

Izračunavanje površine površi

i) Ako je površ zadata jednačinom $z = z(x,y)$ i ako obeležimo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

ii) Ako je površ zadata parametarskim jednačinama $x = x(u,v)$ i $y = y(u,v)$ onda je:

$$P = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad \text{gde je:}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Jedan savet: pre proučavanja ove oblasti se **obavezno podsetite parcijalnih izvoda** (imate fajl kod nas)

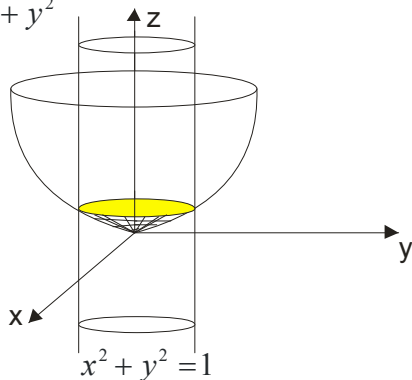
Primer 1.

Izračunati površinu dela paraboloida $2z = x^2 + y^2$ koji iseca cilindar $x^2 + y^2 = 1$

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku da vidimo o kojoj se površini radi.

$$2z = x^2 + y^2$$



Koristićemo formulu $\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy$ gde nam je $z = z(x,y)$ paraboloid $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ a cilindar će nam dati granice po kojima radimo...

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2} = y$$

Najbolje da na stranu sredimo (sad nije teško, al za drugi put da znamo) : $\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$

$$P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$$

Rekosmo da nam cilindar $x^2 + y^2 = 1$ određuje granice.

Uzimamo polarne koordinate:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \rightarrow |J| = r \quad \text{onda je } 0 \leq r \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$P = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \cdot r dr =$$

Ovo je 2π

Rešićemo ovaj integral “na stranu” pa ćemo posle ubaciti granice...

$$\int \sqrt{1+r^2} \cdot r dr = \left. \begin{array}{l} 1+r^2 = t^2 \\ 2r dr = 2t dt \\ r dr = t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t^2} \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{(\sqrt{1+r^2})^3}{3}$$

Sad mu ubacimo granice:

$$P = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{(\sqrt{1+r^2})^3}{3} \Big|_0^1$$

Ovo je 2π

$$= \frac{2\pi}{3} \left((\sqrt{1+1^2})^3 - (\sqrt{1+0^2})^3 \right) = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{2}^3 - 1) = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)}$$

Primer 2.

Izračunati površinu dela konusa $z^2 = x^2 + y^2$ isečenog cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$

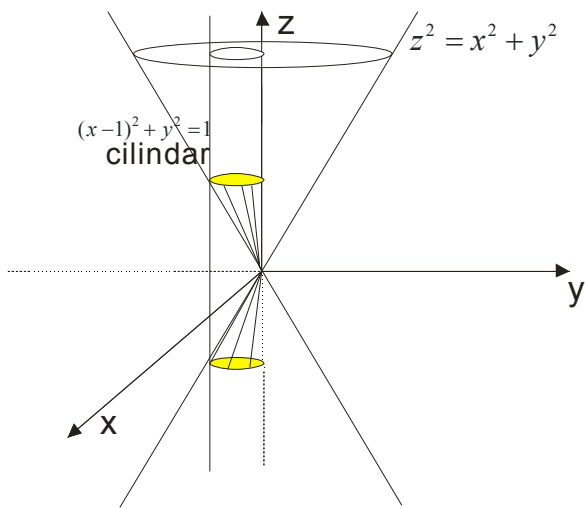
Rešenje:

Spakujmo malo cilindar i nacrtajmo sliku:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

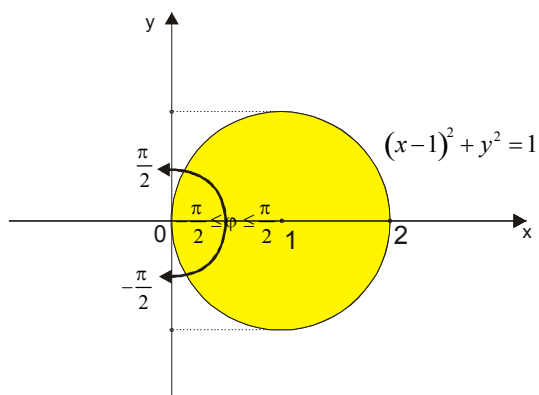


Vidimo da ćemo imati dve simetrične površine u odnosu na ravan $z = 0$.

Naći ćemo jednu pa to pomnožiti sa 2.

Cilindar će nam dakle dati granice!

Nacrtajmo sliku u ravni i odredimo granice:



Uzimamo polarne koordinate:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \rightarrow |J| = r \quad \text{onda je}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 - 2r \cos \varphi = 0$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 2r \cos \varphi$$

$$r^2 = 2r \cos \varphi \rightarrow r = 2 \cos \varphi$$

Odavde zaključujemo: $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$

Sa slike vidimo da ugao ide od $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{Mi radimo za } z = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + p^2 + q^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Da nadujemo površinu:

$$\begin{aligned} P_1 &= \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4 \cos^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \frac{-\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sad ovu površinu pomnožimo sa 2:

$$\boxed{P = 2P_1 = 2\pi\sqrt{2}}$$

Primer 3.

