

INTEGRALI ZADACI (II DEO) – INTEGRACIJA POMOĆU SMENE

Ako uvedemo smenu $x = g(t)$ onda je $dx = g'(t)dt$ i početni integral $\int f(x)dx$ postaje:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt}$$

Za početak evo jednog saveta: **za smenu birati izraz čiji je izvod uz dx.**

Smena ustvari, prosto rečeno, znači da u datom integralu nešto (recimo Ω) izaberemo da je t . Od toga nadujemo izvod i to zamenimo u početni integral, koji je sada sve "po t ".

$$\left| \begin{array}{l} \Omega = t \\ \Omega' dx = dt \end{array} \right|$$

Primeri:

1

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 12} = ?$$

Vidimo da uz dx imamo izraz $2x$. Razmišljamo od čega je izvod $2x$? Znamo da je $(x^2)' = 2x$ i to ćemo izabrati kao smenu. Još je pametnije da uzmemo ceo izraz $x^2 + 12$ da nam bude smena jer je izvod od konstante 0. $[(x^2 + 12)' = 2x]$

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 12} = \left| \begin{array}{l} x^2 + 12 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \text{kad rešimo integral 'po t',}$$

$$\text{onda vratimo smenu i dobijamo rešenje 'po x' = } \boxed{\ln|x^2 + 12| + C}$$

2

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = ?$$

I ovde slično razmišljamo, izvod od $x^3 + 1$ je $3x^2$ i to je pogodno za smenu, al šta ćemo sa onom trojkom?

Ne brinite, znamo da konstanta uvek može da ide ispred integrala po pravilu

$$\boxed{\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx}$$

koje smo objasnili u prethodnom delu (integrali zadaci I deo).

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \left| \begin{array}{l} x^3 + 1 = t \\ 3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \boxed{\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + C}$$

3

$$\int \frac{1}{x+5} dx = ?$$

Ovaj integral liči na tablični $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ali umesto x u imeniocu imamo $x + 5$. Zato je pametno baš taj izraz uzeti za smenu :

$$\int \frac{1}{x+5} dx = \left| \begin{array}{l} x+5=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \boxed{\ln|x+5| + C}$$

Vezano za ovakve integrale možemo izvesti jedan zaključak:

$$\boxed{\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a| + C}$$

4

$$\int \frac{1}{(x+5)^3} dx = ?$$

Ovaj integral je sličan prethodnom, ali pazite jer u imeniocu je stepen izraza pa on **‘ne ide’** u ln.

$$\int \frac{1}{(x+5)^3} dx = \left| \begin{array}{l} x+5=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2 \cdot t^2} + C = -\frac{1}{2 \cdot (x+5)^2} + C$$

5

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = ?$$

Uz dx imamo cosx, a kako znamo da je izvod od (sinx)'=cosx , jasno je da će to i biti smena.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \boxed{\frac{\sin^3 x}{3} + C}$$

6

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = ?$$

$$\int e^{-x^3} x^2 dx = \left| \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{-3} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = \boxed{-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C}$$

7

$$\int \operatorname{ctgx} dx = ?$$

Ovde najpre moramo upotrebiti identitet $\operatorname{ctgx} = \frac{\cos x}{\sin x}$, pa tek onda uzeti smenu:

$$\int \operatorname{ctgx} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$$

8

$$\int \frac{\operatorname{arctgy}}{1+y^2} dy = ?$$

Vidite i sami da se bez znanja izvoda teško može razumeti metoda smene, zato vam svetujemo da prvo njih dobro obnovite pa tek onda da se probate sa integralima... (**fajlovi izvodi – zadaci I, II III deo**)

$$\int \frac{\operatorname{arctgy}}{1+y^2} dy = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctgy} = t \\ \frac{1}{1+y^2} dy = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \boxed{\frac{(\operatorname{arctgy})^2}{2} + C}$$

9

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4} = ?$$

Ovde uz dx imamo x^2 I znamo da je izvod od $(x^3)' = 3x^2$ a u imeniocu nemamo x^3 . Zato ćemo mi malo prepraviti imenilac da bi dobili $x^3 \dots$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4} = \int \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4}$$

Ovde ćemo upotrebiti tablični integral $\int \frac{1}{a^2 + t^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$ ali moramo najpre odrediti a .

