

BROJNI REDOVI – ZADACI (III DEO)

ALTERNATIVNI REDOVI

Alternativni redovi su redovi sa promenljivim predznacima članova.

Oblika su $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

DEF: (a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **apsolutno** konvergira ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira

(b) Red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **uslovno** konvergira ako on konvergira a red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira

Kriterijumi:

Lajbnicov kriterijum:

Alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira ako je $a_n > a_{n+1}$ za $n=1,2,3\dots$ (monotono opadajući)

i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (nula niz)

Abelov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

ii) brojevi b_n obrazuju monotono ograničen niz

Dirišleov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

i) parcijalne sume $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ su ograničene

ii) b_n monotono teži nuli kad $n \rightarrow \infty$

Teorema (često se koristi u zadacima)

Ako je (a_n) pozitivan niz takav da je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ kad $n \rightarrow \infty$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$:

- i) konvergira ako je $p > 0$ i to $\begin{cases} \text{- apsolutno konvergira ako je } p > 1 \\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0 < p < 1 \end{cases}$
- ii) divergira ako je $p \leq 0$

Još trebamo zapamtiti i da :

- Ako je red apsolutno konvergentan onda je i konvergentan.
- Zbir apsolutno konvergentnog reda ne zavisi od poretka sabiranja njegovih članova.
- Zbir uslovno konvergentnog reda promenom poretka sabiranja njegovih članova može imati proizvoljnu vrednost (Rimanova teorema)

PRIMERI

Primer 1.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Rešenje:

Ovde je $a_n = \frac{1}{n}$

Važi da je $n < n+1 \rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ pa možemo zaključiti da je ovo monotono opadajući niz, još je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$,

pa po Lajbnicovom kriterijumu ovaj red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergira.

Šta je sa apsolutnom konvergencijom?

Posmatramo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Za naš red je to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a već smo govorili da je ovaj red divergentan, pa nam to govori da red

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ nije apsolutno konvergentan. **On je samo uslovno konvergentan.**

Primer 2.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

Rešenje:

Najpre uočimo da je $\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} > 0$ za svaki n iz skupa \mathbb{N} .

Uočimo dalje da je :

$$n+1 > n$$

$$(n+1)^2 > n^2$$

$$(n+1)^2 + 2 > n^2 + 2$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 2} > \sqrt{n^2 + 2}$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 2} + (n+1) > \sqrt{n^2 + 2} + n$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 2} + (n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} + n}} \rightarrow a_{n+1} < a_n$$

Dakle, radi se o opadajućem nizu, još da nadujemo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}+n} = \frac{1}{\infty} = 0$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ je konvergentan po Lajbnicovom kriterijumu.

Da ispitamo apsolutnu konvergenciju:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

Kad $n \rightarrow \infty$ možemo razmišljati ovako:

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} \sim \frac{2}{\sqrt{n^2}+n} \sim \frac{2}{n+n} \sim \frac{2}{2n} \sim \frac{1}{n}$$

Dakle, ovaj red je istog “**karaktera**” kao i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, koji znamo da je divergentan.

Zaključujemo da je početni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ **uslovno** konvergentan, jer on konvergira a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ divergira.

Primer 3.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$

Rešenje:

Ajmo ovde odmah da ispitamo apsolutnu konvergenciju: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n!}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Upotrebićemo Dalamberov kriterijum:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{(n+1)} (n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Pošto ovaj red apsolutno konvergira, odmah zaključujemo da konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$.

Primer 4.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$

Rešenje:

Ovde nam je ideja da upotrebimo Abelov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
- ii) brojevi b_n obrazuju monotono ograničen niz

Najpre moramo iskoristiti znanje iz jednog od trigonometrijskih fajlova:

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

$$\text{Sada posmatramo red: } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n} \cdot \cos \frac{\pi}{n+1}$$

Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ je konvergentan po Abelovom kriterijumu a brojevi $\cos \frac{\pi}{n+1}$ obrazuju monoton i ograničen niz.

Primer 5.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{50} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

Rešenje:

Ovde ćemo iskoristiti Dirišleov kriterijum:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira ako:

- i) parcijalne sume $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ su ograničene
- ii) b_n monotonno teži nuli kad $n \rightarrow \infty$

Upotrebićemo jedan rezultat iz prethodnih fajlova: $\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$

Još nam treba da $b_n = \frac{\ln^{50} n}{n}$ monotonno teži nuli kad $n \rightarrow \infty$

Potražimo taj limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{50} n}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \text{Lopital} = 50 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{49} n}{n} = \text{Lopital} = 50 \cdot 49 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{48} n}{n} = \text{itd} = 0$$

Dakle, ispunjeni su uslovi za Dirišleovu teoremu, pa dati red konvergira.

Primer 6.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$

Rešenje:

Ideja je da krenemo sa ispitivanjem apsolutne konvergenije: Dakle, ispitujemo $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$

Ovaj zadatak smo radili u jednom od prethodnih fajlova:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p}{\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right]^p} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} \frac{(2n+2)!!}{(2n)!!} \right]^p = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n-1)!!} \frac{(2n+2)(2n)!!}{(2n)!!} \right]^p = \left[\frac{2n+2}{2n+1} \right]^p$$

Sad spakujemo malo ovaj izraz i upotrebljavamo binomnu formulu:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2n+2}{2n+1} \right]^p &= \left[\frac{2n+1+1}{2n+1} \right]^p = \left[1 + \frac{1}{2n+1} \right]^p = \\ &= \binom{p}{0} 1^p \left(\frac{1}{2n+1} \right)^0 + \binom{p}{1} 1^{p-1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^1 + \binom{p}{2} 1^{p-2} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p}{2(n+\frac{1}{2})} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p/2}{n+1/2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ kad } n \rightarrow \infty \\ &= 1 + \frac{p/2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Sad ćemo iskoristiti :

Teorema

Ako je (a_n) pozitivan niz takav da je $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ kad $n \rightarrow \infty$ onda red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n :$

i) konvergira ako je $p > 0$ i to $\left\{ \begin{array}{l} \text{- apsolutno konvergira ako je } p > 1 \\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0 < p < 1 \end{array} \right\}$

ii) divergira ako je $p \leq 0$

Nama je :

Red konvergira za $p/2 > 0 \rightarrow p > 0$ i još $\left\{ \begin{array}{l} \text{- apsolutno konvergira ako je } p/2 > 1 \rightarrow \boxed{p > 2} \\ \text{- uslovno konvergira ako je } 0 < p/2 < 1 \rightarrow \boxed{0 < p < 2} \end{array} \right\}$

Red divergira za $p/2 \leq 0 \rightarrow \boxed{p \leq 0}$

www.matematuranje.com