ПРЕДЛОГ ЗАДАТАКА ЗА ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ

* Израчунати:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-x-1}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+(x+1)}{\sqrt{x+1}+(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1-x^2-2x-1}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2-x}{\sqrt{x+1}\,(x+\cancel{1}-\cancel{1})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\sqrt{x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}-\sqrt{x+1}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos2x}-\sqrt[3]{\cos3x}}{1-\cos4x}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos^2 2x}+\sqrt[3]{\cos2x\cos3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}+\sqrt[3]{\cos2x\cos3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos3x}{2\sin^2 2x\cdot3}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{_3\cancel{6}\sin^2 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}}{3\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\cdot4x^2}=\frac{5}{16\cdot3}=\frac{5}{48}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos2x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{1-\cos2x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{2\sin^2x}{2}\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\left(\frac{\sin(\sin^2x)}{\sin^2x}\right)^2\sin^4x}{x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4x^4}{x^4}=2$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\operatorname{tg}x}}{x-\operatorname{tg}x}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2x}}{1-\frac{1}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x\,e^x-e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2x-1}=\frac{0}{1}=0$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}}{x^3}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2x}-e^{\sin x}\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{\sin x}\cos^3x}{3x^2\cos^2x}\overset{0}{\underset{0}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2x}-e^{\sin x}\cos^4x+e^{\sin x}3\cos^2x\sin x}{6x\cos^2x-3x^2\,2\cos x\sin x}=$

6. -

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}}{\operatorname{tg}x^2}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\sqrt{\cos2x}+\cos x\frac{1}{2\sqrt{\cos2x}}\sin2x\cdot2}{\frac{1}{\cos^2x^2}\cdot2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cos x+\sin2x\cos x}{\sqrt{\cos2x}\cdot2x}\overset{0}{\underset{0}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x+\cos2x\cdot2\cos x+\sin2x\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{\cos2x}}\cdot\sin2x\cdot2\cdot2x+2\sqrt{\cos2x}}=\frac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1-\cos^3x}{\cos^2x}}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\cancel{2}x-2x}{1+3\cos^2x\sin x}=\frac{0}{1}=0$

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1+2x}}}{\frac{1}{1+x}-1}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x-\sin x-x\cos x+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}\cdot\cancel{2}}{-\frac{1}{(1+x)^2}}=\frac{1}{-1}=-1$

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+2x^2}-\cos3x}{\ln(1-2x^2)}\overset{0}{\underset{0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cancel{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+2x^2)^3}}\cancel{4}x+3\sin3x}{\frac{1}{1-2x^2}\cdot4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt[4]{(1+2x^2)^3}-x\frac{3}{4}\frac{4x}{\sqrt[4]{1+2x^2}}}{\sqrt[4]{(1+2x^2)^3}}+3\cos3x\cdot3}{\frac{4(1-2x^2)+4x\cdot2\cdot2x}{(1-2x^2)^2}}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^x}{x^2-2^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-2^x\ln 2}{2x-4}=\infty$

12. $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{x^2}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2+1-x^2}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$

2

Прегледно испитати функцију $f(x)$ и нацртати њен график.

1. $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(x+2)}{(x-1)^2}$

1. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

2. парност и непарност

није ни парна ни непарна

3. нуле и знак

$f(x)=0 \quad x^3+2x^2=0$

$x^2(x+2)=0$

$x=0 \quad x=-2$

$N_1(0,0) \quad N_2(-2,0)$

		-2		0		1	
x^2	+		+		+		+
$x+2$	−		+		+		+
$(x-1)^2$	+		+		+		+
$f(x)$	−	0	+	0	+	НД	+

4. асимптоте

а) ВА $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{(1-0)^3+2(1-0)^2}{(1-0-1)^2} = \dfrac{5}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \boxed{x=1 \quad \text{В.А}}$

б) ХА $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2} = \pm\infty$ нема Х.А

в) КА $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^3(1-\frac{1}{x})^2} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2} - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+2x^2-\cancel{x^3}+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2-x}{x^2-2x+1} = 4 \qquad \boxed{y=x+4 \quad \text{КА}}$

5. екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x)(x-1)^2 - x^2(x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{x((3x+4)(x-1)-2x(x+2))}{(x-1)^3} = \dfrac{x(3x^2-3x+4x-4-2x^2-4x)}{(x-1)^3} = \dfrac{x(x^2-3x-4)}{(x-1)^3} = \dfrac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}$

$f'(x)=0 \quad x(x^2-3x-4)=0$

$x=0 \quad x=4 \quad x=-1$

		-1		0		1		4	
x	−		−		+		+		+
$x-4$	−		−		−		−		+
$x+1$	−		+		+		+		+
$(x-1)^3$	−		−		−		+		+
$f'(x)$	+		−		+		−		+
$f(x)$	↗	M_1	↘	M_2	↗		↘	M_3	↗

