[redacted]

* STATIKA KONSTRUKCIJA *

Prof. Đorđe Vuksanović

2 kolokvijuma: sredina novembra i kraj decembra

Literatura: Prof. Đurić;
Prof. Đurić i Nikolić (+ uticaj pokretnog opterećenja);
Praktikum

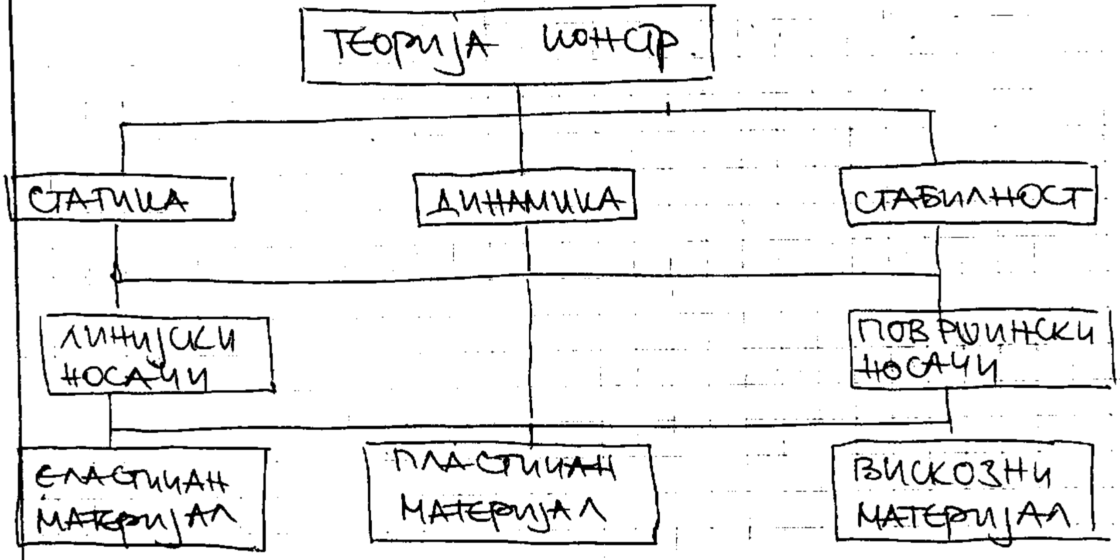
4 32 9+2

36 64 60

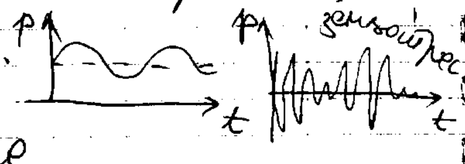
st pojmovi

t momenti

Теорија конструкција се бави анализом напона.



- Статичко оптерећење се не мења током времена, а динамичко је у ф-ји од времена.



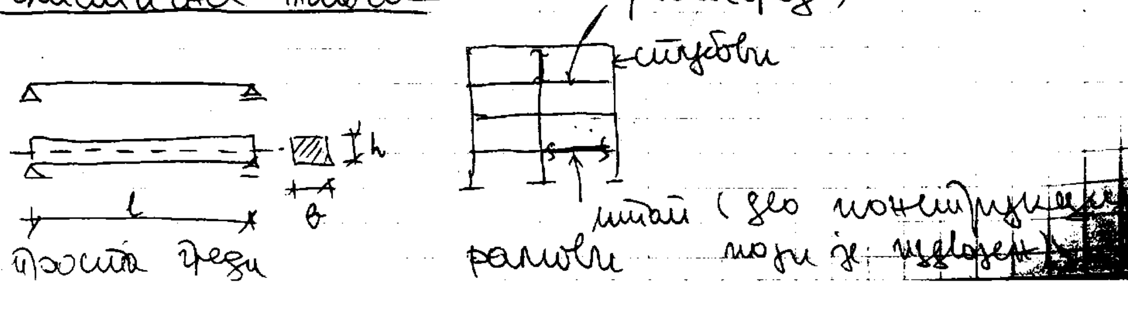
- Стабилност конструкција се бави проучавањем стабилности конструкција при: - статичком / - динамичком оптерећењу.

→ По врсти носача:
- линијски (могу се приказати линијом)
- површински (равне површи - плоче, криве површи - љуске.)

→ По врсти материјала:
-еластичан -пластичан -вискозан.

Статика се бави методама и поступцима прорачуна статичких утицаја и деформација.

→ еластични носачи



ТЕХНИЧКА ТЕОРИЈА САВИЈАЊА ШТАПА У РАВНИ

ДЕФИНИЦИЈА ШТАП

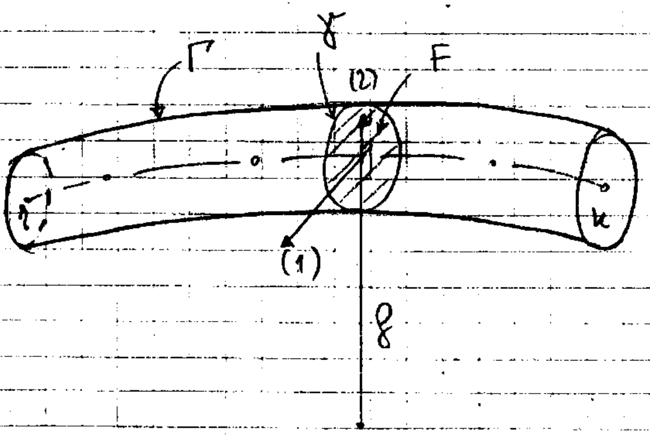
Посматрамо глатку равну или просторну криву линију **ik**. У свим тачкама те криве у нормалним равнима смо описали неке површи ограничене кривим линијама (затвореним) **γ**. Оне ограничавају површи **F**.

Тежишта површи F су одговарајуће тачке линије ik, а димензије тих површи су мале у односу на дужину линије ik, и величину полупречника кривине те линије.

Крива ik је **ОСА ШТАПА**, а површи F **ПОПРЕЧНИ ПРЕСЕЦИ**.

Γ: Геометријско место тачака кривих γ дуж целе ik је затворена површ **Γ - ОМОТАЧ ШТАПА**.

· **Штап** је тело које се састоји из површи Γ и попречних пресека у тачкама i и k.



* Сваки попр. пресек има F, мом. инерције и главне моменте инерције I_1, I_2.

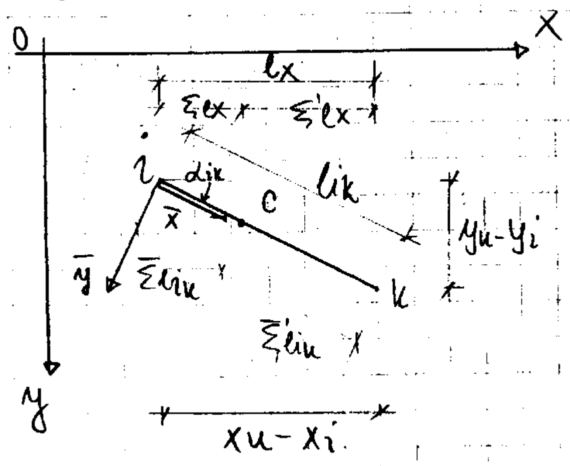
• **РАВАН ШТАП** је штап чија оса са једном од главних централних оса инерције попречних пресека леже у једној равни [(2), ik]. Та раван се назива РАВАН ШТАПА.

Све остале штапове називамо ПРОСТОРНИ ШТАПОВИ (ако је оса просторна крива).

Ако је ги произвољна крива - криви штапови, а ако је права онда су прави штапови.

Штапови могу бити: са константним попречним пресеком дуж осе и са променљивим п.п. који се мења по неком закону.

КАРАКТЕРИСТИКЕ ШТАПА



Посматрамо штап ik и произвољну тачку c на штапу.

$i(x_i, y_i)$
$k(x_k, y_k)$
$c(x, y)$

$(\bar{x} i \bar{y})$ - локални координатни сис. штапа

(xOy) - глобални координатни сис.

$$l_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$ дужина штапа

$$\cos\alpha_{ik} = \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} \qquad \sin\alpha_{ik} = \frac{y_k - y_i}{l_{ik}}$$

Положај оси штапа је одређен координатама крајњих тачака и углом α_{ik} (нагиб према оси x).

Положај тачке c се може одредити у односу на тачке i и k са величинама ξl_{ik} и $\xi' l_{ik}$ које су бездимензионалне, и имају особину:

$$\boxed{\xi + \xi' = 1} \qquad 0 < \xi < 1$$

($c-k$ $\bar{\xi} = 1$ $\xi = 0$; $\bar{\xi} = \bar{\xi}' = 0{,}5$ c на средини)

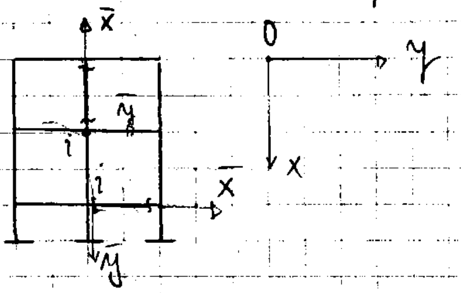
Пројекција l_{ik} на осу x се бележи као l_x

$\boxed{l_x = l_{ik} \cdot \cos\alpha_{ik}}$ $\boxed{l_y = l_{ik} \cdot \sin\alpha_{ik}}$

Положај C се може одредити и помоћу ξl_x и $\xi' l_x$

* Локални координатни сис. штапа је везан за почетни штап $\bar{x}i\bar{y}$. Глобални уводимо било где у равни

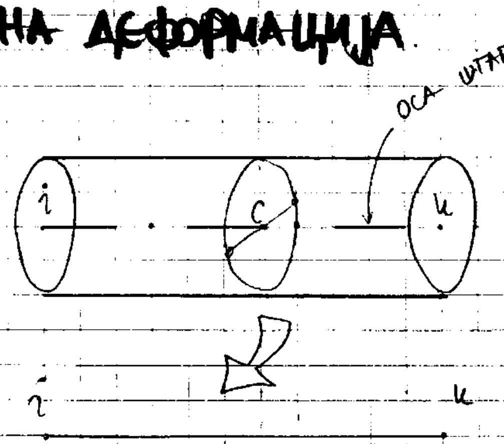
Карактеристика штапа је да има локални координатни сис. који је под неким углом у одн. осу на глобални коорд. сис.

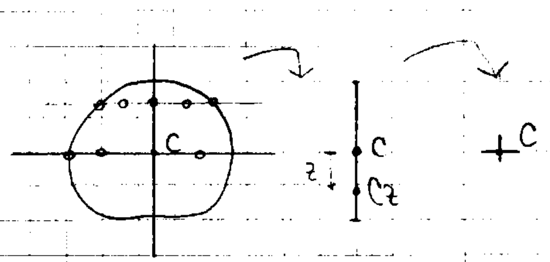


ДЕФОРМАЦИЈА ШТАПА

На сва тела у природи делују одговарајуће силе и услед тога долази до померања и деформације тела.

