зад. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n^2)!}$

Решење: алтернативни ред $\quad a_n = \frac{(-2)^n}{(n^2)!} = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n^2)!}$

$|a_n| = \frac{2^n}{(n^2)!} < \frac{2^n}{n!} = b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{2^n (n+1) \cdot n!} = 0 < 1 \overset{\text{ДК}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ КВ $\overset{\text{П.К.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ КВ

$\Rightarrow$ дати ред АКВ

Зад. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}$

Решење: $|a_n| = \left|(-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n-1)^n}\right| = \frac{3^n}{(2n-1)^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{2n-1} = 0 < 1 \overset{\text{КК}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ КВ $\Rightarrow$ дати ред АКВ

Зад. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^3}$

Решење: $|a_n| = \frac{3^n}{n^3} = \infty \Rightarrow \sum\limits_{1} |a_n|$ ДВ $\overset{\text{Л.К.}}{\Longrightarrow}$ дати ред ДВ

Зад. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Решење: $|a_n| = \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ДВ $\overset{\text{П.К.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ ДВ $\Rightarrow$ ред не КВА

$\Rightarrow$ дати ред или дивергира или условно конвергира

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1} > 0$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

2) $|a_n| \searrow$ (?)

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+2)} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} < 1 \;,\; |a_{n+1}| < |a_n| ,\; |a_n| \searrow$$

2. начин: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0 \;,\; a_n > a_{n+1} \;,\; |a_n| \searrow$

3. начин (користимо изводе)

$a_n = \frac{n}{n^2+1}$ $\quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1(x^2+1)^2 - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\overset{<0}{1-x^2}}{\underset{>0}{(x^2+1)^2}} < 0$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow |a_n| \searrow$

$\overset{\text{Л.К.}}{\Longrightarrow}$ дати ред УКВ

Зад. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, $p \in R$

Решење: $|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}$ и $\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{КВ} & p>1 \\ \text{ДВ} & p\le 1 \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_1^{\infty} |a_n| \begin{cases} \text{КВ} & p>1 \\ \text{ДВ} & p\le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ дати ред $\begin{cases} \text{АКВ}, & p>1 \\ \text{не КВА}; & p\le 1 \end{cases}$

$|a_n| = \frac{1}{n^p}$, $p \le 1$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ за $p > 0 \Rightarrow$ дати ред ДВ за $p \le 0$ јер $|a_n| \not\to 0$

2) $|a_n| \searrow$ (?)

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^p}{(n+1)^p} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \Rightarrow |a_n| \searrow$

$\overset{\text{Л.К.}}{\Longrightarrow}$ дати ред УКВ за $0 < p \le 1$

ДВ	УКВ	АКВ
	0	1

Зад. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n^p}$, $p \in R$

Решење: $|a_n| = \left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n^p}\right| = \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n^p} \sim \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$

$\sum\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}} \begin{cases} \text{КВ} & p-1>1,\ p>2 \\ \text{ДВ} & p-1\le 1,\ p\le 2 \end{cases} \overset{\text{П.К.}}{\Longrightarrow} \sum\limits_1^{\infty} |a_n| \begin{cases} \text{КВ} & p>2 \\ \text{ДВ} & p\le 2 \end{cases} \Rightarrow$ дати ред $\begin{cases} \text{АКВ} & p>2 \\ \text{не КВА} & p\le 2 \end{cases}$

$p \le 2$: $|a_n| = \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n^p}$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-1}} = 0 \iff p-1>0,\ p>1$

$\Rightarrow$ дати ред ДВ за $p \le 1$ јер $|a_n| \not\to 0$

$1 < p \le 2$: 2) $|a_n| \searrow$ (?)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2\cdot x^p - (x^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot p x^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{x^{p-1}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}\left(x^3 - p(x^3+1)\right)}{x^{2p}}$$

посматрамо уз највећи члан

$$= \frac{\overset{<0}{(1-p)x^3 - p}}{\underset{>0}{x^{p+1}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow |a_n| \searrow$

$\overset{\text{Л.К.}}{\Longrightarrow}$ дати ред УКВ $1 < p \le 2$

Зад. 8.* $\sum \frac{5^n+3^n}{n}\cdot a^n \quad , \quad a\in\mathbb{R}$

Решење: $|a_n| = \left|\frac{5^n+3^n}{n}\cdot a^n\right| = \frac{5^n+3^n}{n}\cdot|a|^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{n}}\cdot\sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5^n}\cdot\sqrt[n]{1+(\frac{3}{5})^n}}{\sqrt[n]{n}}|a| = 5|a|$$

$\overset{K.K.}{\Longrightarrow}$ 1° Ако је $5|a|<1$ ред КВ $\Rightarrow$ дати ред АКВ $\quad -\frac{1}{5}<a<\frac{1}{5}$

2° Ако је $5|a|>1$ ред ДВ $\Rightarrow$ дати ред не КВА $\quad a<-\frac{1}{5} \vee a>\frac{1}{5}$