$M_1(-1, \frac{1}{4})$

$M_2(0, 0)$

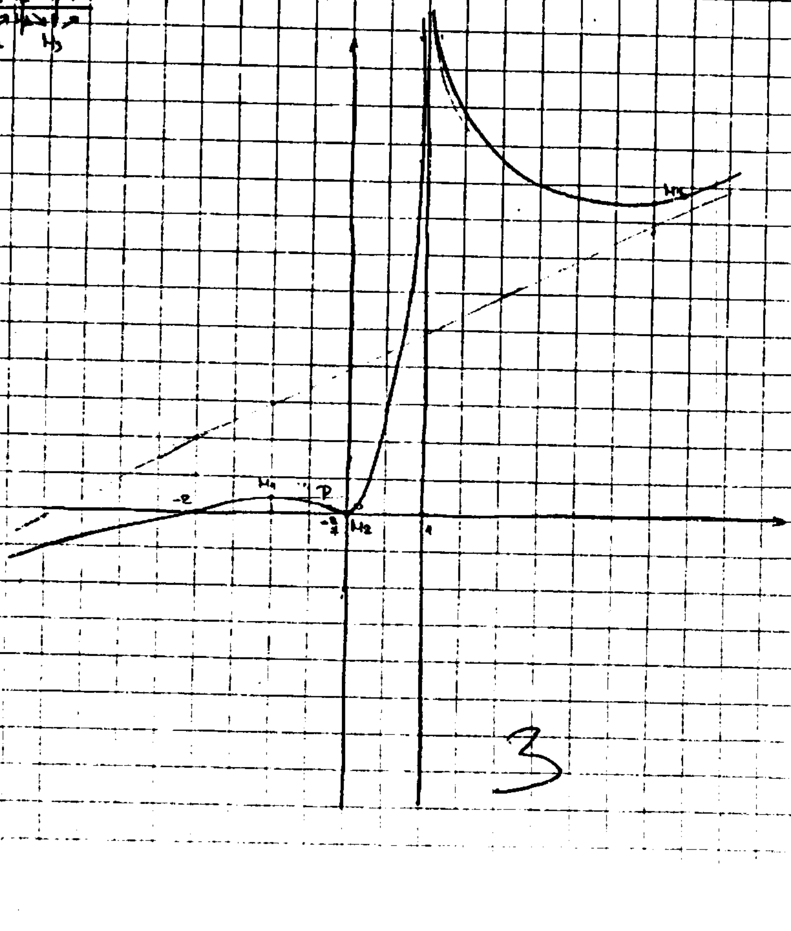
$M_3(4, \frac{32}{3})$

6. превојне тачке и интервали ∪ и ∩

$f''(x) = \dfrac{2(7x+2)}{(x-1)^4}$

		$-\frac{2}{7}$		1	
$7x+2$	−		+		+
$(x-1)^4$	+		+		+
$f''(x)$	−		+	НД	+
$f(x)$	∩	P	∪		∪

$P(-\frac{2}{7},$



2. $f(x)=\frac{x^3}{4(2-x)^2}$

1. $D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ $2-x\neq0$, $x\neq2$

2 парност и непарност

Није ни парна ни непарна

3 нуле и знак

$N(0,0)$

	0		2	
x^3	−	+		+
$(2-x)^2$	+	+		+
$f(x)$	−	+		+

$f(x)<0$ за $\forall\ x\in(-\infty,0)$

$f(x)>0$ за $\forall\ x\in(0,\infty)\setminus\{2\}$

4 асимптоте

а) В.А. $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=\frac{(2-0)^3}{4(2-2+0)^2}=\frac{8}{4\cdot(+0)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2+0} f(x)=+\infty$ $x=2$ В.А.

б) Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4x^2-16x+16}=\pm\infty$ нема Х.А.

в) К.А. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{4x^2-16x+16}=\frac{1}{4}$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+4x^2-2x}{x^2-4x+2}=\frac{1}{4}\cdot4=1$

$y=\frac{1}{4}x+1$ коса асимптота

5 екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x)=\frac{3x^2\cdot\cancel{4}(2-x)^{2}+\cancel{4}x^3\cdot2\cancel{(2-x)}}{\cancel{16}(2-x)^{3}}=\frac{6x^2-3x^3+2x^3}{4(2-x)^3}=\frac{-x^3+6x^2}{4(2-x)^3}=\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}$

	0		2		6	
x^2	+	+		+		+
$6-x$	+	+		+		−
$(2-x)^3$	+	+		−		−
$f'(x)$	+	+		−		+
$f(x)$	↗	↗		↘	min	↗

$\min=f(6)=\frac{6^3}{4\cdot(-4)^2}=\frac{27}{8}$

$M_{min}\left(6,\frac{27}{8}\right)$

6. превојне тачке и интервали $\cup$ и $\cap$

$f''(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(-3x^2+12x)(2-x)^3+x^2(6-x)\,3(2-x)^2}{(2-x)^6}=$

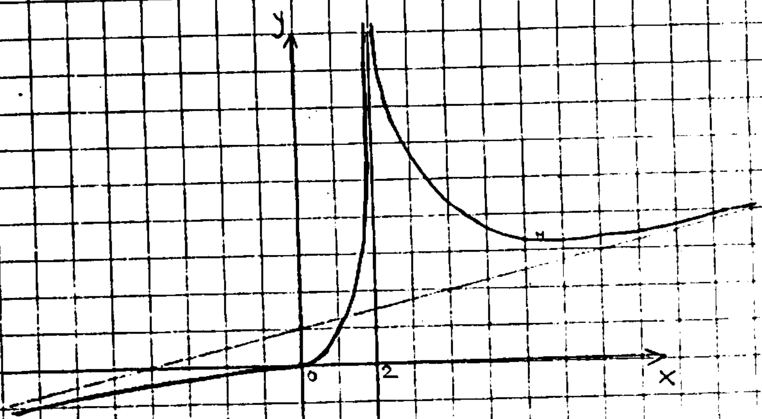
$=\frac{-6x^2+24x+3x^3-12x^2+18x^2-3x^3}{4(2-x)}=$

$=\frac{24x}{4(2-x)}=\frac{6x}{2-x}$

	0		2	
$6x$	−	+		+
$2-x$	+	+		−
$f''(x)$	−	+		−
$f(x)$	$\cap$	$\cup$		$\cap$

$f(0)=0$

$P(0,0)$



5. $f(x)=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad x^2-1>0$, $x=\pm1$

1. $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

2. парност и непарност

$f(-x)=\frac{-3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$ ни парна ни непарна

3. нуле и знак

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$3x-2$	−		+
$\sqrt{x^2-1}$	+		+
$f(x)$	−	нд	+

$3x-2=0$

$3x=2$

$x=\frac{2}{3}$ нема нула

$f(x)>0$ за $\forall x\in(1,\infty)$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-1)$

4. асимптоте

а) В.А. $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\frac{-3-2}{\sqrt{(-1-0)^2-1}}=\frac{-5}{0^+}=-\infty$ $\qquad x=-1$ В.А. са леве стране

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\frac{3-2}{\sqrt{(1+0)^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\qquad x=1$ В.А. са десне стране

б) Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=3$ $\qquad y=3$ Х.А.

5. екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x)=\frac{3\sqrt{x^2-1}-\frac{3x-2}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(3x^2-3-x(3x-2)\right)}{x^2-1}=\frac{2x-3}{(x^2-1)^{3/2}}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},\infty)$
$2x-3$	−		−	+
$\sqrt{(x^2-1)^3}$	+		+	+
$f'(x)$	−	нд	− 0	+
$f(x)$	↘	нд	↘ min	↗

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\cdot\frac{3}{2}-2}{\sqrt{\frac{9}{4}-1}}=\frac{\frac{9-4}{2}}{\sqrt{\frac{9-4}{4}}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$2x-3=0$, $2x=3$, $x=\frac{3}{2}$

$\boxed{M\left(\frac{3}{2},\sqrt{5}\right)}$

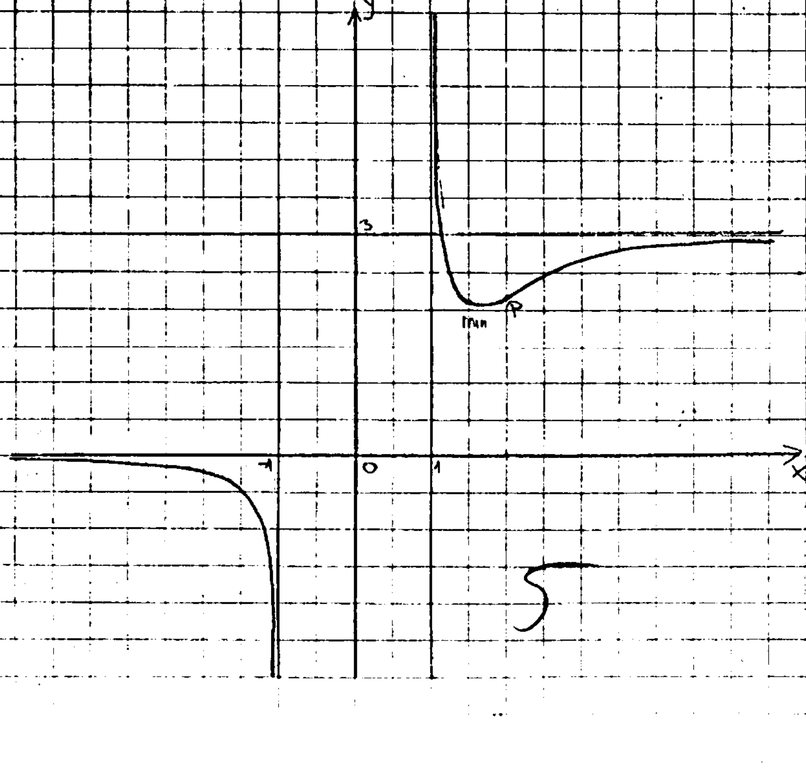
6. превојне тачке и интервали ∪ и ∩

$f''(x)=\frac{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-(2x-3)\frac{3}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^2-2-3x(2x-3)}{(x^2-1)^{5/2}}=\frac{-4x^2+9x-2}{(x^2-1)^{5/2}}=\frac{-(x-2)(4x-1)}{(x^2-1)^{5/2}}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
-1	−		−	−
$x-2$	−		−	+
$4x-1$	−		+	+
$\sqrt{(x^2-1)^5}$	+		+	+
$f''(x)$	−	нд	+	−
$f(x)$	∩	нд	∪ P	∩

$f(2)=\frac{3\cdot2-2}{\sqrt{4-1}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$P\left(2,\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$



6. $f(x) = x \cdot \sqrt{2x-x^2}$ $\quad 2x - x^2 \geq 0$, $x(2-x) \geq 0$, $x=0$, $x=2$

1. $D_f = [0,2]$

2. парност и непарност

Није ни парна ни непарна

3. нуле и знак

$N(0,0)$ $\quad f(x) > 0 \ \forall x \in D_f$
$N(2,0)$

4. асимптоте

а) нема В.А

б) Х.А $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ нема Х.А

в) К.А $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{2x-x^2} = \infty$ нема К.А

5. екстремне вредности и интервали монотоности

$$f'(x) = \sqrt{2x-x^2} + \frac{x(-2x+2)}{2\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{2x-x^2} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x-x^2-x^2+x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-2x^2+3x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x(3-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

x	0		3/2		2
x		+		+	
3-2x		+		−	
$\sqrt{2x-x^2}$		+		+	
f'(x)	0	+	0	−	нд
f(x)	0	↗	max	↘	нд

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{12-9}{4}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$M\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

1,5 $\quad$ 1,29

6. превојне тачке и интервали $\cap$ и $\cup$

$$f''(x) = \frac{(-4x+3)\sqrt{2x-x^2} - \frac{(-2x^2+3x)(-2x+2)}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2} = \frac{-8x^2+4x^3+6x-3x^2-2x^4+2x^3+3x^2-3x}{(2x-x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3-6x^2+3x}{(2x-x^2)^{3/2}} = \frac{x(2x^2-6x+3)}{(2x-x^2)^{3/2}}$$

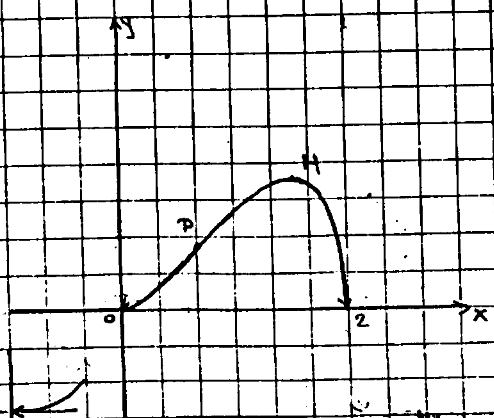
$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$

x	0		$\frac{6-2\sqrt{3}}{4}$		2
x		+		+	
$2x^2-6x+3$		+		−	
$(2x-x^2)^{3/2}$		+		+	
f''(x)	0	+	0	−	
f(x)	0	$\cup$		$\cap$	

$f(0,63) = 0,59$

2 . 1,73

0,63 $\quad$ 2



$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x(3-2x)}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\,x(3-2x)}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{0}\cdot 3}{\sqrt{2}} = 0$$

$tg\,\alpha_0 = 0 \quad \alpha = 0$

$$\lim_{x\to 2-0} f'(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sqrt{x}(3-2x)}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-0}\,(3-4)}{\sqrt{2-2+0}} = -\infty$$

$tg\,\alpha_2 = \infty \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

7. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2} = (x^3+3x^2)^{\frac{1}{3}}$

1. $D_f=\mathbb{R}$

2. парност и непарност

$f(-x)=\sqrt[3]{-x^3+3x^2}$ Није ни парна ни непарна

3. нуле и знак

$x^3+3x^2=0$

$x^2(x+3)=0$

$x=0 \wedge x=-3$

$N(0,0)$ $N(-3,0)$

	-3		0	
$\sqrt[3]{x^3+3x^2}$	$-$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$+$		$+$

$f(x)>0$ за $\forall x\in(-3,\infty)$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-3)$

4. асимптоте

а) ВА нема

б) ХА $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ нема ХА

в) $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}{\cancel{x}}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}{\dots}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3}+3x^2-\cancel{x^3}}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+\frac{3}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=1$

$y=x+1$

5. екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+6x)=\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}$ $\quad (x^2+2x)(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}$

	-2		0	
x	$-$	$-$		$+$
$x+2$	$-$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$
	max		min	