• **РАВНА ДЕФОРМАЦИЈА**





Све тачке имају исто померање као тачка C.

Ако знамо померање C, можемо одредити и померање Cz!

Пресек у тачки С: Све тачке које се налазе на нормали на раван штапа се померају исто. Све тачке у равнима ∥ са равни штапа се померају исто. Довољно је знати померање С.

Ако је познато померање тачке С, можемо одредити и померање тачке на одстојању z од тачке С.

⇒ Следи да __једнодимензионално тело можемо свести на једну линију уводећи:__

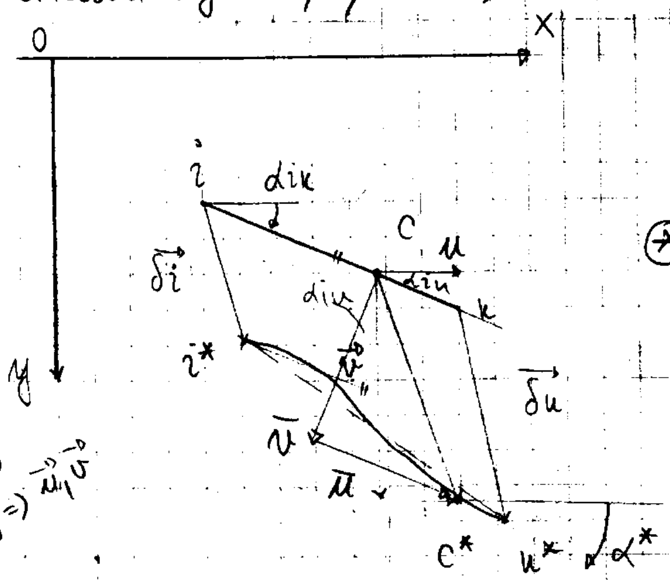
1) ~~РАВАН~~ УТАП

2) РАВНУ ДЕФОРМАЦИЈУ

ПОМЕРАЊА

P

РАВНА ДЕФ. је деформација код које се тачке померају у равнима ∥ са равни штапа. (померање $\vec{\delta}$ тачака осе леже у равни штапа па ће и деформисана оса i^*k^* лежати у тој равни.)



разложимо $\vec{\delta_c}$ на x,y ⇒ $\vec{\bar u}, \vec{\bar v}$

$\vec{\delta_i}, \vec{\delta_k}, \vec{\delta_c}$ - ВЕКТОРИ ПОМЕРАЊА

(*) $u = \bar{u}\cos\alpha_{ik} - \bar{v}\sin\alpha_{ik}$

$v = \bar{u}\sin\alpha_{ik} + \bar{v}\cos\alpha_{ik}$

$\bar{u} = u\cdot\cos\alpha_{ik} + v\cdot\sin\alpha_{ik}$

$\bar{v} = -u\sin\alpha_{ik} + v\cos\alpha_{ik}$

• разложимо $\bar u, \bar v$ на и

Штап је оптерећен неким оптерећењем и долази до деформације и померања (промене облика, искривљење).

При деформацији попречни пресек који је био управан на осу штапа ће се обрнути за неку вредности α^* (угао после деформације).

$$\alpha^* = \alpha_{ik} + \varphi$$

φ - угао за који ће се при деформацији ротирати тангента.

$i(x_i, y_i) \rightarrow i^*(x_i^*, y_i^*)$ $\qquad \boxed{x^* = x + u}$

$k(x_k, y_k) \rightarrow k^*(x_k^*, y_k^*)$ $\qquad \boxed{y^* = y + v}$

$c(x, y) \rightarrow c^*(x^*, y^*)$ $\qquad \boxed{\alpha^* = \alpha + \Delta\alpha}$ $\quad \Delta\alpha = \varphi$

$\Downarrow$ апроксимација

$$\alpha^* = \alpha + \varphi$$

На овај начин приказали смо кретање неког штапа у равни.

МАТРИЧНИ ОБЛИК

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}$$

u - померање у x правцу

v - померање у y правцу

φ - за колико се тангента обрне

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \varphi \end{bmatrix}$$ компонентална померања у локалном систему.

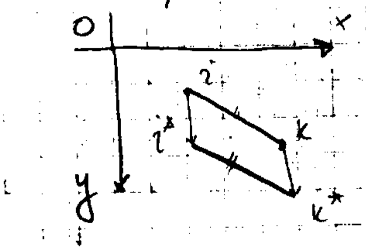
$$U = T \cdot \bar{U} \qquad T = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ik} & -\sin\alpha_{ik} & 0 \\ \sin\alpha_{ik} & \cos\alpha_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{U} = T^{-1} U \qquad \boxed{T^{-1} = T^T}$$ (види из ⊛)

ако је $T^T = T^{-1}$ матрица је ОРТОГОНАЛНА.

(*) $\Rightarrow$ $T^T = T^{-1}$ ОРТОГОНАЛНА МАТРИЦА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ КОМПОНЕНАТА ПОМЕРАЊА ИЗ ЈЕДНОГ У ДРУГИ КООРДИНАТНИ СИС.

Ни једна од ових величина не мора да представља деформацијску величину, јер тело може да се помери као круто тело (транслација).



У померањима $\vec{\delta}$ садржана су и она померања од промене положаја осе у равни штапа као целине и померање једних делова осе услед деформације других. Уводимо, зато, величине које постоје само на местима на којима се деформише оса а које су једнаке нули на местима на којима се она не деформише. Те величине се називају **ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ (ЧИСТО)**

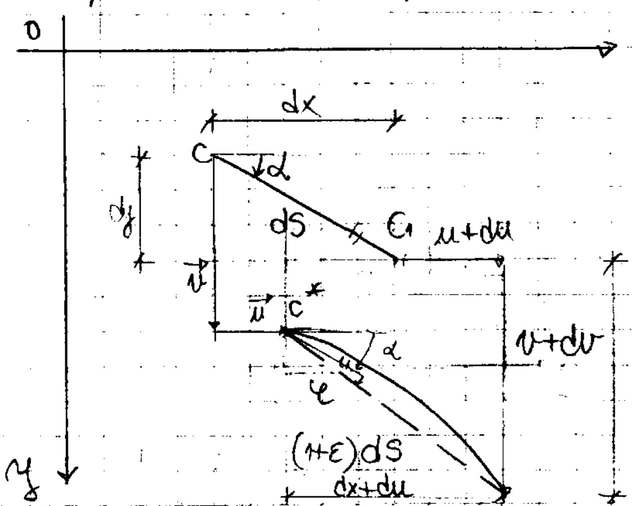
→ посматрамо елементарни део штапа dS (деформација у малом)

$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S}$

$\Delta S = \varepsilon \cdot S$

$S^* = S + \Delta S$

$= (1+\varepsilon) dS$



$dx = dS \cdot \cos\alpha$

$dy = dS \cdot \sin\alpha$

– на пројекцију x-осе: $dx + du = (1+\xi)\,ds \cdot \cos(\alpha+\varphi)$

– на пројекцију y-осе: $dy + dv = (1+\xi)\,ds \cdot \sin(\alpha+\varphi)$

Успоставили смо везу између du, dv, ξ и φ.
Ове релације важе у теорији великих деформација (јер нисмо увели никакве претпоставке што се тиче u, v, ξ и φ).
У грађевинским конструкцијама величине u, v и φ су мале, а ξ из б следи да је мало.

① Основна претпоставка теорије конструкција

Претпоставка о малим деформацијама.

Померања, обртања и деформацијске величине штапа често су толико мале да њихове квадрате и више степене, као и квадрате и више степене њихових извода можемо занемарити.

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\varphi) \approx 1 - \cancel{\frac{\varphi^2}{2!}} + \cancel{\frac{\varphi^4}{4!}} + \dots \Rightarrow \boxed{\cos\varphi \approx 1}$$

$$\sin(\alpha+\varphi) \approx \varphi + \cancel{\frac{\varphi^3}{3!}} + \cancel{\frac{\varphi^5}{5!}} + \dots \qquad \boxed{\sin\varphi \approx \varphi}$$

$\longrightarrow$ занемарујемо

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha \cdot 1 - \sin\alpha \cdot \varphi$$

$$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha \cdot 1 + \varphi \cdot \cos\alpha$$

$\xi \cdot \varphi \approx 0$ производ две мале је мала вишег реда.

$\Rightarrow$ $du = \varepsilon \cdot dS \cos\alpha - \varphi dS \cdot \sin\alpha$

$dv = \varepsilon \cdot dS \sin\alpha + \varphi dS \cos\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} du &= \varepsilon \cdot dx - \varphi \cdot dy \\ dv &= \varepsilon \cdot dy + \varphi dx \end{aligned}} \quad (1)$$

по теорији малих деформација

Успоставили смо везу између померања u, v тачке штапа и дилатације ε и φ (угла обртања одговарајуће тангенте.)

Ове релације су линеарне, па се (1) претпоставка зове још и **претпоставка о геометријској линеарности проблема**. (следи из равне деформације)

(у теорији великих деформација ј-не нису линеарне $(1+\varepsilon)dS$ је производ две непознате $\Rightarrow$ нелинеарне ј-не)

$du = \varepsilon \cdot dx - \varphi \cdot dy \quad / \cdot \cos\alpha \qquad / \cdot (-\sin\alpha)$

$dv = \varepsilon \cdot dy + \varphi dx \quad / \cdot \sin\alpha \ (+) \qquad / \cdot (\cos\alpha) \ (+)$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon dS &= du \cos\alpha + dv \sin\alpha \\ \varphi dS &= dv \cdot \cos\alpha - du \cdot \sin\alpha \end{aligned}}$$

Ове релације дефинишу дилатацију и обртање преко компонената померања.

! Дилатација осе штапа је чисто деформацијска величина јер постоји само на оним местима ~~на~~ на којима се оса деформише

Угао обртања ће је φ за који се обрне тангента односно нормала на осу штапа. Он није чисто дефор. величина јер може да постоји и када се елементи не деформише. Величина $d\varphi$ би била чисто деф. вел. јер је промена угла између тангенти у 2 блиским тачкама, која постоји само на местима на којима се деформише штап.

I ДЕФ. ВЕЛИЧИНА

ε - дилатација осе штапа.