$a>\frac{1}{5} \quad |a_n| = \frac{5^n+3^n}{n}\cdot|a|^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5|a|)^n+(3|a|)^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5|a|)^n(1+(\frac{3}{5})^n)}{n} = +\infty \quad , \quad |a_n| \not\to 0$

$a<-\frac{1}{5}$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5|a|)^n(1+(\frac{3}{5})^n)}{n} \to +\infty \quad q^n, q>1$

3° Ако је $5|a|=1 \quad a=\pm\frac{1}{5}$

а) $a=\frac{1}{5} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+3^n}{n}\cdot\frac{1}{5^n} = \sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n}$

$a_n = \frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n} \sim \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ДВ $\overset{п.к.}{\Longrightarrow}$ дати ред ДВ

б) $a=-\frac{1}{5} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n}$

$|a_n| = \frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n} \sim \frac{1}{n}$ ДВ $\Rightarrow$ дати ред не КВА

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n} = 0$

2) $|a_n| \searrow \quad (?)$

$(\frac{3}{5})^n > (\frac{3}{5})^{n+1}$

$1+(\frac{3}{5})^n > 1+(\frac{3}{5})^{n+1}$

$\frac{1+(\frac{3}{5})^n}{n} > \frac{1+(\frac{3}{5})^{n+1}}{n+1}$

$|a_n| > |a_{n+1}| \quad a_n\searrow$

$\overset{Л.К.}{\Longrightarrow}$ дати ред УКВ

Зад. 9.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(p^2-9)^n} \quad , \quad p^2-9\in\mathbb{R}$ алтернативни ред

Решење: $|a_n| = \frac{1}{(2n+1)|p^2-9|^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}\ \sqrt[n]{|p^2-9|^n}} = \frac{1}{|p^2-9|}$$

$\overset{K.K.}{\Longrightarrow}$ 1° $\frac{1}{|p^2-9|}<1$ ред КВ

$|p^2-9|>1$

$p^2-9>1 \quad \vee \quad p^2-9<-1$

$p^2>10 \qquad\qquad p^2<8$

$|p|>\sqrt{10} \qquad\quad |p|<\sqrt{8}$

2° $\frac{1}{|p^2-9|}>1$ ред ДВ

$\sqrt{8}<|p|<\sqrt{10}$

3° $\frac{1}{|p^2-9|}=1 \quad (?)$

$$\sum_1^\infty |a_n| \begin{cases} \text{KB} & p\in(-\infty,-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{8},\sqrt{8})\cup(\sqrt{10},+\infty) \\ \text{ДВ} & p\in(-\sqrt{10},-\sqrt{8})\cup(\sqrt{8},\sqrt{10}) \\ ? & p=\pm\sqrt{10} \quad p=\pm\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{дати ред} \begin{cases} \text{AKB} & p\in(-\infty,-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{8},\sqrt{8})\cup(\sqrt{10},+\infty) \\ \text{не KBA} & p\in[-\sqrt{10},-\sqrt{8}]\cup[\sqrt{8},\sqrt{10}] \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{(2n+1)}_{\to\infty}\underbrace{|p^2-9|^n}_{\to 0}} = +\infty$ дати ред ДВ јер $|a_n| \not\to 0$ $p\in(-\sqrt{10},-\sqrt{8})\cup(\sqrt{8},\sqrt{10})$

3° $|p^2-9|=1$ $\quad \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2n+1} - \sum\limits_1^\infty |a_n|$

$p^2-9=1 \quad p^2=10$

$\sum\limits_1^\infty \frac{1}{2n+1}$, $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ ДВ $\xRightarrow{\text{п.к.}}$ дати ред ДВ $p=\pm\sqrt{10}$

$p^2-9=-1 \quad p^2=8$

$\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\quad \sum\limits_1^\infty |a_n| = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2n+1}$ ДВ $\Rightarrow$ дати ред не KBA

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

2) $|a_n| \searrow \quad \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3}$

$|a_n| > |a_{n+1}| \Rightarrow |a_n| \searrow$

$\xRightarrow{\text{л.к.}}$ дати ред УКВ $\quad p=\pm\sqrt{8}$

Зад. 10.** $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^n}{\left(\sqrt[5]{n^2+4}\right)^p}$

Решење:
$$|a_n| = \frac{\left|\frac{\alpha-1}{3}\right|^n}{\left(\sqrt[5]{n^2+4}\right)^p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha-1}{3}\right|^n}}{\underbrace{\sqrt[n]{\left(\sqrt[5]{n^2+4}\right)^p}}_{1}} = \left|\frac{\alpha-1}{3}\right|$$

$\xRightarrow{\text{к.к.}}$ 1° $\frac{|\alpha-1|}{3}<1$ ред KB $\quad \forall p$

2° $\frac{|\alpha-1|}{3}>1$ ред ДВ

3° $\frac{|\alpha-1|}{3}=1$ (?)