$f(-2)=\sqrt[3]{-8+12}=\sqrt[3]{4}$ $\quad M_1=(-2,\sqrt[3]{4})$ max

$f(0)=0$ $\quad M_2(0,0)$ min

$f(x)\nearrow$ за $\forall x\in(-\infty,-2)\cup($

$f(x)\searrow$ за $\forall x\in(-2,0)$

6. превојне тачке и интервали $\cap$ и $\cup$

$f''(x)=(2x+2)(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}+(x^2+2x)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(x^3+3x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2+6x)=\frac{2(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}-\frac{2(x^2+2x)(2x+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^5}}=$

$=\frac{(2x+2)(x^3+3x^2)-(2x^2+4x)(2x+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^5}}=\frac{\cancel{2x^4}+6x^3+2x^3+6x^2-4x^3-\cancel{2x^4}-8x^2-4x^3}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^5}}=\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{(x^2(x+3))^5}}$

	-3		0	
$-2x^2$	$-$	$-$		$-$
$x+3$	$-$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$		$\cap$
	P			

$f(-3)=0$

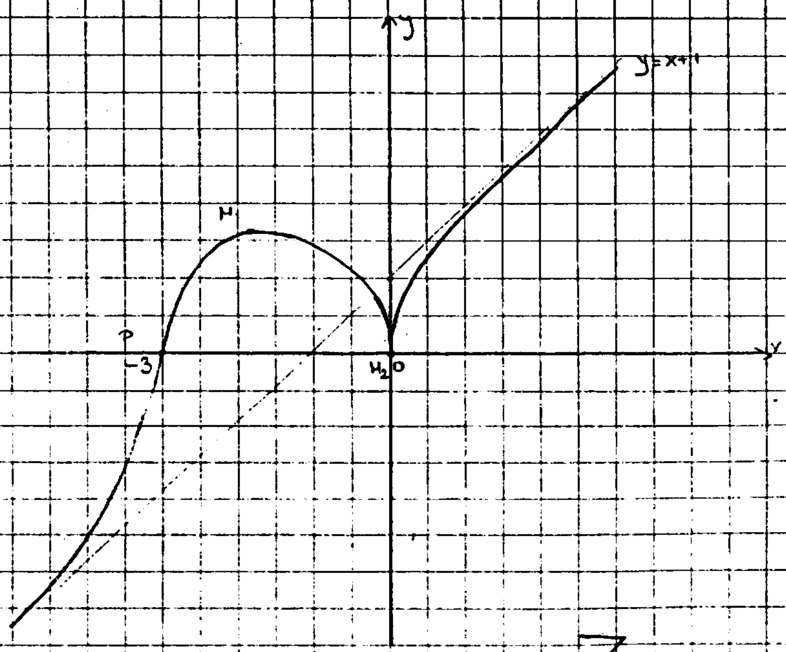
$P(-3,0)$

$f(x)\cup$ за $\forall x\in(-\infty,-3)$

$f(x)\cap$ за $\forall x\in(-3,\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}=\infty$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$



3. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}=\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$

1. $D_f=R$

2. Парност и непарност

$f(-x)=\sqrt[3]{-x^3-3x^2+4}$ Није ни парна ни непарна

3. Знак и нуле

$f(x)=0$ $x=2$ $x=-1$

$N_1(2,0)$ $N_2(-1,0)$

	-1	2	
$(x-2)^2$	+	+	+
$(x+1)$	−	+	+
$f(x)$	−	+	+

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-1)$

$f(x)\geq 0$ за $\forall x\in[-1,\infty)$

4. Асимптоте

а) В.А. нема

б) Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}=\infty$

в) К.А. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}}{x}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}-x\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}+\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)x^3}+\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}+\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)x^3}+x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+4-x^3}{x^2\left(\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}+1\right)}$

$=\frac{-3}{3}=-1$ К.А. $y=x-1$

5. Екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-3x^2+4)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-6x)=\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}}$

	-1	0	2		
x	−	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
$(x-2)^4(x+1)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	−	+
$f(x)$	↗	↗	↗	↘	↗
			max	min	

$f(0)=\sqrt[3]{4}$ $M_{max}(0,\sqrt[3]{4})$

$f(2)=\sqrt[3]{8-12+4}=0$ $M_{min}(2,0)$

$f(x)\nearrow$ за $\forall x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

$f(x)\searrow$ за $\forall x\in(0,2)$

$(x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^{-\frac{2}{3}}$

6. Превојне тачке и интервали $\cap$ и $\cup$

$f''(x)=(2x-2)(x^3-3x^2+4)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x^3-3x^2+4)^{-\frac{5}{3}}(3x^2-6x)(x^2-2x)=\frac{2}{3}(x^3-3x^2+4)^{-\frac{5}{3}}\left[3(x-1)(x^3-3x^2+4)-(x^2-2x)(3x^2-6x)\right]$

$=\frac{2(x^4-3x^3+4x-x^3+3x^2-4-x^4+2x^3+2x^3-4x^2)}{(x^3-3x^2+4)^{5/3}}=\frac{2(-x^2+4x-4)}{(x^3-3x^2+4)^{5/3}}=\frac{-2(x-2)^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}\,(x-2)^2(x+1)}=$

$=\frac{-2}{(x+1)\sqrt[3]{(x^3-3x^2+4)^2}}$

	-1	2	
-2	−	−	−
$x+1$	−	+	+
$f''(x)$	+	−	−
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$
	P		

$f(-1)=\sqrt[3]{-1-3+4}=0$

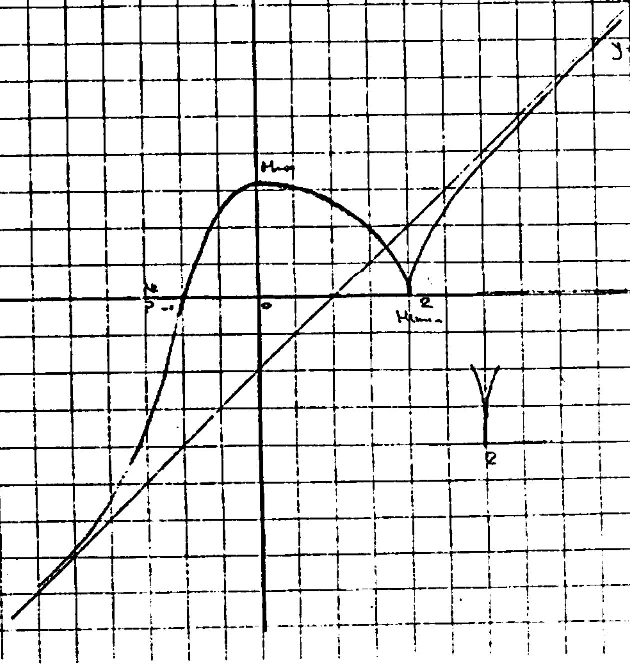
$P(-1,0)$

$\lim\limits_{x\to 2}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}}=$

с: $x-2=t$, $t\to 0$, $x=t+2$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sqrt[3]{t^2(t+3)}}=\infty$