ДЕФОРМАЦИЈА ШТАПА

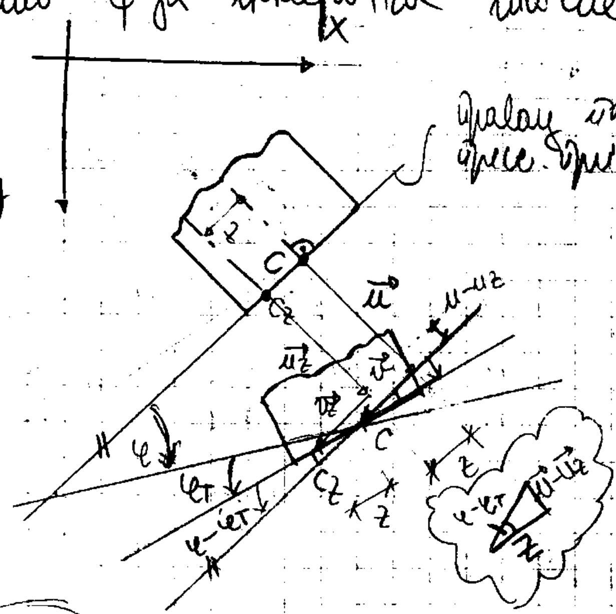
Када говоримо о деформацији штапа полазимо од **БЕРНУЛИЈЕВЕ ПРЕТПОСТАВКЕ** да се попр. пресеци не деформишу, да при деформацији остају равни и управни на деформисану осу штапа. Тиме се тродимензионални проблем своди на једнодимензионални проблем деформације његове осе. Бернулијева хипотеза важи за праве призматичне штапове оптерећене на чисто савијање (савијање моментима)! У случају савијања силама долази до кривљења попр. пресека. Ми прихватамо претпоставку да

ПРЕТПОСТ

пресеци после деформације остају прави али не и управни на деформисану осу штапа већ су ротирани за неки угао γ који се назива **КЛИЗАЊЕ** штапа. Ако је пресек раван нема дилатације дуж пресека.

- Посматрамо део штапа пре и после деформације

При равној деформацији оса штапа и после деформације остаје у равни штапа. Хоћемо да покажемо да се померање тачке на одстојању z од осе може написати као ф-ја померања тачке на оси штапа.



C_z - тачка на одстојању z од тачке C.

Одстојање тачке C_z и после деформације остаје z јер се све тачке које су на ⊥ на раван штапа исто померају, а пресеци остају равни.

$(\varphi-\varphi_T)$ - угао за који се обрне попр. пресек

φ (+) ↻
φ_T (+) ↻

II ДЕФ. ВЕЛИЧИНА

φ_T је угао промене између осе штапа и равни попр. пресека

Са слике, пројектовањем $(\varphi-\varphi_T)$ ⇒

$$\bar{u}_z = \bar{u} - z\cdot\sin(\varphi-\varphi_T)$$

$$\bar{v}_z + z = \bar{v} + z\cos(\varphi-\varphi_T)$$

φ_T - КЛИЗАЊЕ

Пресек се ротирао за φ_T и није више управан на осу.

Угао φ је мали ⇒ (мале дефор.) $\varphi-\varphi_T$ је мали ⇒

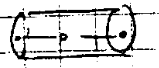
$$\sin(\varphi-\varphi_T) \cong \varphi-\varphi_T \qquad \cos(\varphi-\varphi_T)\approx 1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}_z = \bar{u} - z(\varphi-\varphi_T) \quad *$$

$$\bar{v}_z + z = \bar{v} + z \Rightarrow \boxed{\bar{v}_z = \bar{v}}$$

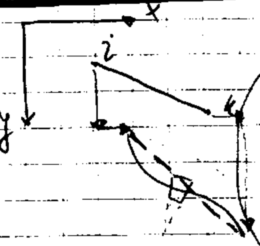
* ПОКАЗАЛИ СМО ДА СЕ ПОМЕРАЊЕ ТАЧКЕ НА ОДСТОЈАЊУ z ОД ОСЕ ШТАПА МОЖЕ НАПИСАТИ ПРЕКО ПОМЕРАЊА ТАЧКЕ НА ОСИ ШТАПА.

Увођењем равног штапа и равне деформације свели смо тродимензионални модел на линију.



ЗАКЉУЧАК

Померања свих тачака на одстојању z од осе могу се одредити преко тачака које леже на оси.



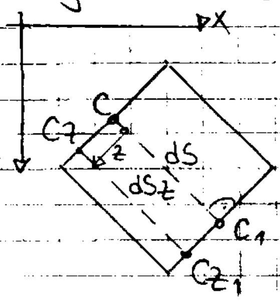
код равног штапа $\kappa=0$ ($\rho=\infty$) а после деформације штап се искриви и имамо ρ.

Чисто деформацијске величине:

ε - дилатација и φ_T - клизање.

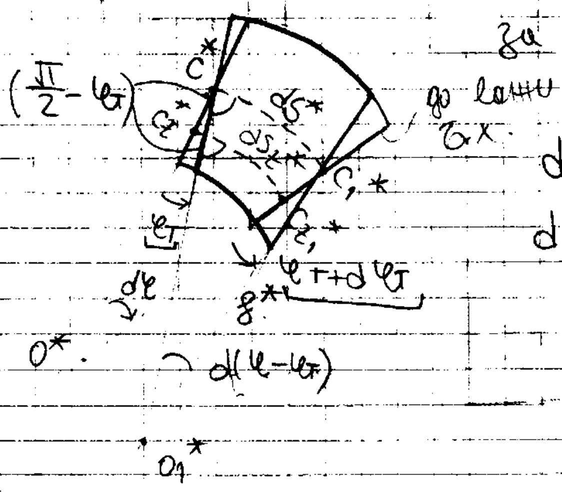
ε показује дилатацију осе штапа а φ_T колико се пресеци обрну.

Посматрамо сада запремински елемент штапа између два ∞ блиска поп. пресека у тачкама C и C_1. Потребна нам је дилатација еквидистантног елемента на одстојању z од осе штапа.



$dS = dS_z$

- Штап трпи деформацију и криви се, CC_z није $\parallel C_1C_{1z}$
- поп. пресеци се ротирају за φ_T и $\varphi_T + d\varphi_T$



$$dS^* = (1+\varepsilon)dS$$

$$dS_z^* = (1+\varepsilon_z)dS$$

$\rho^* = O_1^* - C_1^*$

$C_1^* - C_z^* = z \Leftarrow$ пресеци остају равни јер нема ε дуж попр. пресека.

Синусна теорема: (односи страница и наспрамних sin углова у једном Δ су исти.)

$\Delta C^* O^* C_1^*$ $$\frac{dS^*}{\sin d(\varphi-\varphi_T)} = \frac{\rho^*}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_T\right)}$$

$\Delta C_z^* O_1^* C_{z1}^*$

$$\frac{dS_z^*}{\sin d(\varphi-\varphi_T)} = \frac{(\rho^*-z)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_T\right)}$$

ОСНОВНЕ ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА

ε - дилатација осе штапа

φ_T - угао промене између осе штапа и равни поп. пресека

κ - промена ∢ између 2 ∞ блиска поп. пресека

$$dS^* \cos\varphi_T = \rho^* \sin d(\varphi-\varphi_T)$$
$$dS_z^* \cos\varphi_T = (\rho^*-z)\sin d(\varphi-\varphi_T)$$

$$dS_z^* \cancel{\cos\varphi_T}^{1} = dS^* \cos\varphi_T - z\cdot\sin d(\varphi-\varphi_T)$$

$(\cos\varphi_T \approx 1)$

$$(1+\varepsilon_z)dS = (1+\varepsilon)dS - z\, d(\varphi-\varphi_T) \quad / : dS$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon - z\cdot\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{dS}$$

κ је угао промене између ∞ блиских пресека.

$$\boxed{\kappa = -\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{dS}}$$

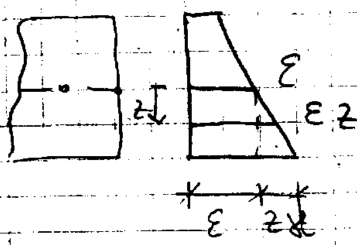
ПРОМЕНА КРИВИНЕ ШТАПА

II ДЕФ. ВЕЛИЧИНА ЕЛЕМЕНТА ШТАПА

κ - промена угла између два ∞ блиска поп. пресека. (Специфична промена ∢ по дужини штапа)

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon + z\cdot\kappa}$$

ЗАКЉУЧАК: Показали смо да ће код правог штапа дилатација по висини штапа бити линеарна. Дилатације су линеарно распоређене по висини поп. пресека



! код правих штапова.

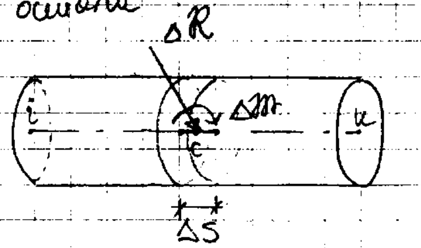
Увели смо трећу деформацијску величину: промену кривине. Три величине ! $\varepsilon, \gamma, \kappa$ дефинишу деформацију овог штапа, и називају се **основне деформацијске величине**.

· СПОЉАШЊЕ СИЛЕ ШТАПА ·

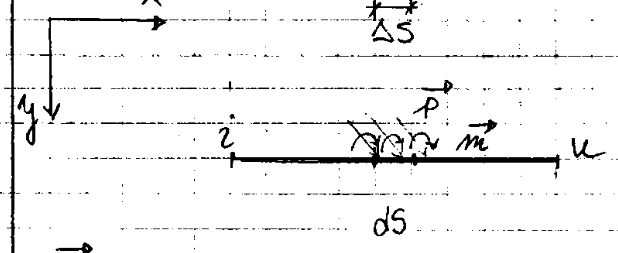
На свако тело делују спољашње силе које могу бити површинске и запреминске. Као последица деловања спољашњих сила јављају се напони у унутрашњости штапа.

ОГРАНИЧЕЊЕ → Оптерећење мора да трпи нека ограничења: може да делује само у равни штапа не ⊥ на њу.

да би деформација остала равна



- Призмон је део штапа ik између две равни на одстојању ΔS дуж осе штапа.



$$\vec{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta s}$$ СПЕЦИФИЧНА РАСПОДЕЉЕНА СИЛА

$$\vec{m} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta s}$$ СПЕЦИФИЧНО РАСПОДЕЉЕНИ МОМЕНАТ.

$\Delta \vec{R}$ - редукциона резултанта
$\Delta \vec{M}$ - редукциони моменат

} сил. опт. које делују на ΔS редуковали смо на C унутар ΔS

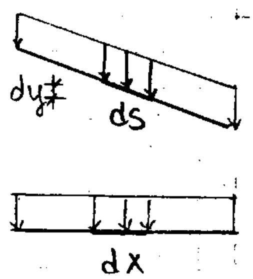
! $\vec{p}$ и $\vec{m}$ морају да делују у равни штапа да би деформација остала равна.