1° $\frac{|\alpha-1|}{3}<1$ АКВ, $\alpha\in(-2,4)$

2° $\frac{|\alpha-1|}{3}>1$ ДВ, $\alpha\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$ $\quad \forall p$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{\alpha-1}{3}\right|^n}{\sqrt[n]{\left(\sqrt[5]{n^2+4}\right)^p}} = \infty$

3) $\alpha = 4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt[5]{n^2+4})^p}$

$a_n = \frac{1}{(\sqrt[5]{n^2+4})^p} \sim \frac{1}{n^{\frac{2p}{5}}}$ и $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2p}{5}}}$ $\begin{cases} \text{КВ} & \frac{2p}{5} > 1, \; p > \frac{5}{2} \\ \text{ДВ} & \frac{2p}{5} \le 1, \; p \le \frac{5}{2} \end{cases}$

$\alpha = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt[5]{n^2+4})^p}$ алтернативни ред

$|a_n| = \frac{1}{(\sqrt[5]{n^2+4})^p} \sim \frac{1}{n^{\frac{2p}{5}}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2p}{5}}}$ $\begin{cases} \text{КВ} & p > \frac{5}{2} \\ \text{ДВ} & p \le \frac{5}{2} \end{cases}$

$\overset{\text{п.к.}}{\Longrightarrow} \sum_{1}^{\infty} |a_n|$ $\begin{cases} \text{КВ} & p > \frac{5}{2} \\ \text{ДВ} & p \le \frac{5}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ дати ред $\begin{cases} \text{АКВ} & p > \frac{5}{2} \\ \text{не КВА} & p \le \frac{5}{2} \end{cases}$

1) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2p}{5}}} = 0 \iff \frac{2p}{5} > 0, \; p > 0$

$p \le 0$ дати ред ДВ јер $|a_n| \not\to 0$

$0 < p \le \frac{5}{2}$

2) $|a_n| \searrow$ (?)

$$\frac{1}{(\sqrt[5]{n^2+4})^p} > \frac{1}{(\sqrt[5]{(n+1)^2+4})^p}$$

$|a_n| > |a_{n+1}| \Rightarrow a \searrow$

$\overset{\text{Л.К.}}{\Longrightarrow}$ дати ред УКВ $\quad 0 < p \le \frac{5}{2}$

вежба бр. 7 27. 02. 2007.

Функције једне реалне променљиве

Области дефинисаности

1° $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \ne 0$

2° $\sqrt{f(x)}$, $f(x) \ge 0$

3° $\ln f(x)$, $f(x) > 0$

4° $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $-1 \le f(x) \le 1$

Зад. 1. Наћи област дефинисаности ф-је $f(x)$

a) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4-3x-x^2}$

Решење: $\ln \frac{x-4}{x+2} \ge 0$ $\qquad x+2 \ne 0$ $\qquad 4-3x-x^2 \ge 0$

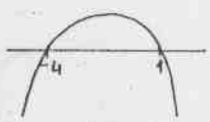
$\frac{x-4}{x+2} \ge 1$ $\qquad x \ne -2$

$\frac{x-4-x-2}{x+2} \ge 0$

$\frac{-6}{x+2} \ge 0$

$x+2 < 0$

$x < -2$



$x \in [-4, 1]$ $\qquad \mathcal{D}_f = [-4, -2)$

д) $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{|x|-x}}$

Решење: $x+3>0 \qquad |x|-x>0$

$x>-3 \qquad |x|>x$

$x<0 \qquad \mathcal{D}_f = (-3,0)$

в) $f(x) = \ln(\cos(\ln x))$

Решење: $\cos \ln x > 0$

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi < \ln x < \frac{\pi}{2}+2k\pi, \ k\in Z$

$e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} < x < e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

$\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in Z}\left(e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right)$

г) $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$

Решење: $-1 \le \dfrac{2x}{1+x^2} \le 1$

$\frac{2x}{1+x^2} \ge -1 \quad \wedge \quad \frac{2x}{1+x^2} \le 1$

$\frac{2x}{1+x^2}+1 \ge 0 \qquad \frac{2x}{1+x^2}-1 \le 0$

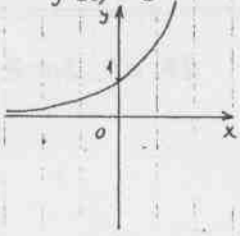
$\frac{x^2+2x+1}{1+x^2} \ge 0 \qquad \frac{-x^2+2x-1}{1+x^2} \le 0$

$\frac{(x+1)^2}{1+x^2} \ge 0 \qquad \frac{-(x-1)^2}{1+x^2} \le 0$

$x\in R \quad \cap \quad x\in R \qquad \mathcal{D}_f = R$

Графици елементарних функција

1° $f(x) = e^x$



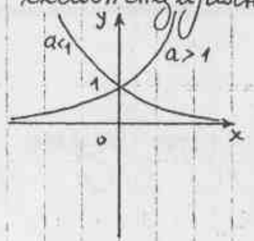
$e^x > 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

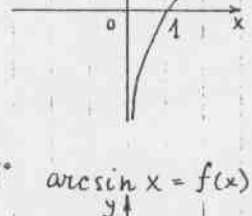
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$e^0 = 1$

