

INTEGRALI ZADACI (III-DEO) PARCIJALNA INTEGRACIJA

Ako su u i v diferencijabilne funkcije od x , onda je :

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Ova metoda, parcijalna integracija, po pravilu je na početku proučavanja slabo razumljiva. Mi ćemo pokušati, koliko to dozvoljava pisana reč da vam je približimo i objasnimo.

Zadati integral mi upoređujemo sa $\int u dv$. “Nešto” (recimo Θ) izaberemo da je u , a “nešto” (recimo Δx) izaberemo da je dv . Od onog što smo izabrali da je u tražimo izvod, a od onog što smo izabrali da je dv tražimo integral.

$$\left| \begin{array}{ll} \Theta = u & \Delta x = dv \\ \Theta' dx = du & \int \Delta x = v \end{array} \right|$$

Kad nađemo du i v to menjamo u formulu parcijalne integracije: $uv - \int v du$. Ideja parcijalne integracije je da novodobijeni integral $\int v du$ bude lakši od početnog $\int u dv$. Ako dobijemo da on nije lakši, znači da smo pogrešno izabrali u i dv .

Najčešći **primer** na kome profesori objašnjavaju parcijalnu integraciju je :

$$\boxed{\text{primer 1.}} \quad \int x e^x dx = ?$$

Ovaj integral upoređujemo sa $\int u dv$. Izabraćemo da je $x = u$ a $e^x dx = dv$.

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & e^x dx = dv \\ dx = du & \int e^x dx = v \\ & e^x = v \end{array} \right| = \text{ovo sad menjamo u } u \cdot v - \int v du$$
$$= x \cdot e^x - \int_{v \cdot du} e^x dx = x e^x - e^x + C = \boxed{e^x(x-1) + C}$$

A šta bi se desilo da smo birali pogrešno? Da vidimo:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & x dx = dv \\ e^x dx = du & \int x dx = v \\ & \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \boxed{\int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx} \rightarrow \text{ovaj integral je teži od početnog!}$$

Da bi “pametno” birali ove integrale ćemo podeliti u 4. grupe.

1. **GRUPA** Ovde ćemo birati da je x ili izraz vezan sa x jednak u , a sve ostalo je dv

Na primer : $\int x \cos x dx$, $\int (1-x) \sin x dx$, $\int x e^x dx$, $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$, $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$ itd.

2. **GRUPA** Ovde ne uzimamo x za u , već funkciju pored x , (odnosno izraza sa x). $\ln x = u$,

$\arcsin x = u$, $\arctg x = u$ a sve ostalo je dv .

Na primer : $\int x \ln x dx$, $\int x \arcsin x dx$, $\int x^2 \arctg x dx$, $\int x^3 \ln x dx$ itd.

3. **GRUPA** Ovde ćemo uzimati $dx=du$, a unutrašnja funkcija je u , kao u 2. grupi

Na primer : $\int \ln x dx$, $\int \ln^2 x dx$, $\int \arctg x dx$, $\int \arcsin x dx$ itd.

4. **GRUPA** To su kružni integrali, koji uvek imaju svog “para” preko koga se dati integral vraća na početak...

Na primer : $\int e^x \sin x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$ itd.

Od svake grupe ćemo uraditi po nekoliko primera...

Jasno je da urađeni primer $\int x e^x dx$ pripada prvoj grupi.

primer 2. $\int (1-x) \sin x dx = ?$

$$\int (1-x) \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} 1-x=u & \sin x dx = dv \\ -dx=du & \int \sin x dx = v \\ & -\cos x = v \end{array} \right| = \underset{u \cdot v}{(1-x)(-\cos x)} - \underset{\int v du}{\int (-\cos x)(-dx)} = \boxed{(x-1) \cos x - \sin x + C}$$

primer 3. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = ?$

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} x=u & \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \\ dx=du & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = v \\ & tg x = v \end{array} \right| = x \cdot tg x - \int tg x dx =$$

izvući ćemo $\int tg x dx$ ‘na stranu’, rešiti ga, pa ćemo se vratiti u parcijalnu integraciju...

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

vratimo se u zadatak:

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \cdot \operatorname{tg} x - (-\ln|\cos x|) + C = \boxed{x \cdot \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C}$$

primer 4. $\int x \ln x dx = ?$

Ovde je primamljivo uzeti da je $x = u$, ali bi nas to odvelo u ćorsokak...

Ovaj integral je iz II grupe:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} \ln x = u & \int x dx = v \\ \frac{1}{x} dx = du & \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C} \end{aligned}$$

primer 5. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = ?$

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{arctg} x = u & \int x dx = v \\ \frac{1}{1+x^2} dx = du & \frac{x^2}{2} = v \end{array} \right| = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Ovde ćemo stati i $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ rešiti na stranu pa ubaciti rešenje... Ovo je onaj trik integral, objašnjen u I delu.