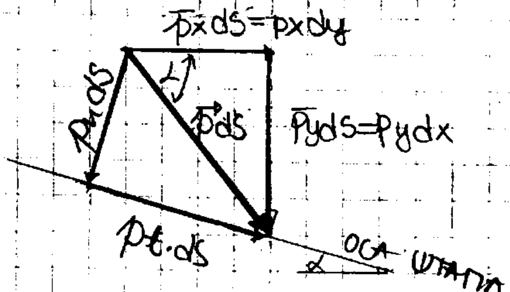
Ако су интензитети $\vec{p}$ и $\vec{m}$ велики на кратком делу осе штапа замењујемо их концентрисаним силама и концентрисаним моментима $\vec{F}$ и $\vec{M}$.

Моменти $\vec{m}$ су често или једнаки нули или врло мали тако да се могу занемарити.

Сопствена тежина је расподељено оптерећење $\gamma \cdot V$

• Расподељено оптерећење можемо изразити по јединици дужине и пројекције.





Пројекција на x-осу:

$\bar{p}_x ds = p_x \cdot dy = p_t ds \cos\alpha - p_n ds \sin\alpha$

Пројекција на y-осу:

$\bar{p}_y ds = p_y dx = p_t ds \sin\alpha + p_n ds \cos\alpha$

$dx = ds \cdot \cos\alpha$ $dy = ds \sin\alpha$

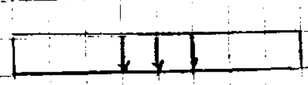
$\bar{p}_x = p_x \sin\alpha = p_t \cos\alpha - p_n \sin\alpha$

$\bar{p}_y = p_y \cos\alpha = p_t \sin\alpha + p_n \cos\alpha$

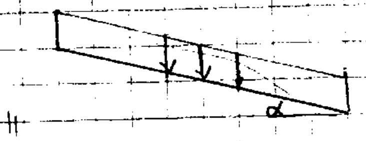
p_n, p_t - природне компоненте специфичног оптерећења по јединици осе штапа.

$\bar{p}_x, \bar{p}_y$ - сп. оп. у правцу координатних оса по јединици дужине осе штапа

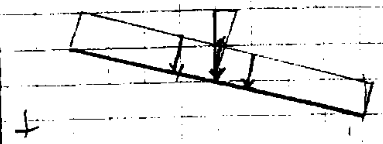
p_x, p_y - сп. оп. у правцу координатних оса по јединици дужине тих оса.



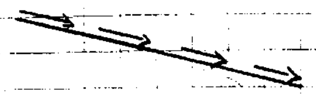
p по пројекцији



$p \cdot \cos\alpha$

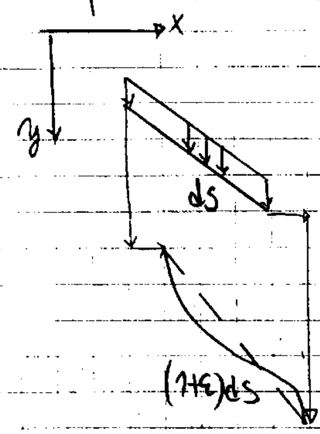


$p_n = p \cdot \cos\alpha^2$



$p_t = p \cos\alpha \sin\alpha$

• Оптерећење се при деформацији помера са штапом. (нису конзерв)



p по јединици дужине.

Резултанта после деформације мора остати иста а дужина се променила па се мења интензитет оптерећења ($ds \to (1+\varepsilon)ds$). Гравитационо оптерећење и после деформације остаје вертикално.

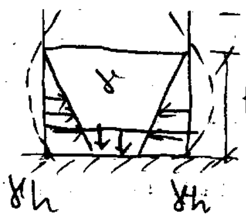
• Постоје две врсте оптерећења:

1) конзервативно 2) неконзервативно

Конзервативно оптерећење при деформацији не мењају ни величину ни правац. Рад при деформацији не зависи од путање већ само од почетног и крајњег положаја (пр. гравитационо оптерећење).

Неконзервативно оптерећење је оно које при деформацији не мења величину али мења правац. пр. хидростатички притисак.

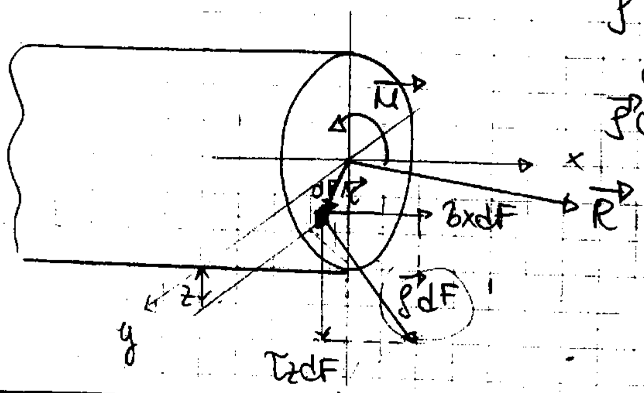
пр:



смер се мења јер хидростатички притисак увек има правац $\perp$ на зид суда.

Напомена: због промене дужине и правца осе штапа след. опт. по јединици дужине осе деформисаног штапа и компоненте у правцу $\vec{t}$ и $\vec{n}$ на дефор. осу мењају и величину и правац и тада спољашње силе то не раде.

УНУТРАШЊЕ СИЛЕ



$\vec{\rho}$ - тотални напон на елементарној површини dF.

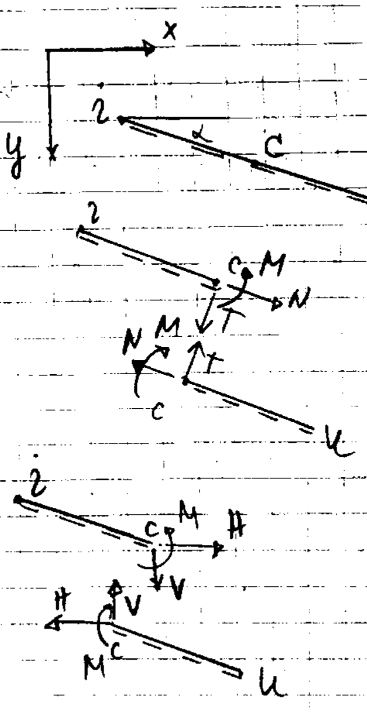
$\vec{\rho}dF$ - елементарна унутрашња сила.

Редукцијом $\vec{\rho}dF$ на T тежишта пресека добијамо $\vec{R}$ и $\vec{M}$.

$$\boxed{\vec{R}=\int_F \vec{\rho}\,dF \qquad \vec{M}=\int_F (\vec{r}\times\vec{\rho})\,dF}$$

- $N=\int_F \sigma_z\,dF$ НОРМАЛНА СИЛА (компонента резултанте унутрашњих сила у пресеку у правцу $\vec{n}$ на и.)
- $T=\int_F \tau_z\,dF$ СИЛА ДУЖ ПРЕСЕКА (компонента резул. унут. сила у пресеку у равни тог пресека).
- $M=\int_F \sigma_z z\,dF$ МОМЕНАТ.

Унутрашње силе замишљамо ~~према~~ ~~као~~ површинске силе које се преносе преко замишљених пресека у телу а изражавамо их преко напона.



$N \oplus$ - ЗАТЕЗАЊЕ

$T \oplus$ - ВРТИ

$M \oplus$ - ЗАТЕЖЕ ДОЊУ СТРАНУ

$$\boxed{\begin{aligned} N &= H\cos\alpha + V\sin\alpha \\ T &= V\cos\alpha - H\sin\alpha \end{aligned}}$$

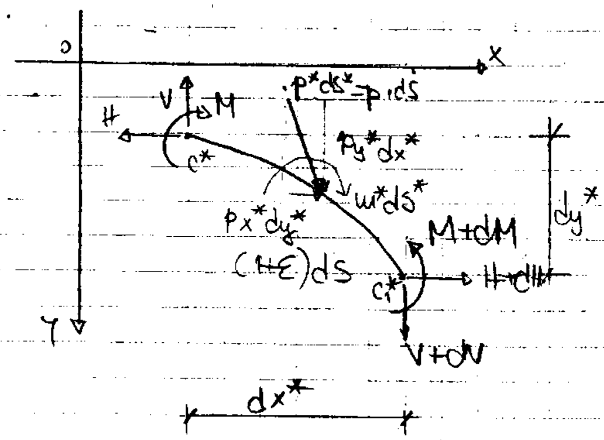
$$\boxed{\begin{aligned} H &= N\cos\alpha - T\sin\alpha \\ V &= T\cos\alpha + N\sin\alpha \end{aligned}}$$

Унутрашње силе представљају међусобни утицај делова штапа лево и десно од т, те су силе које наводу десни део једнаке и супротног смера у односу на оне које наводу леви део.

• УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА •

У Статици конст. претпостављамо да су померања тачака при деформацији штапа постепена, тако да убрзања практично не постоје. Коначна равнотежа се успоставља тек када се деформација заврши и када штап пређе у стање мировања. Што значи да услове равнотеже постављамо на деформисаној оси греде.

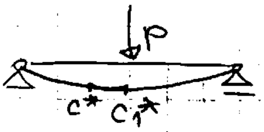
Посматрамо део штапа, који је оптерећен спољашњим силама услед којих се јављају напони. Посматрамо део dS.



$$dS^* = (1+\varepsilon)\,dS$$
$$dx^* = dx + du$$
$$dy^* = dy + dv$$

*Пресечне силе смо ми дефинисали да би могли да вршимо прорачун. У телу се, реално, јављају само напони. (Ми напоне пребацимо у пресечне силе, димензионишемо пресек па "вратимо" напоне.)

<u>У датом тренутку мора постојати равнотежа спољашњих и унутрашњих сила</u> (и оне се постепено повећавају од нуле до коначне вредности). <u>Деформације су такође постепене.</u> На делу cc_1 се успоставила равнотежа спољашњих и унутрашњих сила после деформације.



Наше оптерећење неће после деформације променити своју величину

$m^* ds^* = m ds$

јер оптерећење не мења интензитет.

сума сила у $x \Rightarrow \quad dH + p_x^* dy^* = 0$

сума сила у $y \Rightarrow \quad dV + p_y^* dx^* = 0$

сума M око $c_1 \Rightarrow \quad dM - V dx^* + H dy^* - m^* ds^* = 0$

$p_y^* dx^* \cdot \frac{dx^*}{2} = 0$ (мала вишег реда).

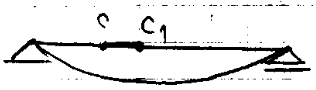
$$dH + p_x dy = 0$$
$$dV + p_y dx = 0$$
$$dM - V(dx + du) + H(dy + dv) - m ds = 0$$

У овим ј-нама се јавља производ две непознате што их чини нелинеарним.