2° експоненцијалне $f(x) = a^x$



3° логаритамске $f(x) = \ln x$

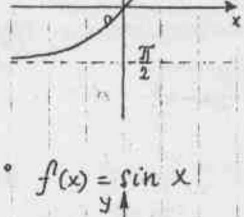


$\ln(+\infty) = +\infty$

$\ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0_+} \ln = -\infty$

4° $f(x) = \operatorname{arctg} x$



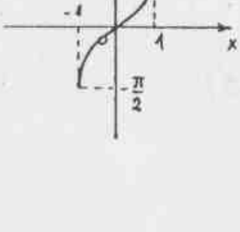
$\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

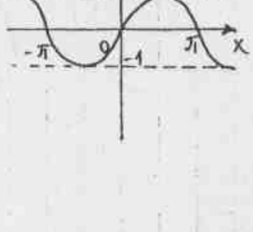
$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

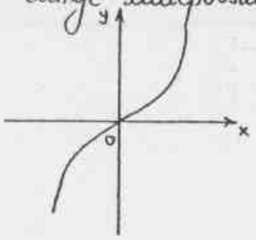
5° $\arcsin x = f(x)$

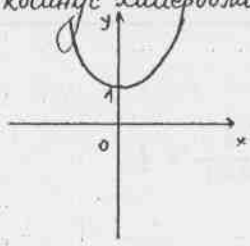


6° $f(x) = \sin x$



7° синус хиперболики $f(x) = sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 8° косинус хиперболики $f(x) = ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$





Парност функције

Деф. 1. а) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, парна функција

б) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, непарна функција

Зад. 1. Испитати парност функција

а) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$

Решење: $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -\frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ непарна функција

б) $f(x) = x \cdot \arcsin x$

Решење: $f(-x) = -x \cdot \arcsin(-x) = -x \cdot (-\arcsin x) = x \cdot \arcsin x = f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ парна функција

в) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Решење: $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left((\sqrt{x^2+1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$

$= \ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})^{-1} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ непарна функција

вежба бр. 8 02. 03. 2007.

Лимес функције

Деф. 1. $\lim_{x\to a} f(x) = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in R)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$

$\lim_{x\to a+} f(x)$ десни лимес $\lim_{x\to a-} f(x)$ леви лимес

Теор. 1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $B \neq 0$, $c \in R$

1° $\lim_{x\to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot A$

2° $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$

3° $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4° $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$

Зад. 1. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \dfrac{0-1}{0-0-1} = 1.$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(2x+1)} = \dfrac{2}{3}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$

Зад. 2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x^2-7x+12} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)}{\cancel{(x-4)}(x-3)} = \dfrac{16+16+16}{1} = 48$

Зад. 3. а) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-4x+4} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+2)}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{4+4+2}{2+0-2} = \dfrac{10}{0_+} = +\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^3-2x-4}{x^2-4x+4} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{4+4+2}{2-0-2} = \dfrac{10}{0_-} = -\infty$

Зад. 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\dots+(x^n-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\dots+(x-1)(x^{n-1}+\dots+1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(1+(x+1)+(x^2+x+1)+\dots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1))}{\cancel{x-1}} = 1+2+3+\dots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

Зад. 5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Зад. 6. а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x \Leftrightarrow *$

Решение: $* = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$

Зад. 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} + x - 2\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{(\sqrt{x^2+x\cdot2}+x)^2-4(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{2x(\sqrt{x^2+2x}-(x+1))}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2(x^2+2x-x^2-2x-1)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-2}{4\cdot2} = -\frac{1}{4}$

Зад. 8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \left[\begin{array}{l}\text{смена}: x=t^3\\ x\to1,\ t\to1\end{array}\right] = \lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-2t+1}{(t^2-1)^2} = \lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+t+1)} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Зад. 9. $\lim\limits_{x\to65}\frac{\sqrt{x-1}-8}{\sqrt[3]{x-1}-4} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \left[\begin{array}{l}\text{смена}: x-1=t^6\\ x\to65,\ t\to2\end{array}\right] = \lim\limits_{t\to2}\frac{t^3-8}{t^2-4} = \lim\limits_{t\to2}\frac{\cancel{(t-2)}(t^2+2t+4)}{\cancel{(t-2)}(t+2)} = \frac{4+4+4}{4} = 3$

Зад. 10. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2+x)^2}-x\sqrt[3]{2+x}+x^2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}-x\sqrt[3]{2+x}+x^2}$

$= \lim\limits_{x\to-1}\frac{(1+2x+1)\left(\sqrt[3]{(2+x)^2}-x\sqrt[3]{2+x}+x^2\right)}{(2+x+x^3)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{1+2x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)} = \frac{2}{1+1+2} = \frac{1}{2}$

Зад. 11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{64x^3+3x^2}-\sqrt{16x^2-3x}\right) \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{64x^3+3x^2}-4x\right)-\left(\sqrt{16x^2-3x}-4x\right)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{64x^3+3x^2}-4x\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(64x^3+3x^2)^2}+4x\sqrt[3]{64x^3+3x^2}+16x^2}{-\|-} - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2-3x}-4x\right)\cdot\frac{\sqrt{16x^2-3x}+4x}{-\|-}$