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \boxed{\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C}$$

Kad smo već upotreabili ovaj tablični integral , ako se sećate, mi smo pomenuli da ne dozvoljavaju svi profesori da se on koristi. Pa da vidimo kako smo mi njega rešili metodom smene:

10

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad \text{TABLIČNI}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \int \frac{1}{a^2 [1 + (\frac{x}{a})^2]} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{[1 + (\frac{x}{a})^2]} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ \frac{dx}{a} = dt \rightarrow dx = a dt \end{array} \right| = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{[1 + t^2]} a dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{[1 + t^2]} dt = \\ \frac{1}{a} \int \frac{1}{[1 + t^2]} dt &= \frac{1}{a} \operatorname{arctgt} + C = \boxed{\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C} \end{aligned}$$

11

$$\int \frac{1}{25 + x^2} dx = ?$$

Ovde je dakle samo problem odrediti vrednost za **a**.

$$\int \frac{1}{25 + x^2} dx = \int \frac{1}{5^2 + x^2} dx = [\text{ovde je dakle } a=5] = \boxed{\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C}$$

Slična situacija je i sa :

12

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{TABLIČNI}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 [1 - (\frac{x}{a})^2]}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{[1 - (\frac{x}{a})^2]}} dx = \int \frac{1}{a \cdot \sqrt{[1 - (\frac{x}{a})^2]}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ \frac{dx}{a} = dt \rightarrow dx = a dt \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} a dt = \frac{1}{a} \cdot \cancel{a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \arcsin t + C = \boxed{\arcsin \frac{x}{a} + C} \end{aligned}$$

13

$$\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}} dx = ?$$

Opet se traži vrednost za a . Ovde je malo teže jer 15 nije kvadrat nekog broja, ali mi upotrebimo trikče:

$$\int \frac{1}{\sqrt{15-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{15})^2 - x^2}} dx = [\text{dakle } a = \sqrt{15} \text{ pa je}] = \boxed{\arcsin \frac{x}{\sqrt{15}} + C}$$

14

$\int \sin ax dx = ?$ gde je a konstanta, to jest bilo koji broj.

$$\int \sin ax dx = \left. \begin{matrix} ax = t \\ adx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{a} \end{matrix} \right| = \int \sin t \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int \sin t dt = \frac{1}{a} (-\cos t) + C = \boxed{-\frac{1}{a} \cos ax + C}$$

Vezano za ovakve integrale, gde umesto x -sa imamo ax , možemo reći da se rade uvek sa smenom $ax=t$, odnosno radimo ga kao tablični, a ispred integrala dodamo konstantu $\frac{1}{a}$.

Na primer:

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad \text{itd.}$$

15

$$\int \sin^2 x dx = ?$$

Ovde nam treba trigonometrijska formulica za $\sin^2 x$ (pogledaj prethodni fajl : **integrali zadaci I deo**)

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} [\int 1 \cdot dx - \int \cos 2x dx] = \frac{1}{2} [x - \frac{1}{2} \sin 2x] + C = \boxed{\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C}$$

Ovde smo u radu iskoristili zaključak iz prethodnog zadatka $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$.

16

$$\int \cos^2 x dx = ?$$

Opet mora trigonometrija... $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int 1 \cdot dx + \int \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + C = \boxed{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C} \end{aligned}$$

17

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ?$$

Ovaj zadatak možemo rešiti na više načina. Upotrebicemo trikče :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Sada već imamo očiglednu smenu...

$$\int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Ovo je tablični integral $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ pa je

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

Rešenje može ostati i ovakvo, ali ćemo ga mi namerno malo prepraviti jer se ovaj integral može elegantnije rešiti preko trigonometrijskih smena, a tamo će rešenje izgledati baš kao...

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|^{\frac{1}{2}} + C = \ln \left| \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}} \right| + C = \boxed{\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C}$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = ?$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx = \text{ovde je trik izvršiti racionalizaciju} = \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sad ćemo ovaj integral rastaviti na dva...

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{prvi je tablični a drugi ćemo rešiti smenom(na stranu)}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) dx = dt \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -dt \end{array} \right| = \int (-dt) = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Vratimo se u dosadašnje rešenje i imamo:

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x - (-\sqrt{1-x^2}) + C = \boxed{\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$