Уводимо следеће претпоставке:

(2) Како су померања тачака у односу на димензије штапа редовно мале величине то често померања нападних тачака спољашњих и унутрашњих сила у условима равнотеже могу да се занемаре. Претпоставили смо да спољашње силе непосредно са унутрашњим силама стоје у равнотежи на недеформисаном штапу. (Претпоставка о малим деформацијама).

Последица ове претпоставке је да се услови равнотеже сводe на недеформисаном делу.



Занемарили смо деформацију овог штапа: ($du, dv=0$)

$$\boxed{\begin{aligned} &dH + p_x dy = 0 \\ &dV + p_y dx = 0 \\ &dM - V dx + H dy - m ds = 0 \end{aligned}}$$

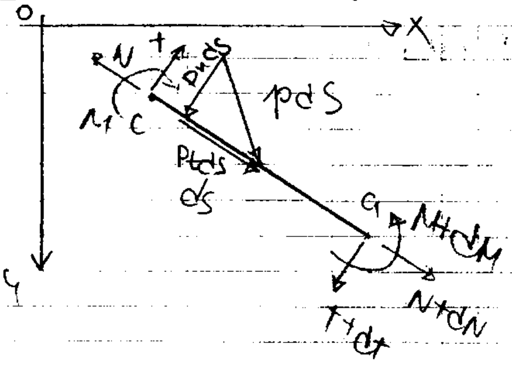
УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА

*линеарне ј-не

Претпоставка да се услови равнотеже постављају на недеформисаној конфигурацији се још зове и **ПРЕТПОСТАВКА СТАТИЧКЕ ЛИНЕАРНОСТИ**, и представља

(2) **ОСНОВНУ ТЕОРЕМУ СТАТИКЕ КОНСТРУКЦИЈА**.

⇒



(1) $\Sigma X=0 \Rightarrow dN + p_t ds = 0$

(2) $\Sigma Y=0 \Rightarrow dT + p_n ds = 0$

(3) $\Sigma M_{C_1}=0 \Rightarrow dM - T ds = 0$

($\frac{p_n ds^2}{2} = 0$ мала вишег реда)

Претпоставком о малим померањима се у геометрији сила занемарују линеарни чланови померања у односу на димензије. Као последицу имамо линеарност услова равнотеже.

Претпоставком о малим деформацијама се у геометрији деформација занемарују квадрати и виши степени померања (и њихових извода) у односу на линеарне чланове померања. Као последицу имамо линеарност веза деформацијских величина и померања.

Обе ~~теорије~~ претпоставке чине ТЕОРИЈУ I РЕДА, а само претпоставка о малим деф. ТЕОРИЈУ II РЕДА.

ВЕЗА ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ВЕЛИЧИНА, СИЛА У ПРЕСЕКУ И ТЕМПЕРАТУРЕ.

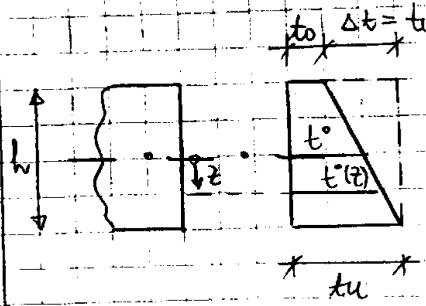
Уводимо одређену претпоставку о физичком понашању материјала. Постављамо најједноставнији модел - Хуково тело. **(еластичан материјал)**

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha_t \cdot t^\circ(z) \qquad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad \text{- напони у штапу.}$$

$t^\circ(z)$ - **температурна промена** на одстојању z од осе штапа.

t° - температура осе штапа.

• Промена температуре по висини попр. прес.



$\Delta t = t_u - t_o$ **ТЕМПЕРАТУРНА РАЗЛИКА**

$$t^\circ(z) = t^\circ + z\frac{\Delta t}{h}$$

$$\Downarrow$$

ΔT по висини поп. пресека је линеарна.

$$\sigma_z = E\varepsilon_z - E\alpha_t t^\circ(z) \qquad (\varepsilon_z = \varepsilon + z\cdot\kappa)$$

$$= E(\varepsilon + z\cdot\kappa) - E\alpha_t\left(t^\circ + z\frac{\Delta t}{h}\right)$$

$$\sigma_z = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ) + E\cdot z\left(\kappa - \alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h}\right)$$

Силе у пресеку:

$$N = \int_F \sigma_z dF = \underbrace{E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)}_{\text{const у односу на } F}\cdot\int_F dF + \cancel{E\left(\kappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)}^{0}\cdot\underbrace{\int_F z\,dF}_{S_y = 0}$$

$$M = \int_F \sigma_z\cdot z\,dF = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)\int_F z\,dF + E\left(\kappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)\cdot\int_F z^2 dF$$

$$F = \int_F dF \qquad \int_F z\,dF = 0 \qquad \int_F z^2 dF = I$$

$$\Rightarrow N = E\cdot F(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)$$

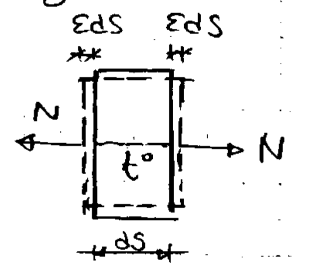
$$M = E\cdot I\left(\kappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)$$

$$\boxed{\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t\cdot\frac{\Delta t}{h} \qquad \varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t\cdot t^\circ}$$

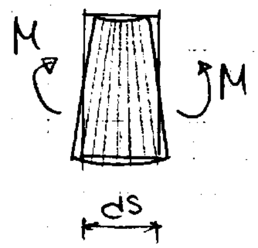
EF - аксијална крутост (крутост на истезање)

EI - крутост на савијање.

• Физички смисао:



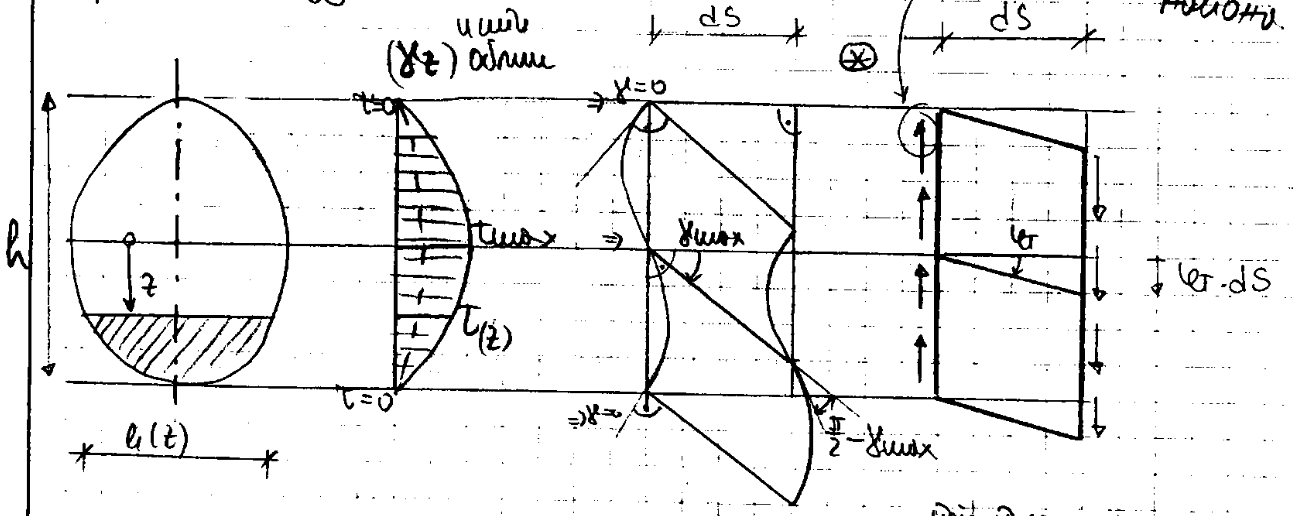
температура производи исти ефекат као и затезање N. (температурна разлика производи исти ефекат).



повећање промене температуре ($\Delta t > 0$) ће затезати доње влакно ($t_u > t_o$) па ће се више издужити.

Тражимо везу φ_T и T.

усвојимо ову расподелу напона



$$\tau_z = \frac{T\cdot S(z)^*}{I\cdot b(z)} \qquad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} = \frac{T\cdot S(z)^*}{G I\, b(z)}$$

поп. пресеци остају равни и ротирани за φ_T.

Право интегрирање п.п. је сложено, а ми користимо претпоставку да п.п. остају равни.
Напоне смицања усвојимо да су const по висини п.пр.

⊛, стварну расподелу напона γ заменимо $\gamma'(z)$ тако да је $\gamma'(z)ds(z) = const$ п.п. остају равни и смицаји за величину $\gamma'(z)\,dS(z) = \varphi_T \cdot dS$.

$\gamma \to \gamma'$

Угао φ_T налазимо из услова да је рад напона смицања $\tau(z)$ при стварној расподели клизања буде једнак раду тих напона $(\tau = const)$ при претпостављеној расподели клизања.

$$dA = \int_F \gamma_z \cdot \tau_z \cdot dS\,dF \qquad \text{рад } \tau_z dS \text{ на } \gamma_z.$$

$$dA = \int_F \frac{\tau_z^2}{G_1}\,dS\,dF = dS\,\frac{T^2}{GF} \cdot \underbrace{\frac{F}{I^2}\int_F \left(\frac{S_z}{b(z)}\right)^2 dF}_{k}$$

$$\boxed{K = \frac{F}{I^2} \cdot \int_F \left(\frac{S_z}{b(z)}\right)^2 dF}$$

КОЕФИЦИЈЕНТ КОЈИ ЗАВИСИ ОД ОБЛИКА ПОП. ПРЕСЕКА

$$\hookrightarrow \quad dA = \frac{T^2}{GF} \cdot k \cdot dS$$

рад стварних напона τdS на стварним клизањима.

Рачунамо рад τdS на претпостављеној расподели.

$$d\bar{A} = \int_F \tau_z \varphi_T\,dS\,dF$$

$$d\bar{A} = \varphi_T \cdot dS \int_F \tau_z\,dF$$

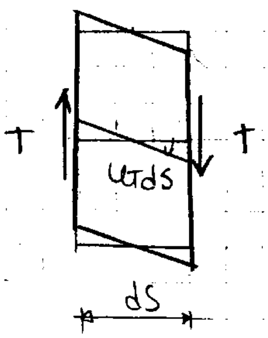
$$d\bar{A} = \varphi_T \cdot T \cdot dS$$

$$dA = d\bar{A} \Rightarrow \frac{T^{\cancel{2}}}{GF} \cdot k \cdot \cancel{dS} = \varphi_T \cdot \cancel{T}\,\cancel{dS}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_T = \frac{T \cdot K}{GF}}$$

УГАО ПРОМЕНЕ ИЗМЕЂУ ОСЕ И РАВНИ П.П.