Da se podsetimo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = \boxed{x - \operatorname{arctg} x} \end{aligned}$$

Sada je: $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \boxed{\operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C}$

primer 6. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

I ovo je integral iz II grupe al je malo teži i ima više posla.

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{ll} \arccos x = u & \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = dv \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du & \boxed{\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = v} \end{array} \right| = \text{Uokvireni integral ćemo rešiti "na stranu"}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\boxed{x^2} \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t^2 \\ -\cancel{2} x dx = \cancel{2} t dt \\ x dx = -t dt \\ 1-x^2 = t^2 \rightarrow x^2 = \boxed{1-t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{\cancel{t}} (-\cancel{t} dt) = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{t^3 - 3t}{3} =$$

$$\frac{t(t^2 - 3)}{3} = \frac{\sqrt{1-x^2}(1-x^2-3)}{3} = \frac{\sqrt{1-x^2}(-x^2-2)}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}$$

Vratimo se sada u parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \begin{array}{ll} \arccos x = u & \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = dv \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du & -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3} = v \end{array} \right| = \\ &= \arccos x \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}\right) - \int \left[-\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}\right] \left[-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] \\ &= -\arccos x \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}\right) - \frac{1}{3} \int (x^2+2) dx \\ &= \boxed{-\arccos x \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right) + C} \end{aligned}$$

primer 7. $\int \ln x dx = ?$

Ovo je integral iz naše III grupe.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \quad dx = dv \\ \frac{1}{x} dx = du \quad \int dx = v \\ x = v \end{array} \right| = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \ln x - x + C = \boxed{x(\ln x - 1) + C}$$

primer 8. $\int \ln^2 x dx = ?$

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} \ln^2 x = u \\ ? dx = du \\ \int dx = v \\ x = v \end{array} \right|, \text{ da nađemo mi ovaj izvod "na stranu", jer se radi o složenoj funkciji.}$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

Vratimo se na zadatak:

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} \ln^2 x = u \\ \frac{2 \ln x}{x} dx = du \\ \int dx = v \\ x = v \end{array} \right| = \ln^2 x \cdot x - \int x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \int \cancel{x} \cdot \frac{\ln x}{\cancel{x}} dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \boxed{\int \ln x dx}$$

Radili smo i dobili $\int \ln x dx$, koji smo rešili u prethodnom primeru. Znači ovde bi morali da radimo novu parcijalnu integraciju!

Iskoristićemo rešenje prethodnog primera da je $\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$

Pa će rešenje našeg integrala biti:

$$\int \ln^2 x dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \boxed{\int \ln x dx} = x \cdot \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C = \boxed{x \cdot (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C}$$

primer 9. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = ?$

Ovo je već ozbiljniji primer i imaćemo više posla...

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \left| \begin{array}{l} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = u \\ ? du \end{array} \right|_{\substack{dx = dv \\ x = v}}, \text{ kao i obično, složeni izvod ćemo "na stranu"}$$

$$\begin{aligned} [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)') \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) \\ &= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{1+x^2}}} \cdot (\frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}} + x}{\sqrt{1+x^2}}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \end{aligned}$$

Vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = u \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = du \end{array} \right|_{\substack{dx = dv \\ x = v}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot x - \boxed{\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx} = \end{aligned}$$

Opet problem, izvučemo uokvireni integral i rešimo ga metodom smene:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = dt \end{array} \right| = \int dt = t = \sqrt{1+x^2}$$

Konačno, rešenje će biti:

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \boxed{x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C}$$

I još da pokažemo par primera iz IV grupe.

primer 10. $\int \sin(\ln x) dx = ?$

Krenemo sa parcijalnom integracijom (početni integral najčešće obeležavamo sa I):

$$I = \int \sin(\ln x) dx = \left| \begin{array}{ll} \sin(\ln x) = u & dx = dv \\ \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' dx = du & x = v \\ \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx & \end{array} \right| =$$

$$= \sin(\ln x) \cdot x - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) dx$$

Za sada $I = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) dx$

✱

Integral $\int \cos(\ln x) dx$ radimo “ na stranu” , opet parcijalnom integracijom:

$$\int \cos(\ln x) dx = \left| \begin{array}{ll} \cos(\ln x) = u & dx = dv \\ -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = du & x = v \end{array} \right| =$$

$$\cos(\ln x) \cdot x - \int x \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} dx = \cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + I$$

Dakle imamo $\int \cos(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + I$

✱

Vratimo se na

$$I = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) dx \quad \text{ovde zamenimo da je } \int \cos(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + I$$

$$I = \sin(\ln x) \cdot x - [\cos(\ln x) \cdot x + I]$$

$$I = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x - I$$

$$I + I = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x$$

$$2I = x \cdot [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$

$$I = \frac{x \cdot [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C$$

Konstantu C dodamo tek kad izrazimo I.