Izračunati površinu površi koju cilindar $x^2 + (y-2)^2 = 4$ iseca na konusu $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

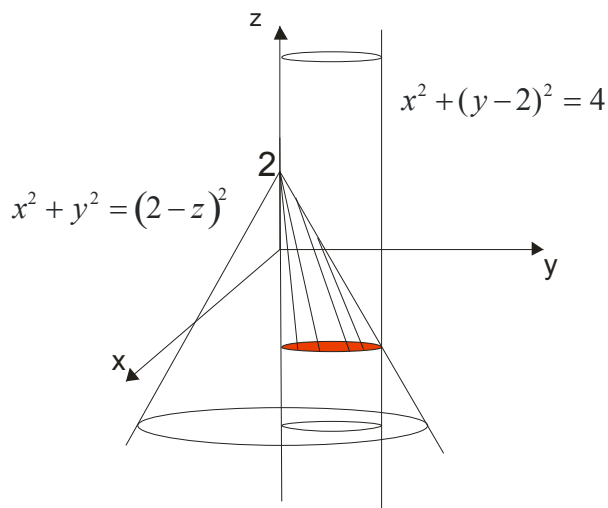
Rešenje:

Sredimo konus da bi mogli da nacrtamo sliku:

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z$$

$$x^2 + y^2 = (2 - z)^2$$



$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

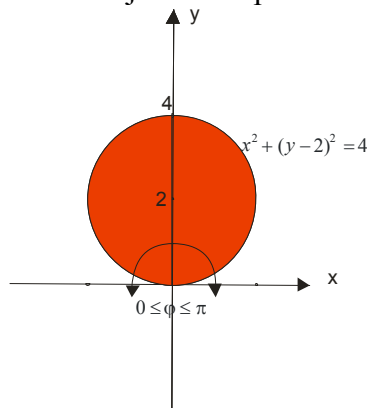
$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \left[\iint_D dx dy \right]$$

Ovo je P
za oblast D

Površina je ustvari površina kruga:



$$P_D = r^2 \pi = 2^2 \pi = 4\pi$$

$$P = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \left[\iint_D dx dy \right] = 4\sqrt{2}\pi$$

Ovo je P
za oblast D

$$P = 4\sqrt{2}\pi$$

Pogledajmo sada prethodni zadatak...Pa i tamo smo mogli ovo iskoristiti, zar ne?

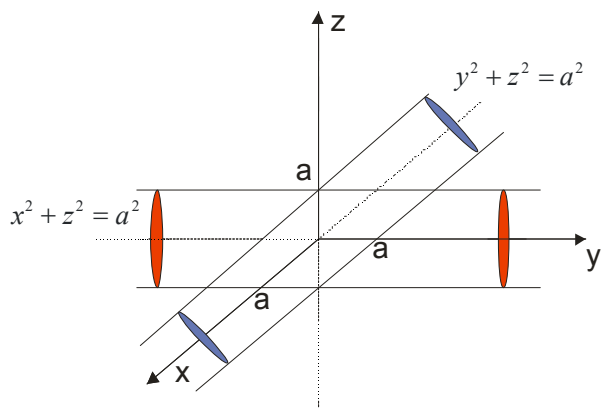
Mi smo vam pokazali oba načina a vi naravno , radite kako zahteva vaš profesor.

Primer 4.

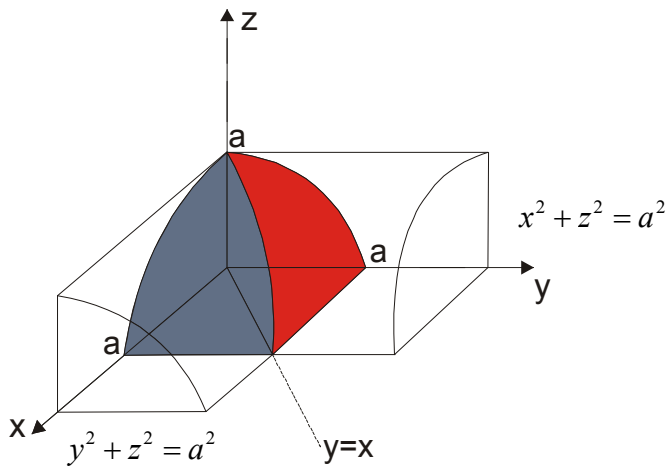
Izračunati površinu tela koje je ograničeno cilindrima $x^2 + z^2 = a^2$ i $y^2 + z^2 = a^2$.

Rešenje:

Nacrtajmo sliku...