$\operatorname{tg}\alpha=\infty$ $\alpha=\frac{\pi}{2}$



8

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\qquad x^2-1\neq 0 \quad x\neq \pm 1$ $\qquad x\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$

1. $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

2. ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ

$f(-x)=-\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-f(x)$ $\qquad$ НЕПАРНА

3. НУЛЕ И ЗНАК

$N(0,0)$

		-1	0	1	
x	−	−	+	+	
$\sqrt[3]{x^2-1}$	+	−	−	+	
$f(x)$	−	+	−	+	

$f(x)>0$ за $\forall x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

4. АСИМПТОТЕ

В.А. $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\dfrac{-1-0}{\sqrt[3]{(-1-0)^2-1}}=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{0+}}=-\infty$ $\qquad x=-1$ В.А.

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\dfrac{-1+0}{\sqrt[3]{(-1+0)^2-1}}=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{0-}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\dfrac{1-0}{\sqrt[3]{-0}}=-\infty$ $\qquad x=1$ В.А.

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{0+}}=+\infty$

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\pm\infty$ $\qquad$ нема Х.А.

К.А. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0$ $\qquad$ нема К.А.

5. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ И ИНТЕРВАЛИ МОНОТОНОСТИ

$f'(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2x=\dfrac{3x^2-3-2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$

		$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	
x^2-3	+	−	−	−	+	
$(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$	+	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	0 −	−	−	0 +	
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↗	
		max			min	

$f(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx -0{,}22$ $\qquad M_1\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ max $\qquad f(x)\nearrow$ за $\forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx 0{,}22$ $\qquad M_2\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ min $\qquad f(x)\searrow$ за $\forall x\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup$

6. ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ И ИНТЕРВАЛИ $\cap$ и $\cup$

$f''(x)=\frac{1}{3}\left(2x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}(x^2-1)^{-\frac{7}{3}}2x(x^2-3)\right)=\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{7}{3}}\left[2x(x^2-1)-\frac{4}{3}\cdot 2x(x^2-3)\right]=\dfrac{-2x(x^2-9)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$

		-3	-1	0	1	3	
$-2x$	+	+	+	−	−	−	
$(x-3)$	−	−	−	−	−	+	
$(x+3)$	−	+	+	+	+	+	
(x^2-1)	+	+	−	−	+	+	
$f''(x)$	+	−	+	−	+	−	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	
		P_1		P_2		P_3	

$f(-3)=-\frac{3}{2}$

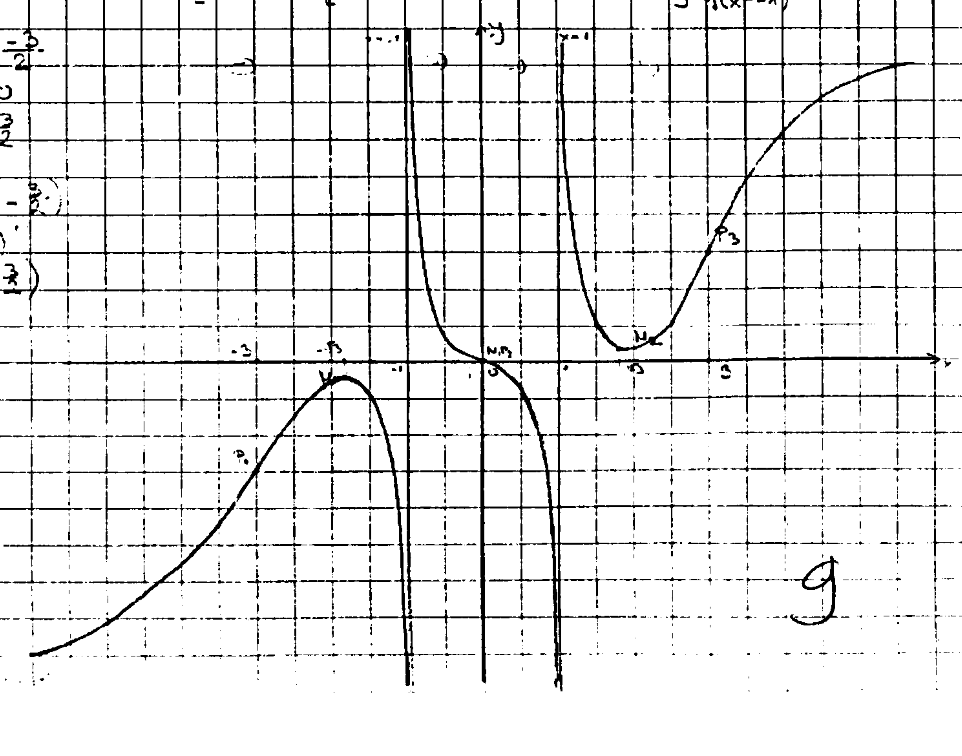
$f(0)=0$

$f(3)=\frac{3}{2}$

$P_1\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$

$P_2(0,0)$

$P_3\left(3,\frac{3}{2}\right)$



10. $f(x)=(x-5)\cdot e^{\frac{1}{x-3}}$

$\left(e^{\frac{1}{x-3}}\right)'=e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\left(\frac{1}{x-3}\right)'$

$\left((x-3)^{-1}\right)'=-(x-3)^{-2}=-\frac{1}{(x-3)^2}$

1. $D_f=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

2. Парност и непарност

$f(-x)=(-x-5)\cdot e^{\frac{1}{-x-3}}$ Није ни парна ни непарна

3. Нуле и знак

$f(x)=0$ $x-5=0$

$x=5$ $N(5,0)$

	3	5	
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$e^{\frac{1}{x-3}}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,3)\cup(3,5)$

$f(x)>0$ за $\forall x\in(5,\infty)$

4. Асимптоте

а) В.А. $\lim_{x\to3-0}(3-5)\cdot e^{\frac{1}{3-0-3}}=-2\cdot0=0$

$\lim_{x\to3+0}(3-5)\cdot e^{\frac{1}{3+0-3}}=-2\cdot+\infty=-\infty$ $x=3$ В.А. са десне стране

б) Х.А. $\lim_{x\to+\infty}(x-5)\,e^{\frac{1}{x-3}}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty}(x-5)\,e^{\frac{1}{x-3}}=-\infty$ нема Х.А.