Profesori najviše vole da ovaj tip integrala objasne (a posle vala i pitaju) na integralima:

$$\int e^x \sin x dx \quad \text{i} \quad \int e^x \cos x dx$$

Mi ćemo uraditi jedan uopšteniji primer :

primer 11. $\int e^{ax} \sin bxdx = ?$

Startujemo sa parcijalnom integracijom...(i naravno ovaj integral obeležimo sa I)

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx = \left| \begin{array}{ll} \sin bx = u & e^{ax} dx = dv \\ \cos bx \cdot (bx)' dx = du & \int e^{ax} dx = v \\ b \cos bxdx = du & \frac{1}{a} e^{ax} = v \end{array} \right| =$$

$$= \sin bx \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} b \cos bxdx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx$$

Za sad dakle imamo $I = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \boxed{\int e^{ax} \cos bxdx}$

Rešavamo $\int e^{ax} \cos bxdx$, pa ćemo to rešenje vratiti...

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \left| \begin{array}{ll} \cos bx = u & e^{ax} dx = dv \\ -\sin bx \cdot (bx)' dx = du & \int e^{ax} dx = v \\ -b \sin bxdx = du & \frac{1}{a} e^{ax} = v \end{array} \right| =$$

$$= \cos bx \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-b \sin bx) dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx$$

Dakle : $\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx$ to jest

$$\boxed{\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \cdot I}$$

$$I = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx$$

$$I = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \left(\frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \cdot I \right) \quad \text{odavde moramo da izrazimo } I$$

$$I = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b \cdot e^{ax} \cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \cdot I \quad \dots\dots\dots / a^2$$

$$a^2 \cdot I = a \cdot e^{ax} \sin bx - b \cdot e^{ax} \cos bx - b^2 \cdot I$$

$$a^2 \cdot I + b^2 \cdot I = a \cdot e^{ax} \sin bx - b \cdot e^{ax} \cos bx$$

$$I(a^2 + b^2) = a \cdot e^{ax} \sin bx - b \cdot e^{ax} \cos bx$$

$$I = \frac{a \cdot e^{ax} \sin bx - b \cdot e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{I = \frac{e^{ax}(a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)}{a^2 + b^2} + C}$$

Rešenje ovog uopštenog integrala možemo primeniti da rešimo recimo $\int e^x \sin x dx$. Kako?

$$\text{Za } a=1 \text{ i } b=1 \text{ je } \frac{e^{ax}(a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)}{a^2 + b^2} = \frac{e^{1x}(1 \cdot \sin 1x - 1 \cdot \cos 1x)}{1^2 + 1^2} = \boxed{\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}}$$

$$\text{Dakle: } \int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

$$\boxed{\text{primer 11.}} \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$$

Ovo je jedan od poznatijih integrala koga možemo rešiti na nekoliko načina.

Ajmo da vidimo kako bi to išlo pomoću parcijalne integracije...

Najpre vršimo malu racionalizaciju podintegralne funkcije:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Dakle, sada imamo dva integrala(početni integral ćemo označiti sa I):

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Prvi od njih je tablični: $\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a}$

A drugi ćemo rešiti parcijalnom integracijom:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = dv \\ dx = du & \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = v \end{array} \right| =$$

Rešimo ovaj integral posebno:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} a^2 - x^2 = t^2 \\ \cancel{x} dx = \cancel{t} dt \\ x dx = -t dt \end{array} \right| = \int \frac{-\cancel{t} dt}{\cancel{t}} = -t = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

Vratimo se sada u parcijalnu integraciju:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \left| \begin{array}{ll} x = u & \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = dv \\ dx = du & \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = v \\ & -\sqrt{a^2 - x^2} = v \end{array} \right| = -x\sqrt{a^2 - x^2} - \int (-\sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int (\sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I$$

Da se podsetimo početka:

$$I = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$I = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} - (-x\sqrt{a^2 - x^2} + I)$$

$$I = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - I$$

Prebacimo I na levu stranu!

$$I + I = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow 2I = a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{i konačno:}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \left(a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) + C}$$

Ovaj integral možemo rešiti elegantnije primenom odgovarajuće smene, ali to u sledećem fajlu...