физички смисао:



GF – крутост на смицање.

Добили смо 3 линеарне јне:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^{\circ} \\ \kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \\ \gamma_T &= \frac{T \cdot k}{GF} \end{aligned}}$$

Дају везу између основних деформацијских величина и померања и тетера.

Оне су линеарне захваљујући Хуковом закону из кога су изведене (лин. веза σ и ε.) Ову претпоставку исказану Хуковим законом називамо **претпоставка о физичкој линеарности проблема** или **③ основна претпоставка о теорији конструкција.**

РЕКАПИТУЛАЦИЈА Ј-НА И ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ТЕОРИЈЕ САВИЈАЊА ШТАПА У РАВНИ.

I ВЕЗА $\varepsilon, \kappa, \varphi_T$ и u, v, φ

$$\boxed{\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy \\ dv &= \varphi dx + \varepsilon dy \\ d(\varphi - \varphi_T) &= -\kappa \cdot ds \end{aligned}}$$

П.М.Д.
П.Г.Л.П.

оне су линеарне због претпоставке о малим деформацијама или геометријске линеарности проблема.

II ВЕЗА N, T, M и p_n, p_t.

$$\boxed{\begin{aligned} dN + p_t \cdot ds &= 0 \\ dT + p_n \cdot ds &= 0 \\ dM - T \cdot ds &= 0 \end{aligned}}$$

П.С.Л

оне су линеарне због претпоставке о статичкој линеарности проблема.

III ВЕЗА $\varepsilon, \kappa, \varphi_T$ и N, M, T

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ \\ \kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \\ \varphi_T &= k \cdot \frac{T}{GF} \end{aligned}}$$

П.Ф.Л.

оне су линеарне због претпоставке о <u>физичкој линеарности</u>.

Имамо 9 ј-на са 9 непознатих
$(u, v, \varphi, N, T, M, \varepsilon, \varkappa, \gamma)$

Ако $\varepsilon, \varkappa, \gamma \rightarrow$ у I ј-не добијамо 6 ј-на са 6 непознатих, (u, v, φ, N, M, T).

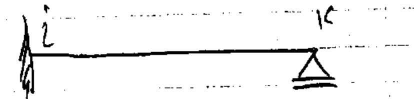
Позната нам је геометрија и карактеристике поп. пр. штапа и оптерећење а добијемо 6 диференцијалних ј-на.

Требају нам **ГРАНИЧНИ УСЛОВИ**.
Могу бити:
- по силама (3)
- по померањима (min 3, max 6)

Ако имамо 3 гранична услова по силама и 3 по померањима штап је **СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕН**, или је проблем решавања сила у пресеку статички одређен.

$\boxed{M_i = 0}$	$\boxed{M_k = 0}$
$u_i = 0$	$v_k = 0$
$v_i = 0$	$\boxed{N_k = 0}$

Када је број граничних услова по силама мањи од 3 а гр. услова по померањима већи од 3 штап је **СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕН**.

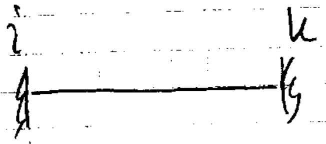


$M_i = 0$ $\boxed{M_k = 0}$

$V_i = 0$ $\boxed{N_k = 0}$

$\varphi_i = 0$ $V_k = 0$

2



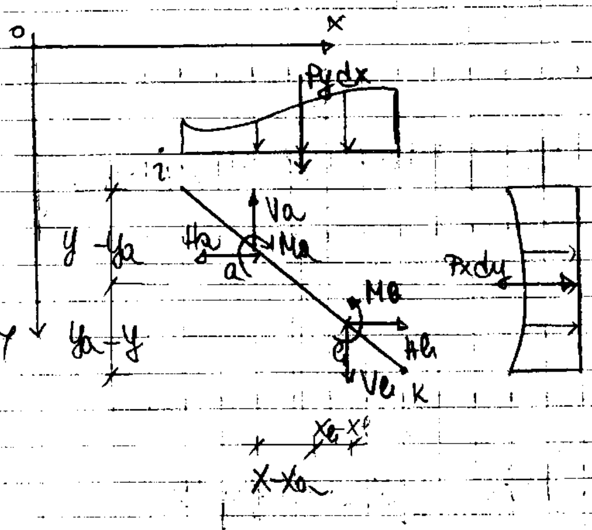
$M_i = 0$ $M_k = 0$

$V_i = 0$ $V_k = 0$

$\varphi_i = 0$ $\varphi_k = 0$

Ако имамо статички одређен носач можемо решити сис. ј-на II, тј. услове равнотеже, а ако је ст. неодређен морамо прво наћи померања па решавати II.

ИНТЕГРАЛИ УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА.



Цео проблем услова равнотеже смо свели на 6 диференцијалних ј-на са 6 непознатих.

$$dH + p_x dy = 0$$
$$dV + p_y dx = 0$$
$$dM - V dx + H dy = 0$$

Извршимо интеграцију од тачке a до тачке b.

$$(1)\quad H_b - H_a + \int_a^b p_x dy = 0$$

$$(2)\quad V_b - V_a + \int_a^b p_y dx = 0$$

$$(3)\quad M_b - M_a + \int_a^b H dy - \int_a^b V dx = 0$$

према y_b: $dH + p_x dy = 0 \quad / \cdot (y_b - y)$

$$\underbrace{\int_a^b (y_b - y)\, dH}_{} + \int_a^b (y_b - y)\, p_x\, dy = 0$$

парцијално интег.

$$\int_a^b (y_b - y)\, dH = \begin{vmatrix} u = y_b - y \Rightarrow du = -dy \\ dv = dH \Rightarrow v = H \end{vmatrix} =$$

$$(y_b - y) \cdot H \Big|_a^b - \int_a^b H \cdot d(y_b - y) = -(y_b - y_a) H_a + \int_a^b H\, dy$$

$$\Rightarrow -(y_b - y_a) H_a + \int_a^b H dy + \int_a^b (y_b - y)\, p_x\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b H dy = (y_b - y_a) H_a - \int_a^b (y_b - y)\, p_x\, dy}$$

према y_a: $dH + p_x dy = 0 \quad / \cdot (y - y_a)$

исти поступак $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b H dy = (y_b - y_a) H_b + \int_a^b (y - y_a)\, p_x\, dy}$

$\longrightarrow$ $dV + p_y dx = 0 \quad / \cdot (x_b - x)$ интегралимо од a до b

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b V dx = (x_b - x_a) V_a - \int_a^b (x_b - x)\, p_y\, dx}$$

$\longrightarrow$ $dV + p_y dx = 0 \quad / (x - x_a)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b V dx = (x_b - x_a) V_b + \int_a^b (x - x_a)\, p_y\, dx}$$

Ако ове јне уврстимо у (3) услов равнотеже

према y_b $\Rightarrow$ $M_b - M_a + (y_b - y_a) H_a - \int_a^b (y_b - y)\, p_x\, dy - (x_b - x_a) V_a + \int_a^b (x_b - x)\, p_y\, dx = 0$

преко y_c: $M_b - M_a + (y_b - y_c)H_b + \int_a^b (y - y_b) p_x dy - (x_b - x_a)V_b - \int_a^b (x - x_a) p_y dx = 0$

Добили смо суму сила око тачке (a) и (b)

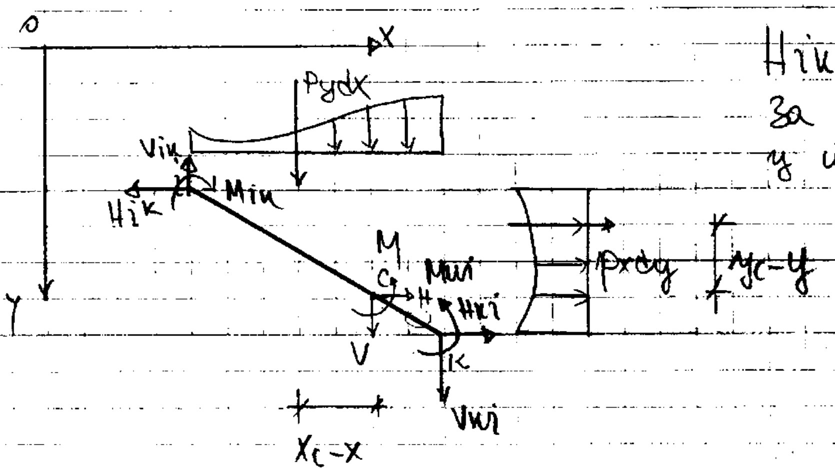
око b: $$\boxed{M_b - M_a + (y_b - y_a)H_a - \int_a^b (y_b - y) p_x dy - (x_b - x_a)V_a + \int_a^b (x_b - x) p_y dx = 0}$$

око a: $$\boxed{M_b - M_a + (y_b - y_a)H_b + \int_a^b (y - y_a) p_x dy - (x_b - x_a)V_b - \int_a^b (x - x_a) p_y dx = 0}$$

★ СТАТИЧКО ЗНАЧЕЊЕ

⇒ Интеграли услова равнотеже елемента штапа између два попр. пресека штапа су услови равнотеже дела штапа између тих пресека.

део → део штапа



Hik – сила која је везана за штап ik и делује у тачки i (први индекс)

гледамо овај део штапа на њега редукујемо

a → i   b → c | a → c   b → k

$$H = H_{ik} - \int_i^c p_x dy \qquad H = H_{ki} - \int_c^k p_x dy$$

$$V = V_{ik} - \int_i^c p_y dx \qquad V = V_{ki} - \int_c^k p_y dx$$

или у функцији попр. пресека

$$M = M_{ik} - (y_c - y_i)H_{ik} + (x_c - x_i)V_{ik} + \int_i^c p_x dy (y_c - y) - \int_i^c p_y (x_c - x) dx$$

$$M = M_{ki} + (y_k - y_c)H_{ki} - (x_k - x_c)V_{ki} + \int_c^k p_x (y - y_c) dy + \int_c^k (x - x_c) p_y dx$$

Могуће је срачунати силе у пресеку штапа H, V, M ако су познате силе Hik, Vik, Mik на i-том крају штапа, или Hki, Vki, Mki на k-том делу штапа.

Ако су сопрег оптерећени дуж осе штапа p_x, p_y познате и силе у једном поп. пресеку могу се срачунати силе у произвољном попр. пресеку.

- **Равнотежно стање штапа је потпуно одређено када су попрег оптерећења дуж осе штапа познате још и силе у једном поп. пресеку.**

Силе на једном или другом крају штапа су гранични услови по силама.