в) К.А. $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-5)e^{\frac{1}{x-3}}}{x}=\frac{x(1-\frac{5}{x})e^{\frac{1}{x-3}}}{x}=1$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x-5)e^{\frac{1}{x-3}}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}x\left(e^{\frac{1}{x-3}}-1\right)-5e^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{x\to\pm\infty}x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x-3}}-1}{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{1}{x-3}-5e^{\frac{1}{x-3}}=1-5=-4$

$\boxed{y=x-4 \text{ К.А.}}$

5. Екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x)=e^{\frac{1}{x-3}}+(x-5)\cdot e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{-1}{(x-3)^2}=\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\left((x-3)^2-(x-5)\right)=\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}(x^2-7x+14)$ $f(x)\nearrow$ за $\forall x\in D_f$

6.

$f''(x)=\frac{-\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-3)^2-e^{\frac{1}{x-3}}\cdot2(x-3)}{(x-3)^4}(x^2-7x+14)+\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(2x-7)=\frac{-e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4}\left[(1+2x-6)(x^2-7x+14)-(2x-7)(x-3)^2\right]$

$=-\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4}\left[\cancel{2x^3}-\cancel{14x^2}+\cancel{28x}-\cancel{5x^2}+35x-70-\cancel{2x^3}+\cancel{12x^2}-\cancel{18x}+\cancel{7x^2}-42x+63\right]=-\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4}(3x-7)$ $x=\frac{7}{3}$

	$\frac{7}{3}$	3	
$3x-7$	$-$	$+$	$+$
-1	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cap$
	P		

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}-5\right)\cdot e^{\frac{1}{\frac{7}{3}-3}}=-\frac{8}{3}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx-0{,}6$

$P\left(\frac{7}{3},-\frac{8}{3}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

$\lim_{x\to3-0}f'(x)=\lim_{x\to3-0}\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}(x^2-7x+14)=$

$=6\lim_{x\to3-0}\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}=$

С $\left\{\frac{1}{x-3}=-t\right.$ $x-3=-\frac{1}{t}$

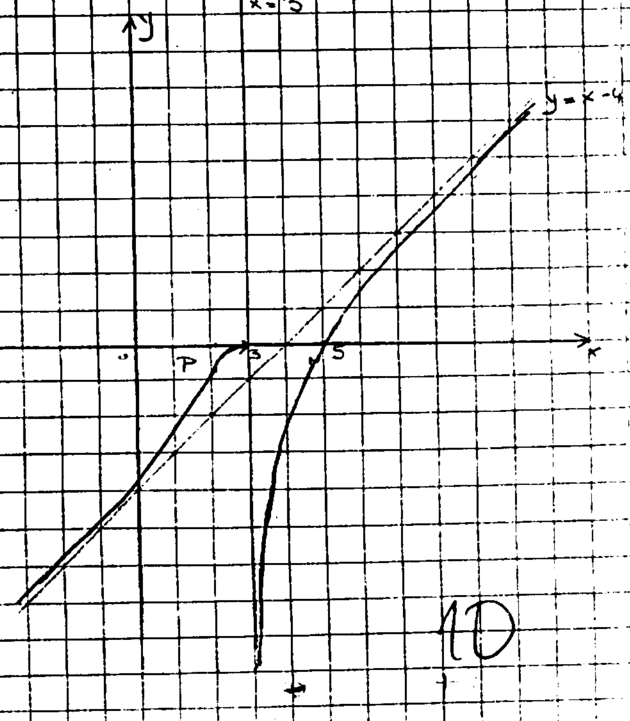
$x\to3-0\ \to\ t\to\infty$

$=6\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{\left(-\frac{1}{t}\right)^2}=6\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$=6\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{e^t}\overset{L}{=}12\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=12\cdot0=0$

$tg\,\alpha=0$

$\alpha=0$



10

11. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2 ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ

$f(-x) = \dfrac{x^2-2x-3}{-x e^{\frac{1}{x}}}$ није ни парна ни непарна

3 НУЛЕ И ЗНАК ФУНКЦИЈЕ

$f(x) = 0 \qquad x^2+2x-3=0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

$N_1(1,0) \quad N_2(-3,0)$

	-3	0	1	
$x-1$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$		$+$

$f(x) > 0 \quad (-3, 0) \cup (1, \infty)$

$f(x) < 0 \quad (-\infty, -3) \cup (0, 1)$

4 АСИМПТОТЕ

В.А $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{0}} \cdot \dfrac{-3}{-0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{0}} \cdot \dfrac{-3}{0} = -\infty \qquad x = 0 \quad$ В.А

Х.А $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$

К.А $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + \dfrac{2x-3}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x \cdot \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{x(2-\frac{3}{x})}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$y = x + 1 \quad$ К.А

5 ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ И ИНТЕРВАЛИ МОНОТОНОСТИ

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{(2x+2)x - (x^2+2x-3)}{x^2} + \dfrac{x^2+2x-3}{x} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\left(x(2x^2+2x-x^2-2x+3) - x^2-2x+3\right) =$

$= e^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^3}\left(x^3 - x^2 + x + 3\right)$

$(x^3 - x^2 + x + 3) : (x+1) = x^2 + 1$

$x^3 \pm x^2$

$x + 3$

x

12. $f(x) = \frac{x^2-4}{x} \cdot e^{\;3}$

1. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

2. ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ

Није ни парна ни непарна

3. НУЛИ И ЗНАК Ф-ЈА

$f(x)=0 \qquad x=\pm 2$

		-2	0	2
x^2-4	+	−	−	+
x	−	−	+	+
$e^{-\frac{5x}{3}}$	+	+	+	+
$f(x)$	−	+	−	+

$f(x)>0$ за $\forall x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$

$f(x)<0$ за $\forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

4. АСИМПТОТЕ

ВА $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5x}{3}} = \frac{-4}{-0} = +\infty$

$x=0$ ВА

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5x}{3}} = \frac{-4}{+0} = -\infty$

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x} \cdot e^{-\frac{5x}{3}} = \infty$ нема ХА

К.А. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2} e^{-\frac{5x}{3}} = \infty$ нема К.А

$\frac{8 \pm 4\sqrt{13}}{10}$

5.