$= -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{16x^2}-3x-\cancel{16x^2}}{x\left(\sqrt{16-\frac{3}{x}}+4\right)} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{64x^3}+3x^2-\cancel{64x^3}}{x^2\left(\sqrt[3]{(64+\frac{3}{x})^2}+4\sqrt[3]{64+\frac{3}{x}}+16\right)} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot16} - \frac{-3}{2\cdot4} = \frac{7}{16}$

Зад. 12. Одредити константе A и B из услова $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-Ax-B\right)=0$

Решење: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-ax^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right)} = 0$

$1-a=0 \Rightarrow a=1 \qquad 1+2ab=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

Зад. 13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+m-\sqrt[3]{mx^3+9x^2-2}\right)=1$

Решење: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+m)-\sqrt[3]{mx^3+9x^2-2}\right)\cdot\frac{(x+m)^2+(x+m)\sqrt[3]{mx^3+9x^2-2}+\sqrt[3]{(mx^3+9x^2-2)^2}}{-\|-} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+m)^3-(mx^3+9x^2-2)}{-\|-} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-m)x^3+(3m-9)x^2+3m^2x+2}{x^2\left[\left(1+\underset{0}{\cancel{\frac{m}{x}}}\right)^2+\left(1+\underset{0}{\cancel{\frac{m}{x}}}\right)\sqrt[3]{m+\frac{9}{x}-\frac{2}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(m+\frac{9}{x}-\frac{2}{x^3}\right)^2}\right]} = 1$

$1-m=0 \Rightarrow m=1 \qquad \frac{3m-9}{3}=1 \Rightarrow m=4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Зад. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx}\cdot bx} = \frac{a}{b}$

Зад. 15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\cdot\sin x^2} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^2\cdot\sin x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{x^4}{4}}{\cancel{x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$

Зад. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{a+b}{2}x\cdot\sin\frac{a-b}{2}x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{\sin\frac{a+b}{2}\cdot x}{\frac{a+b}{2}\cdot x}\right)\cdot\frac{a+b}{2}\cancel{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{a-b}{2}\cdot x}{\frac{a-b}{2}\cdot x}\right)\cdot\frac{a-b}{2}\cancel{x}}{\cancel{x^2}}$

$= -\cancel{2}\cdot\frac{a+b}{\cancel{2}}\cdot\frac{a-b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$

Зад. 17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x^4}{4}}{x^2} = \frac{3}{2}$

Зад. 18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x(1-\cos x)}{x^4} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}}\right)}{x^4}$

$= 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)^2\sin^4\frac{x}{2}}{x^4} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4}{x^4} = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$

Зад. 19. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \left[\begin{matrix}\text{смена: } 1-x=t\\ x\to 1 \Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right] = \lim\limits_{t\to 0} t\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t\pi}{2}\right) = \lim\limits_{t\to 0} t\cdot ctg\frac{t\pi}{2}$

$= \lim\limits_{t\to 0} t\cdot\frac{\cos\frac{t\pi}{2}\to 1}{\sin\frac{t\pi}{2}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin\frac{t\pi}{2}}{\frac{t\pi}{2}}\cdot\frac{t\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Зад. 20. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)} = \left[\begin{matrix}\text{смена: } 1-2x=t\\ x=\frac{1}{2},\ t\to 0\end{matrix}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{-t\cdot(2-t)} = -\frac{1}{2}$

вежба бр. 9 06. 03. 2007.

Таблични лимеси

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Зад. 1. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to 0}\Big(\big(\underbrace{1+(-2x)^{\frac{1}{-2x}}}_{e}\big)^{-\frac{2x}{x}} = e^{-2}$

Зад. 2. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^2-3}\right)^{x^4} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-3}{-2}}\right)^{\frac{x^2-3}{-2}}}_{e}\Bigg]^{\left(\frac{-2x^4}{x^2-3}\right)\to -\infty} = 0$

Зад. 3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 2x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 2x}\right)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left((1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right)^{-\frac{\sin^2 x}{2x^2}}}{\left((1-\sin^2 2x)^{-\frac{1}{\sin^2 2x}}\right)^{-\frac{\sin^2 2x}{2x^2}}}$

$= \frac{e^{\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{2x^2}}}{e^{\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 2x}{2x^2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-2}} = e^{\frac{3}{2}}$

Зад. 4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\right)^{\operatorname{tg} x} = \left[\begin{array}{l}\text{смена: } 1-\frac{2x}{\pi}=t\\ x\to\frac{\pi}{2},\ t\to 0\end{array}\right] = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}$

$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}t} = e^{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}} = e^{\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Зад. 1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-(e^{bx}-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a - \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b = a-b$

Зад. 2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg} 3x} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\frac{\sin 3x}{\underset{1\leftarrow}{\cos 3x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x} = \frac{5}{3}$

Зад. 3. $\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2} \Leftrightarrow *$