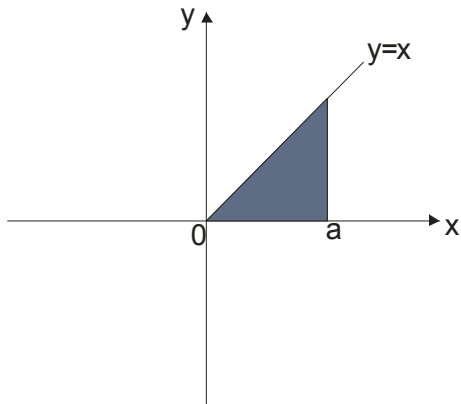
Izdvojimo sada prvi oktant.



Uočimo ovde dve površine. One su jednake, a takvih ima 16 računajući sve oktante.

Znači, ideja je naći površinu jednog dela pa sve to pomnožiti sa 16.

Nadjimo granice u ravni xOy



$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$x^2 + z^2 = a^2$$

$$z^2 = a^2 - x^2$$

$$z = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Nama treba prvi oktant, pa je:

$$z = +\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} = \sqrt{\frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-x^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$P = 16 \cdot \int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 16a \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^x dy = 16a \cdot \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Ovaj integral smo već više puta rešavali:

$$\boxed{P = 16a^2}$$

Primer .

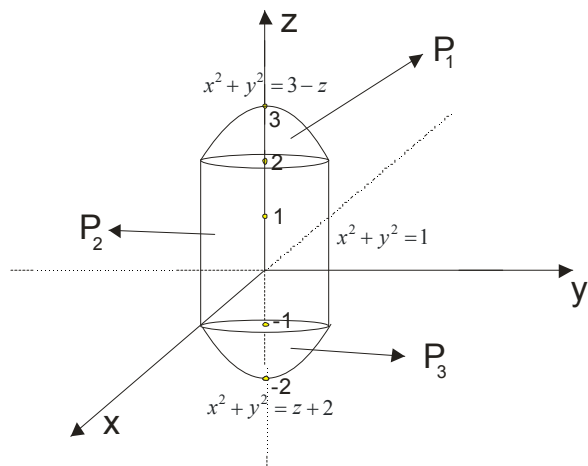
Izračunati površinu tela koje je ograničeno sa:

$$x^2 + y^2 = z + 2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 3 - z$$

Rešenje:



Uočavamo da se tražena površina sastoji od tri dela. Svaku od ovih površina ćemo naći posebno a onda sabrati dobijene rezultate...

Prvi deo je površina paraboloida $x^2 + y^2 = 3 - z$ koji odseca konus $x^2 + y^2 = 1$.

$$x^2 + y^2 = 3 - z$$

$$z = 3 - (x^2 + y^2)$$

$$p = -2x$$

$$q = -2y$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

Cilindar $x^2 + y^2 = 1$ određuje granice.

Uzimamo polarne koordinate:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \rightarrow |J| = r \quad \text{onda je } 0 \leq r \leq 1 \quad \text{i} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$P_1 = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr =$$

Ovo je 2π

Rešićemo ovaj integral “na stranu” pa ćemo posle ubaciti granice...

$$\int \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \left| \begin{array}{l} 1 + 4r^2 = t^2 \\ 8r dr = 2t dt \\ r dr = \frac{t dt}{4} \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t^2} \cdot t dt = \frac{1}{4} \int t^2 dt = \frac{1}{4} \frac{t^3}{3} = \frac{(\sqrt{1 + 4r^2})^3}{12}$$

Sad mu ubacimo granice:

$$P_1 = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{(\sqrt{1 + 4r^2})^3}{12} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot [(\sqrt{1 + 4})^3 - (\sqrt{1})^3] = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$$

$$P_1 = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$$

Dalje ćemo izračunati površinu P_3 , površinu paraboloida $x^2 + y^2 = z + 2$ koju odseca konus $x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = z + 2$$

$$z = (x^2 + y^2) - 2$$

$$p = 2x$$

$$q = 2y$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

$$P_3 = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy$$

Kao što vidimo ova površina je ista kao i površina u prethodnom delu:

$$\text{Dakle } \boxed{P_3 = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)}$$

Nadjimo još preostalu površinu P_2 . Pogledajmo sliku još jednom. Vidimo da je to ustvari omotač valjka

čija je visina $H=3$ a poluprečnik osnove $r=1$.

Zašto je $H=3$?

Ako rešavamo sistem $x^2 + y^2 = 3 - z$ i $x^2 + y^2 = 1$ tu je $z=2$

Ako rešavamo sistem $x^2 + y^2 = z + 2$ i $x^2 + y^2 = 1$ tu je $z = -1$

Dakle, visina po z osi je 3.

$$P_2 = M_{valjka} = 2r\pi H$$

$$P_2 = 2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 3$$

$$\boxed{P_2 = 6\pi}$$

Saberimo sad dobijene rezultate:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1) + 6\pi + \frac{\pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1)$$

$$P = \frac{\pi}{3} \cdot (5\sqrt{5} - 1) + 6\pi$$

$$\boxed{P = \frac{\pi}{3} \cdot (5\sqrt{5} + 17)}$$

www.matematiranje.com