$f'(x) = \frac{2x^2-x^2+4}{x^2} e^{-5x/3} + \frac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5x}{3}} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = e^{-\frac{5x}{3}} \cdot \frac{1}{x^2}\left(x^2+4+(x^3-4x)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3x^2} e^{-\frac{5x}{3}} (x+1)(5x^2-8x-12)$

12

13.04.2006 2^x

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$L=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad /\ln$

$\ln L=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x}{2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{2}}{2^x+3^x}\cdot\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{\cancel{2}}}{1}=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)$

12.04.2007

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

$\ln L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2\operatorname{tg}^2 x}\cdot\left(2\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{2\sin x\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\frac{\sin x}{x}\cdot x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=2$ $\quad\ln L=2$

$\boxed{L=e^2}$

02.04.2007.

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\sin 2x}$

$\ln L=\lim\limits_{x\to 0+}\sin 2x\cdot\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\sin 2x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{\cos 2x\cdot 2}{\sin^2 2x}}=-\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin^2 2x}{\sin x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}=0$ $\quad\ln L=0$

$L=e^0=\underline{\underline{1}}$

$f(x) = (x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$

$Df = (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

Није ни парна ни непарна

Нуле и знак

нема нула

		-1	
$x+1$	$-$		$+$
$e^{\frac{1}{x+1}}$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-1)$

$f(x)>0$ за $\forall x\in(-1,\infty)$

Асимптоте

а) В.А. $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = (-1-0+1)\, e^{\frac{1}{-1-0+1}} = -0\cdot e^{\frac{1}{-0}} = -0\cdot\frac{1}{e^{\infty}} = -\frac{0}{e^{\infty}} = 0$?

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = (-1+0+1)\, e^{\frac{1}{-1+0+1}} = 0\cdot e^{\infty} = 0\cdot\infty$ нема В.А.

б) Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}} = \infty\cdot 1 = \infty$ нема Х.А.

в) К.А. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)\, e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right) + e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x+1} + e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 2$

К.А. $y = x+2$

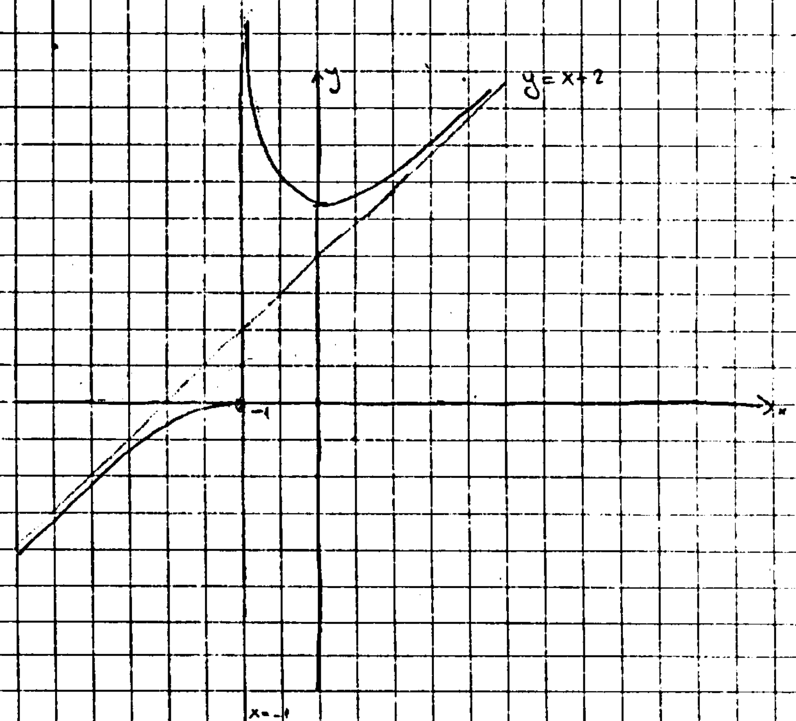
5. Екстремне вредности и интервали монотоности

$f'(x) = e^{\frac{1}{x+1}} + (x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{-1}{(x+1)^2} = e^{\frac{1}{x+1}}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x}{x+1}$

		-1		0	
$e^{\frac{1}{x+1}}$	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(0) = 1\cdot e = 2{,}71$

$M(0;\ 2{,}71)$



6. Превојне тачке

$f''(x) = e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{(-1)}{(x+1)^2}\cdot\frac{x}{x+1} + e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2} =$

$= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}\left(1-\frac{x}{x+1}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}\cdot\frac{1}{x+1}$

		-1	
$e^{\frac{1}{x+1}}$	$+$		$+$
$(x+1)^3$	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

нема превојне тачке

$\lim\limits_{x\to -1-0} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x}{x+1} =$

с. $\frac{1}{x+1} = -t$, $t\to\infty$; $x+1 = -\frac{1}{t}$; $x = -\left(\frac{1}{t}+1\right)$

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\cdot\left(\frac{1}{t}+1\right)\cdot t = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1+t}{e^{t}} \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t}} = 0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 0$, $\alpha = 0$

$f(x)=(x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

1. $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

2. $f(-x)=(-x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ Није ни парно ни непарно

3. Нуле и знак

$f(x)=0 \quad x=-1 \qquad N(-1,0)$

	-1		0	
$x+1$	$-$	$+$		$+$
$e^{-\frac{1}{x}}$	$+$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	$+$		$+$

$f(x)>0$ за $\forall x\in(-1,0)\cup(0,\infty)$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,-1)$

4. Асимптоте

В.А. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=(0+1)\cdot e^{-\frac{1}{0}}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=(0+1)\, e^{\frac{1}{0}}=1\cdot\infty=\infty \qquad x=0$ В.А. са леве стране

Х.А. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+1)e^{-\frac{1}{x}}=\pm\infty$

К.А. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left((x+1)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0 \qquad$ К.А. $y=x$

5. Екстремне вредности

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+(x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\,\frac{x^2+x+1}{x^2}$

		0	
$e^{-\frac{1}{x}}$	$+$		$+$
x^2+x+1	$+$		$+$
x^2	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