Решение: $* = \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-1-(b^{x^2}-1)}{(a^x-1-(b^x-1))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}-\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot \cancel{x^2}}{\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)^2\cdot\cancel{x^2}} = \frac{\ln a-\ln b}{(\ln a-\ln b)^2} = \frac{1}{\ln a-\ln b}$

Зад. 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{2^{1-x}-1} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \left[\begin{matrix}\text{смена: } 1-x=t\\ x\to 1\ ,\ t\to 0\end{matrix}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2^t-1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1}\cdot \cancel{t}}{\underbrace{\frac{2^t-1}{t}}_{\to \ln 2}\cdot \cancel{t}} = \dfrac{1}{\ln 2}$

Зад. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sin 4x^2} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x^2}-1)-(\sqrt{1+x^2}-1)}{\sin 4x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\underbrace{\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}}_{\to 1}\cdot 3\cancel{x^2}-\underbrace{\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\cdot\cancel{x^2}}{\underbrace{\frac{\sin 4x^2}{4x^2}}_{\to 1}\cdot 4\cancel{x^2}} = \dfrac{3-\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{5}{8}$

Зад. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+5x^2}-\cos 2x}{\ln(3x^2+1)} \Leftrightarrow *$

Решење: $* = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{((1+5x^2)^{\frac{1}{4}}-1)+\underbrace{(1-\cos 2x)}_{\to 2\sin^2 x}}{\ln(1+3x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(1+5x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{5x^2}\cdot 5\cancel{x^2}+2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\cancel{x^2}}{\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}\cdot 3\cancel{x^2}}$

$= \dfrac{5\cdot\frac{1}{4}+2}{3} = \dfrac{13}{12}$

Непрекидност функције

Деф. 1. Нека је ф-ја f дефинисана у некој околини тачке a. f је непрекидна у тачки a ако постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Деф. 2. Ф-ја f је непрекидна на скупу S ако је непрекидна у свакој тачки скупа S.

Деф. 3. Тачка a из D_f је тачка прекида 1. врсте ако постоји леви лимес $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и десни $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, али се бар један од тих лимеса разликује од вредности $f(a)$ у случају када је a унутрашња тачка неког од подинтервала за D_f, док у случају када је a крајња тачка неког од подинтервала за D_f постоји одговарајући лимес са једне стране који се разликује од $f(a)$ и даље тачка прекида 1. врсте за ф-ју f је тачка отклоњивог прекида за f ако постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Деф. 4. Тачка a из домена ф-је је тачка прекида 2. врсте ако је она тачка прекида за f и није тачка прекида 1. врсте за f.

* Одредити параметре $a, b \in R$ тако да ф-ја $f(x)$ буде непрекидна на R.

Зад. 1.
$$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x<0 \\ a, & x=0 \\ 2-x, & x>0 \end{cases}$$

Решење: Да би ф-ја f била непрекидна у тачки $x=a$ потребно је и довољно да постоји $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-}(2+x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}(2-x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$

$2 = 2 = a$

Зад. 2.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Решење:
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-0} (-2\sin x) = +2$$
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} (a\sin x + b) = -a+b$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (a\sin x + b) = a+b$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \cos x = 0$$

Услов непрекидности: $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) \wedge \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x)$

$$-a+b=2 \qquad a+b=0$$
$$\Rightarrow b=1 \quad a=-1$$

Зад. 3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xe^{ax}) - \cos(xe^{-ax})}{x^3}, & x \ne 0 \\ -2, & x=0 \end{cases}$$

Решење: услов непрекидности $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^{ax}) - \cos(xe^{-ax})}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\frac{x(e^{ax}+e^{-ax})}{2}\cdot \sin\frac{x(e^{ax}-e^{-ax})}{2}}{x^3}$$
$$= -2\lim_{x\to 0} \frac{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{ax}-e^{-ax})}{4x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-e^{-2ax}}{x}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2ax}(e^{4ax}-1)}{4ax}\cdot 4a = -2a$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad -2a = -2 \Rightarrow a=1$$

Диференцијабилност функције

Деф. 1. Нека је ф-ја $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке x. Ако постоји $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ кажемо да ф-ја f има извод у тачки x и он је једнак том лимесу.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(x) = \lim_{x\to x_1}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

Деф. 2. Нека је ф-ја f дефинисана у некој околини тачке x. Ф-ја f је диференцијабилна у x ако постоји $A\in\mathbb{R}$ тако да је $\forall h\in\mathbb{R}$ такве да $x+h\in D_f$ $f(x+h)-f(x) = A\cdot h + o(h)$, $h\to 0$, $o(h)$ занемарљиво мала ф-ја.

леви извод: $f'_-(x) = \lim_{h\to 0_-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, десни извод: $f'_+(x) = \lim_{x\to 0_+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Очигледно је да ф-ја f има извод у тачки x акко $f'_-(x) = f'_+(x)$

Теор. 1. Ако је ф-ја f диференцијабилна у тачки x, онда је f непрекидна у тачки x (обрнуто не важи).