Није нужно познавати силе на једном или другом крају штапа, већ само неку линеарну комбинацију ових сила.

Уводимо 3 линеарно независне статичке величине које су нека комбинација сила на крајевима штапа (или компоненте сила у одређеним т.т.)

СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА

(1) $X_1 = X_1(H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}, H_{ik}, V_{ik}, M_{ik})$

(2) $X_2 = X_2(H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}, H_{ik}, V_{ik}, M_{ik})$

(3) $X_3 = X_3(H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}, H_{ik}, V_{ik}, M_{ik})$

Силе X_1, X_2, X_3 заједно са условима штапа под круто тело у равни дају нам 6 ј-на.

(i-k)

услови равнотеже штапа као крутог тела

(4) $H_{ki} - H_{ik} + \int_i^k p_x\,dy = 0$

(5) $V_{ki} - V_{ik} + \int_i^k p_y\,dx = 0$

(6) $M_{ki} - M_{ik} + H_{ik}(y_k - y_i) - V_{ik}(x_k - x_i) - \int_i^k p_x(y_k - y)\,dy + \int_i^k p_y(x_k - x)\,dx = 0$

моменти оптерећења $p_y dx$ ($p_x dy$) о односу на k

Овако уведене статички независне величине ком броју 6 ј-на у којима су непознате силе на пројекцијама штапа (што одговара силама у дело том ч.ч.) $H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}$. Када њих решавамо добијамо силе изражене у ф-ји од X_1, X_2, X_3.

Силе у произвољном п.п. можемо изразити преко 3 произвољно изабране статичке величине. (применом принципа суперпозиције).

ОПШТИ ИЗРАЗИ ЗА СИЛЕ У ПРЕСЕКУ

$$H = H_0 + H_1X_1 + H_2X_2 + H_3X_3 = H_0 + \sum_{i=1}^{3} X_i H_i$$

$$V = V_0 + V_1X_1 + V_2X_2 + V_3X_3 = V_0 + \sum_{i=1}^{3} V_i X_i$$

$$M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 = M_0 + \sum_{i=1}^{3} M_i X_i$$

$$N = N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 = N_0 + \sum_{i=1}^{3} N_i X_i$$

$$T = T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 = T_0 + \sum_{i=1}^{3} T_i X_i$$

→ H_0, V_0, M_0, N_0, T_0 су силе у пресеку штапа услед датог оптерећења P_x, P_y када су све статички независне величине штапа једнаке нули $X_k = 0$ $k=1,2,3$.

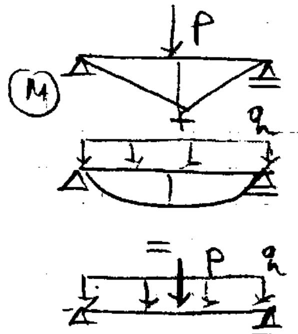
H_0, V_0, M_0 силе у пресецима када постоји P_x и P_y оптерећење а $X_i = 0$ $i=1,2,3$, силе СТАЊА $\boxed{X_i = 0}$

H_i, V_i, M_i, N_i, V_i су силе у штапу када је $P_x = P_y = 0$ и када је $X_i = 1$ а $X_k = 0$ $i \neq k$

Силе $H_i, \dots V_i$ зовемо силе СТАЊА $\boxed{X_i = 1}$

$H_3, \dots V_3$ су силе у пресецима када је $X_3 = 1$ а $X_1 = X_2 = 0$.

Све ј-не су линеарне па важи принцип суперпозиције (могуће је само у линеарној теорији.)

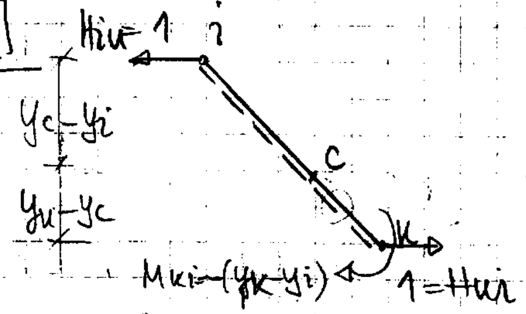


пр1 Претпоставимо да су статички независне величине: $X_1 = H_{ik}$ $X_2 = V_{ik}$ $X_3 = M_{ik}$

Стање $\boxed{X_1 = 1}$

$H_{ik} = X_1$

$X_2 = X_3 = 0$



$H_1 = 1$

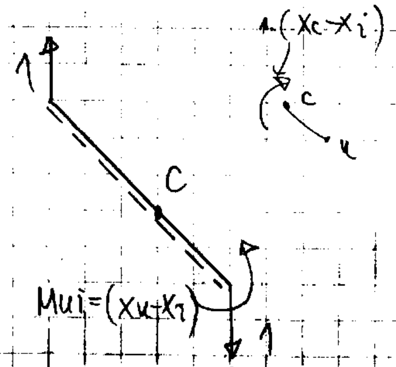
$V_1 = 0$

$M_1 = -(y_c - y_i)$

Стање $\boxed{X_2 = 1}$

$V_{ik} = 1$

$X_1 = X_3 = 0$



$H_2 = 0$

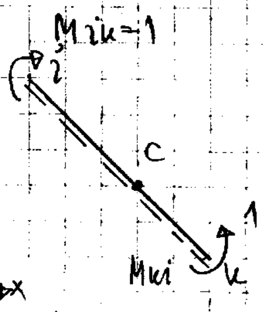
$V_2 = 1$

$M_2 = (x_c - x_i)$

Стање $\boxed{X_3 = 1}$

$M_{ik} = 1$

$X_1 = X_2 = 0$



$H_3 = 0$

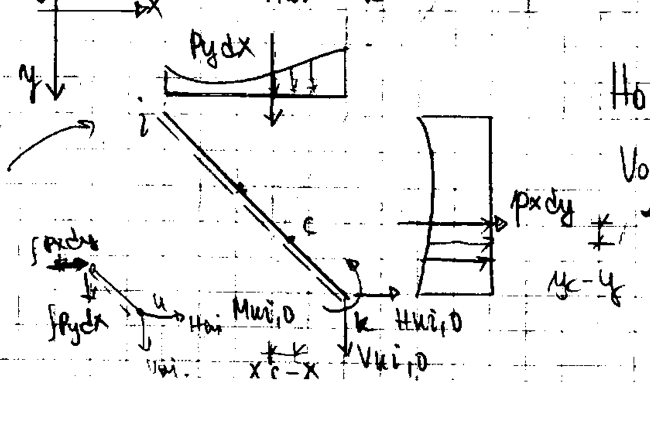
$V_3 = 0$

$M_3 = 1$

Стање $\boxed{X_i = 0}$

$H_{ik} = V_{ik} = M_{ik} = 0$

$p_x, p_y \neq 0$



$H_0 = -\int_i^c p_x\,dy$

$V_0 = -\int_i^c p_y\,dx$

$M_0 = \int_i^c p_x (y_c - y)\,dy - \int_i^c p_y (x_c - x)\,dx$

$$\underset{X_1 H_1}{H} = H_{ik} - \underbrace{\int_i^c p_x\,dy}_{H_0}$$

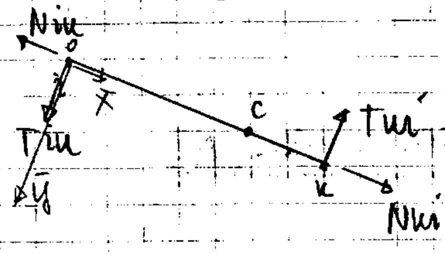
$$\underset{X_2 V_2}{V} = V_{ik} - \underbrace{\int_i^c p_y\,dx}_{V_0}$$

$$\underset{X_3 M_3}{M} = M_{ik} + \underbrace{\int_i^c p_x(y_c - y)\,dy - \int_i^c p_y(x_c - x)\,dx}_{M_0} \underbrace{-(y_c - y_i)H_{ik}}_{M_1 \cdot X_1} + \underbrace{(x_c - x_i)V_{ik}}_{M_2 X_2}$$

Op.2 $X_1 = \dfrac{N_{ik}+N_{ki}}{2} = S_{ik}$ (аксијална сила штапа)

$X_2 = M_{ik}$

$X_3 = M_{ki}$

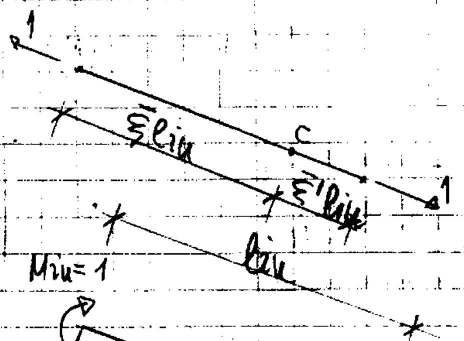


⊕ усвојени смо координ. сис. $\bar{x}O\bar{y}$

Стање $\boxed{X_1 = 1}$

$N_{ik}+N_{ki} = 2$

$M_{ik} = M_{ki} = 0$



$N_1 = 1$

$T_1 = 0$

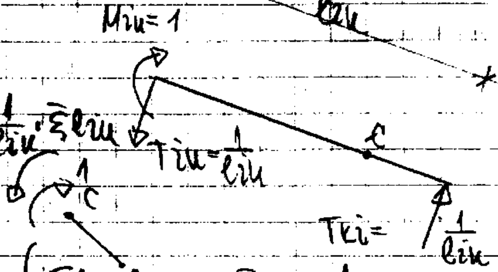
$M_1 = 0$

Стање $\boxed{X_2 = 1}$

$M_{ik} = 1$

$N_{ik}+N_{ki} = 0$

$M_{ki} = 0$



$\left(\sum M_c^{\curvearrowright} = 1 - \xi l_{ik}\cdot\frac{1}{l_{ik}} = 1 - \xi = \xi'\right)$

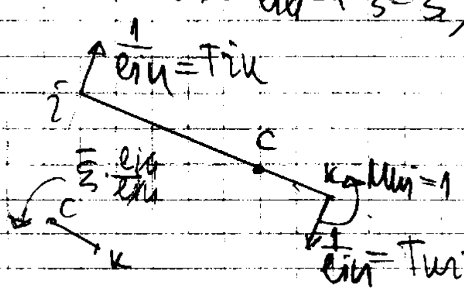
$N_2 = 0$

$T_2 = -\dfrac{1}{l_{ik}}$

$M_2 = \xi'$

Стање $\boxed{X_3 = 1}$

$M_{ki} = 1$



$N_3 = 0$

$T_3 = +\dfrac{1}{l_{ik}}$

$M_3 = \xi$

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^{3} N_i X_i = N_0 + S_{ik}$$