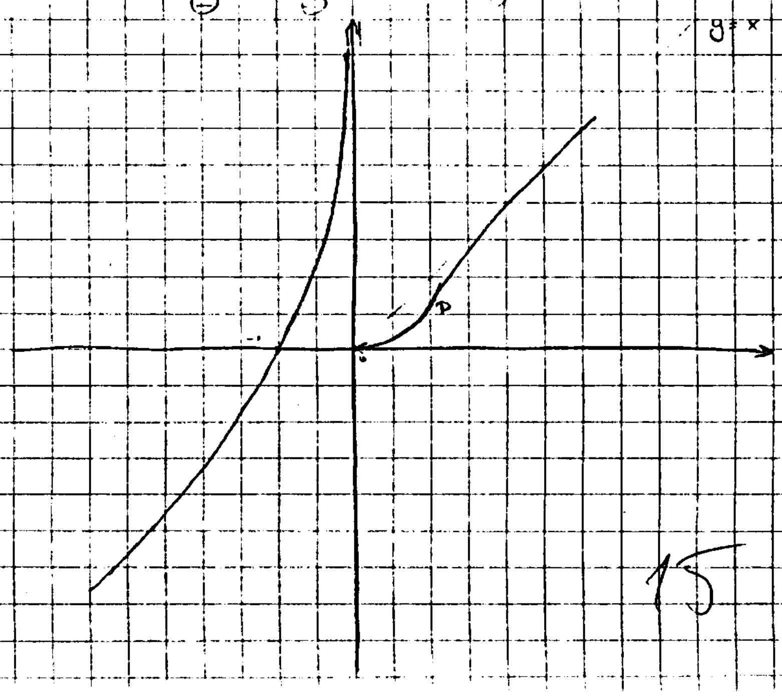
6. Превојне тачке

$f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2(2x+1)-2x(x^2+x+1)}{x^4}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^4}\left(x^2+x+1-x^2-2x\right)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-x}{x^4}$

		0		1	
$e^{-\frac{1}{x}}$	$+$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$		$-$
x^4	$+$		$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$		$\cap$

$f(1)=2\,e^{-1}=\frac{2}{e}$

$P\left(1,\frac{2}{e}\right)$



$\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2}$

$t=\frac{1}{x} \qquad x=\frac{1}{t}$

$t\to\infty$

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\,\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2+t+1}{e^t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L.P.}{=}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+1}{e^t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L.P.}{=}}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}=0$

$\operatorname{tg}\alpha=0$

$\alpha=0$

$f(x)=(2x-3)\,e^{\frac{1}{2x-3}}$

$D_f=(-\infty,\tfrac{3}{2})\cup(\tfrac{3}{2},\infty)$ $\qquad x\neq\frac{3}{2}$

Није ни парна ни непарна

Нуле и знак

		$\frac{3}{2}$	
$2x-3$	$-$		$+$
$e^{\frac{1}{2x-3}}$	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	н.д.	$+$

$f(x)<0$ за $\forall x\in(-\infty,\tfrac{3}{2})$

$f(x)>0$ за $\forall x\in(\tfrac{3}{2},\infty)$

Асимптоте

В.А $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-0} f(x)=(2(\tfrac{3}{2}-0)-3)\,e^{\frac{1}{3-0-3}}=\frac{-0}{\infty}=-0$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}+0} f(x)=(3+0-3)\,e^{\frac{1}{0}}=0\cdot\infty=\infty$

Х.А $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x-3)\,e^{\frac{1}{2x-3}}=\infty$ $\qquad$ нема Х.А

К.А $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{2x-3}{x}=2$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left((2x-3)e^{\frac{1}{2x-3}}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2x\,\frac{e^{\frac{1}{2x-3}}-1}{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{1}{2x-3}-3e^{\frac{1}{2x-3}}\right)=1-3=-2$

К.А $\quad y=2x-2$

Екстремне вредности

$f'(x)=2e^{\frac{1}{2x-3}}-(2x-3)\,e^{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{1}{(2x-3)^2}\cdot 2=2e^{\frac{1}{2x-3}}\left(1-\frac{1}{2x-3}\right)=4\,e^{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{x-2}{2x-3}$

		$\frac{3}{2}$		2	
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$2x-3$	$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	н.д.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	н.д.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(2)=(4-3)\,e^{\frac{1}{4-3}}=e$

$M(2,e)$

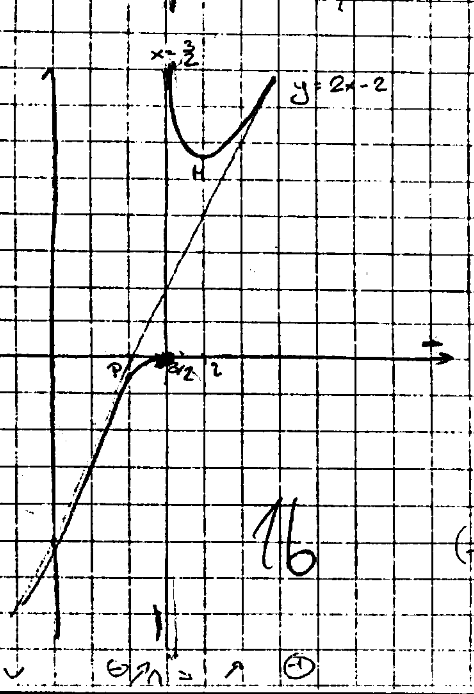
Превојне тачке

$f''(x)=4\left[-e^{\frac{1}{2x-3}}\frac{1}{(2x-3)^2}\cdot 2\cdot\frac{x-2}{2x-3}+e^{\frac{1}{2x-3}}\,\frac{2x-3-2(x-2)}{(2x-3)^2}\right]=4\,e^{\frac{1}{2x-3}}\frac{1}{(2x-3)^2}\left(1-\frac{x-2}{2x-3}\right)=e^{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{4}{(2x-3)^2}\cdot\frac{x-1}{2x-3}$

		1		$\frac{3}{2}$	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	н.д.	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$	н.д.	$\cup$

$f(1)=(2-3)\,e^{\frac{1}{2-3}}=-1\,e^{-1}=-\frac{1}{e}$ $\qquad -0{,}3$

$P(1,-\tfrac{1}{e})$



$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-0} f'(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-0} 4e^{\frac{1}{2x-3}}\cdot\frac{x-2}{2x-3}$

$\frac{1}{2x-3}=-t \qquad 2x-3=-\frac{1}{t} \qquad x=\frac{-\frac{1}{t}+3}{2}=\frac{3t-1}{2t}$

$t\to\infty$

$\lim\limits_{t\to\infty} 4\cdot e^{-t}\cdot\frac{\frac{3t-1}{2t}-2}{-\frac{1}{t}}=4\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\,\frac{t+1}{2}$

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=\frac{1}{\infty}=0$

$\operatorname{tg}\alpha=0 \qquad \alpha=0$

16

$(-\infty, P)$