вежба бр. 10 13.03.2007.

Наставак

Зад. 1. Одредити реалан број a тако да ф-ја $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le +1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$ непрекидна.
За тако одређено a испитати да ли је ф-ја $f(x)$ диференцијабилна у тачки $x=1$.

Решење: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+1) = 1+1=2$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(3-ax^2) = 3-a$$

услов непрекидности: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$

$$2 = 3-a \Rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3-x^2, & x>1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)+1-(1+1)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{h}{h} = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{3-(1+h)^2-(3-1^2)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{1-(1+h)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+}\frac{-2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0+}(-2-h) = -2$$

$f'_-(1) \ne f'_+(1) \Rightarrow f(x)$ није диференцијабилна у тачки $x=1$

Зад. 2. Одредити реалне параметре a и b тако да ф-ја $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ буде диференцијабилна у тачки $x=0$.

Решење: Свака диференцијабилна ф-ја мора бити непрекидна

услов непрекидности: $f_-(0) = f_+(0)$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} f_-(0) &= \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x^2+2x) = 0 \\ f_+(0) &= \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(ax+b) = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow b=0$$

услов диференцијабилности: $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$\left.\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{h^2+2h-0}{h} = \lim_{h\to 0-}(h+2) = 2 \\ f'_+(0) &= \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{a\cdot h-0}{h} = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=2$$

Зад. 3. Дата је ф-ја $f(x)=\begin{cases} ax^3+b, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$

а) под којим условима је ф-ја $f(x)$ непрекидна у тачки $x=1$

б) у случају непрекидности одредити на основу дефиниције леви и десни извод у тачки $x=1$

в) одредити a и b тако да је ф-ја $f(x)$ диференцијабилна за $x=1$ и у том случају наћи $f'(1)$.

Решење: а) $f_-(1)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(ax^3+b)=a+b$

$$f_+(1)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} x^2=1$$

услов непрекидности : $f_-(1)=f_+(1)$, $a+b=1$

б) $$f_-'(1)=\lim_{h\to 0_-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0_-}\frac{a(1+h)^3+b-(a+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0_-}\frac{a(1+h)^3-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a((1+h)^3-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0_-}\frac{a(1+h-1)((1+h)^2+1+h+1}{h}=3a$$

$$f_+'(1)=\lim_{h\to 0_+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0_+}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}=2$$

в) услов непрекидности $a+b=1$

услов диференцијабилности $3a=2$

$\Big\}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{3}$

$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}, & x<1\\ x^2, & x\geq 1\end{cases}$ $\quad f_-'(1)=f_+'(1)=f'(x)=2$

Зад. 4. Наћи реалне бројеве a, b, c за које ф-ја $f(x)=\begin{cases}ax^2+b^2x+c, & x<0\\ x^2+x+1, & 0\leq x\leq\pi\\ ax^2+b\sin x+c, & x>\pi\end{cases}$ је диференцијабилна на R.

Решење: услов непрекидности
$$f_-(0)=f_+(0)$$
$$0+0+c=0+0+1 \Rightarrow c=1$$
$$f_-(\pi)=f_+(\pi)$$
$$\pi^2+\pi+1=a\pi^2+\underbrace{b\sin\pi}_{0}+c \Rightarrow a=1+\frac{1}{\pi}$$

услов диференцијабилности $f_-'(0)=f_+'(0)$ $\quad\wedge\quad$ $f_-'(\pi)=f_+'(\pi)$

$$0+b^2=0+1 \qquad 2\pi+1=2a\pi+b\cos\pi$$
$$b=\pm 1 \qquad 2\pi+1=2\pi+2-b$$
$$b=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b^2, & x<0\\ 2x+1, & 0\leq x\leq\pi\\ 2ax+b\cos x, & x>\pi\end{cases}$$

II - диференцирања

Теор. 1. Нека су функције f и g диференцијабилне у тачки x. Онда су и ф-је $c\cdot f$, $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ диференцијабилне у тачки x.

Важи:

1° $(c\cdot f)' = c\cdot f'$, $c\in R$

2° $(f\pm g)' = f'\pm g'$

3° $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

4° $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Теор. 2. Извод сложене функције: $(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Таблица извода:

1° $(c)' = 0$

2° $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

3° $(e^x)' = e^x$

4° $(a^x)' = a^x\cdot \ln a$

5° $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6° $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a}$

7° $(\sin x)' = \cos x$

8° $(\cos x)' = -\sin x$

9° $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10° $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11° $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12° $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13° $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14° $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

15° $(sh\, x)' = ch\, x$

16° $(ch x)' = sh\, x$

17° $(th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

18° $(cth x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Зад. 1. Наћи изводе следећих функција

а) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x\sqrt[5]{x^2}} - e^x$

Решење: $f'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x\sqrt[5]{x^2}} - e^x\right)' = 2\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' - \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' - (e^x)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} - e^x$

б) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$

Решење:
$$f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)'(\sqrt[3]{x}+1) - (\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)'}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{x}+1) - (\sqrt[3]{x}-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{x}+1-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2}$$

в) $f(x) = (2^x+3^x)\cdot\cos x$

Решење: $f'(x) = ((2^x+3^x)\cos x)' = (2^x+3^x)'\cos x + (2^x+3^x)\cdot(\cos x)'$
$$= (2^x\ln 2 + 3^x\ln 3)\cos x + (2^x+3^x)(-\sin x)$$

г) $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

Решење:
$$f'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)' = \frac{(1-\ln x)'(1+\ln x) - (1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x+1-\ln x)}{(1+\ln x)^2} = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$$

ђ) $f(x)=e^{x}\cdot\sqrt{x}\cdot(tg\,x-6\,sh\,x)$

Решење: $f'(x)=(e^{x}\sqrt{x}\,(tg\,x-6\,sh\,x))'$

$=(e^{x}\sqrt{x})'(tg\,x-6\,sh\,x)+e^{x}\sqrt{x}\,(tg\,x-6\,sh\,x)'$

$=\left(e^{x}\sqrt{x}+e^{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(tg\,x-6\,sh\,x)+e^{x}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-6\,ch\,x\right)$

ђ) $f(x)=|x|$

Решење: $f'(x)=(|x|)'=sgn\,x=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$

Зад. 2. Израчунати 1. извод следећих функција

а) $f(x)=(5+2x)^{10}\cdot(3-4x)^{20}$

Решење: $f'(x)=((5+2x)^{10})'\cdot(3-4x)^{20}+(5+2x)^{10}\cdot((3-4x)^{20})'$

$=10\,(5+2x)^{9}\cdot(5+2x)'\cdot(3-4x)^{20}+(5+2x)^{10}\cdot 20\,(3-4x)^{19}\cdot(3-4x)'$

$=10\,(5+2x)^{9}\cdot 2\cdot(3-4x)^{20}+(5+2x)^{10}\cdot 20\cdot(3-4x)^{19}\cdot(-4)$

$=20\,(5+2x)^{9}(3-4x)^{19}(-17-12x)$

б) $f(x)=2^{tg\frac{1}{x}}$

Решење: $f'(x)=\left(2^{tg\frac{1}{x}}\right)'=2^{tg\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\cdot\left(tg\frac{1}{x}\right)'=\ln 2\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$

$=\ln 2\cdot 2^{tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

в) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Решење: $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x\right)$

$=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

г) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

Решење: $f'(x)=\frac{(\sin^2 x)'\cdot\sin x^2-\sin^2 x\cdot(\sin x^2)'}{\sin^2 x^2}=\frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin x^2-\sin^2 x\cdot\cos x^2\cdot 2x}{\sin^2 x^2}$

д) $f(x)=x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+arc\,tg\sqrt{x}-\sqrt{x}$

Решење: $f'(x)=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)'+\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{\sqrt{\frac{1+x-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x\sqrt{1+x}}{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}+\frac{1-1-x}{(1+x)2\sqrt{x}}$

$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x(1+x)}{2x}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$

Зад. 3. Израчунати 1. извод ако је

а) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Решење: I начин: $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$$

II начин: $y = x^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$

$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$

$\ln y = \frac{1}{x}\ln x$

$\ln y = \frac{\ln x}{x} \quad /'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1-\ln x}{x} \Rightarrow y' = y\,\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$

б) $f(x) = (x^2+1)^{e^x}$

Решење: I начин: $f(x) = e^{e^x\cdot\ln(x^2+1)}$

$$f'(x) = \left(e^{e^x\cdot\ln(x^2+1)}\right)' = e^{e^x\cdot\ln(x^2+1)}\cdot\left(e^x\cdot\ln(x^2+1)\right)'$$

$$= (x^2+1)^{e^x}\cdot\left(e^x\cdot\ln(x^2+1) + e^x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

II начин: $y = (x^2+1)^{e^x} \quad /\ln$

$\ln y = e^x\cdot\ln(x^2+1) \quad /'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = e^x\cdot\ln(x^2+1) + e^x\,\frac{2x}{x^2+1}$

$\Rightarrow y' = (x^2+1)^{e^x}\left(e^x\ln(x^2+1) + e^x\,\frac{2x}{x^2+1}\right)$

Зад. 4. Израчунати извод следећих функција датих у параметарском облику

Решење: $x = x(t)$, $y = y(t) \Rightarrow y' = \frac{y'_t}{x'_t}$

а) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $y' = ?$

Решење: $x'_t = 3a\,\frac{1\cdot(1+t)^3 - t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = 3a\cdot\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$

$y'_t = 3a\,\frac{2t(1+t^3) - t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = 3a\cdot\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$

$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\cdot\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{3a\cdot\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

б) $x = \cos t + t\cdot\sin t$, $y = \sin t - \cos t$, $y' = ?$

Решење: $x'_t = \cancel{-\sin t} + \cancel{\sin t} + t\cos t = t\cdot\cos t$

$y'_t = \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} + t\sin t = t\cdot\sin t$

$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t\cdot\sin t}{t\cdot\cos t} = \operatorname{tg} t$