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^{3} T_i X_i = -\frac{M_{ik}}{l_{ik}} + \frac{M_{ki}}{l_{ik}} + T_0$$

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^{3} M_i X_i = M_0 + \bar{\xi}' \cdot M_{ik} + \bar{\xi} M_{ki}$$

Силе у пресеку преко изабраних статички независних величина и T_0, M_0, N_0 од оптерећења

* често користимо за статички независне M_{ik}, M_{ki} и $\frac{N_{ki}+N_{ik}}{2} = S_{ik}$

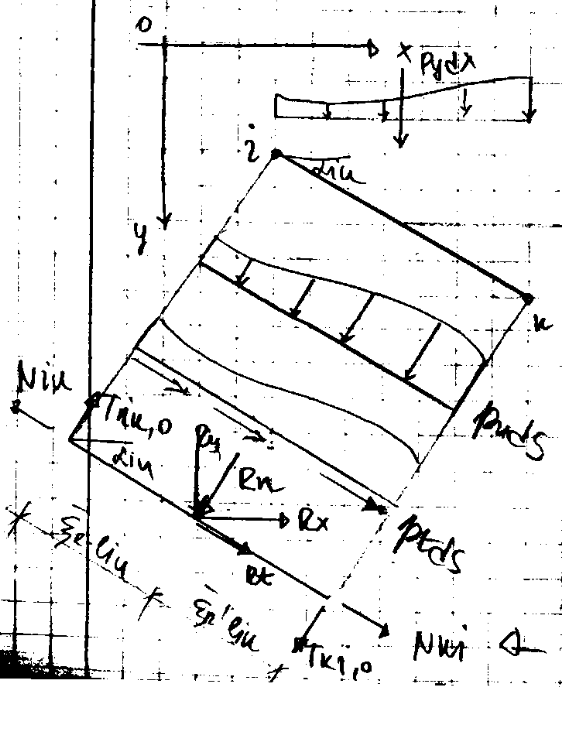
Матрични приказ

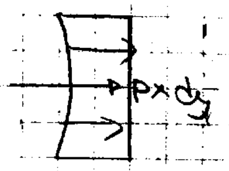
$$S = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} \quad S_0 = \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{S = L \cdot X + S_0} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ik} & 1/l_{ik} \\ 0 & \bar{\xi}' & \bar{\xi} \end{bmatrix}$$

$\boxed{X_i = 0}$ стање

успостављамо везу сила у пресеку и статички независних.





$$R_x = \int_i^k p_x \, dy$$

$$R_y = \int_i^k p_y \, dx$$

$$R_x = R_t \cos\alpha - R_n \sin\alpha$$

$$R_y = R_t \sin\alpha + R_n \cos\alpha$$

$(N_{ki} + N_{ik} = 0 \Rightarrow N_{ik} = -N_{ki})$

Услови равнотеже: полигон R је одређен ако су познати $\bar{\xi}_R \cdot l_{ik}$ и $\bar{\xi}_R' \cdot l_{ik}$.

$$\sum M_k = 0 \quad T_{ik,0} = R_n \cdot \bar{\xi}_R'$$

$$\sum M_i = 0 \quad T_{ki,0} = -R_n \bar{\xi}_R$$

$$\sum X = 0 \quad N_{ki,0} - N_{ik,0} + R_t = 0$$

$$S_{ik} = (N_{ik} + N_{ki})/2 = 0 \Rightarrow N_{ki} + N_{ik} = 0 \quad \left(\text{из услова } X_i = 0\right)$$

$$\Rightarrow N_{ki,0} = -\frac{R_t}{2} \qquad N_{ik,0} = \frac{R_t}{2}$$

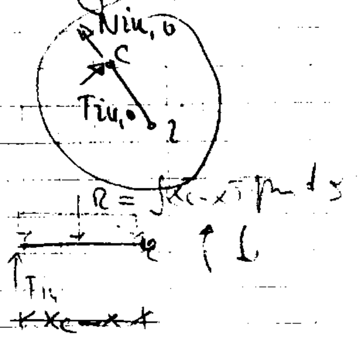
За стање $\boxed{X_i = 0}$ пишемо силе у пресеку:

силе у пресеку исте као код просте греде

$$N_0 = N_{ik,0} - \int_i^c p_t \, dS = \frac{R_t}{2} - \int_i^c p_t \, dS$$

$$T_0 = T_{ik,0} - \int_i^c p_n \, dS = R_n \cdot \bar{\xi}_R' - \int_i^c p_n \, dS$$

$$M_0 = \underbrace{T_{ik,0} \cdot \bar{\xi}_c \cdot l_{ik} - \int_i^c p_n (\bar{x}_c - \bar{x}) \, dS}_{\text{само } T \text{ и } p_n \text{ дају моменат}}$$



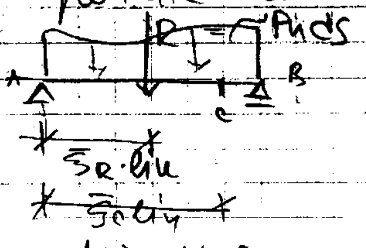
$$\Downarrow$$

$$N = N_0 + S_{ik}$$

$$T = T_0 + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$$

$$M = M_0 + M_{ik} \bar{\xi}' + M_{ki} \bar{\xi}$$

⊛ $T_{ik,0}$ је сила у одговарајуће замењујуће просте греде оптерећене тим оптерећењем.



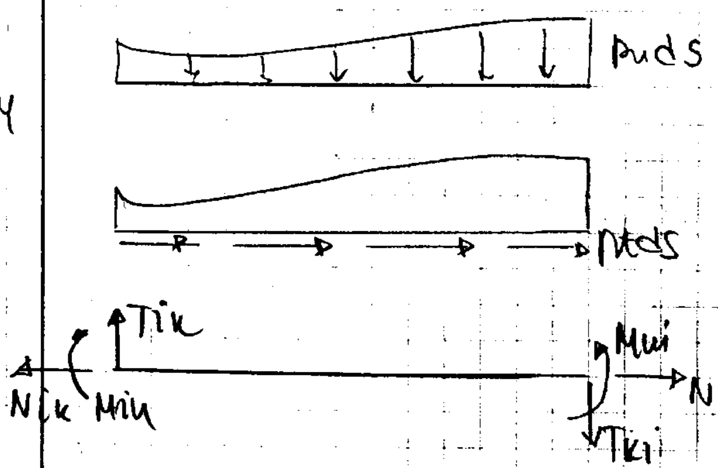
$$A = R_n \cdot \bar{\xi}_R' = T_{ik,0}$$

$$M_c = A(\bar{\xi}_R \cdot l_{ik}) - \int_i^c p_n \, dS \cdot (\bar{x}_c - \bar{x})$$

стање: $X_i = 0 \Rightarrow N_{ik} + N_{ki} = 0$ і $M_{ik,0} = M_{ki,0} = 0$!

статички независне су $X_1 = S_{ik}$ $X_2 = M_{ik}$ $X_3 = M_{ki}$ што усвојили да би добили утицаје за просту греду.

Дијаграми сила у пресеку

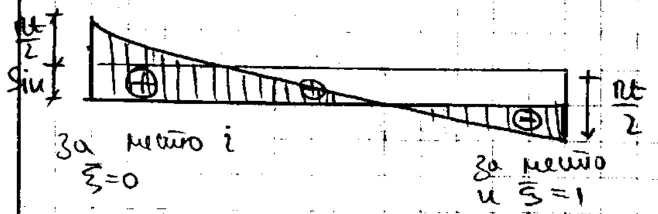


$$S_{ik} = \frac{N_{ik}+N_{ki}}{2}$$

Силе у пресецима представљамо дијаграмима.

⊛ оптерећење је произвољно па ће дијаграми бити произвољне криве.

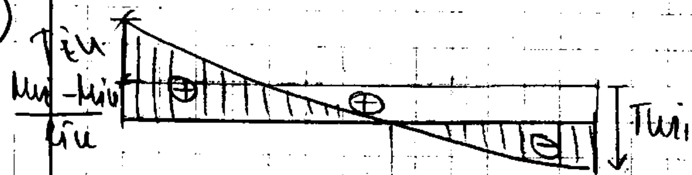
(N)



$$N_{ik} = \frac{Rt}{2} - \cancel{\int_i^k p_t ds} = \frac{Rt}{2}$$

$$N_{ki} = -\frac{Rt}{2} - \cancel{\int_i^k p_t ds} = -\frac{Rt}{2}$$

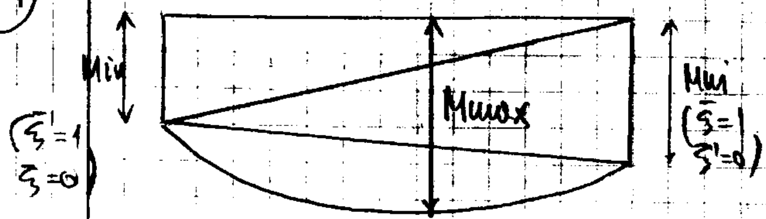
(T)



$$T_{ik} = +R_n\bar\xi_R' - \cancel{\int_i^k p_n ds} = -R_n\bar\xi_R$$

$$T_{ki} = -R_n\bar\xi_R + \frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}$$

(M)



$$M_{ik}\cdot\bar\xi' < \begin{matrix} M_{ik} & \bar\xi'=1 & i \\ 0 & \bar\xi'=0 & k \end{matrix} \quad \text{линеарно}$$

$$+$$

$$M_{ki}\cdot\bar\xi < \begin{matrix} M_{ki} & \bar\xi=1 & k \\ 0 & \bar\xi=0 & i \end{matrix}$$

$$+$$

моменти просте греде за расподељено оптерећење

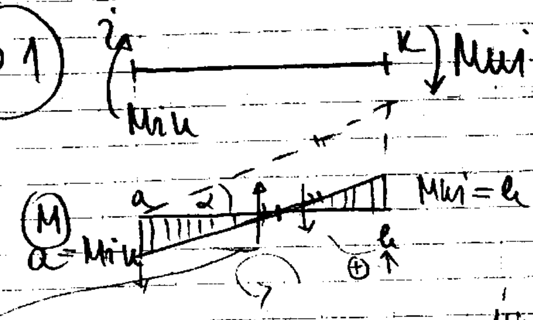
N - дијаграм зависи од облика оптерећења pt. (ако је pt=const дијаграм је линеаран, ако је крива вишег реда, једну криву више).

T - l_{ik}=const, M_{ik}, M_{ki} = const ⇒ облик зависи од облика оптерећења. Ако је const ⇒ T линеарно.

M - састоји се из момената на једном крају, на другом крају и момената између

Просте греде за оптерећење на штапу.

пр 1



сила је први извод момента
⇒ сила је = tg нагиба криве дијаграма момента

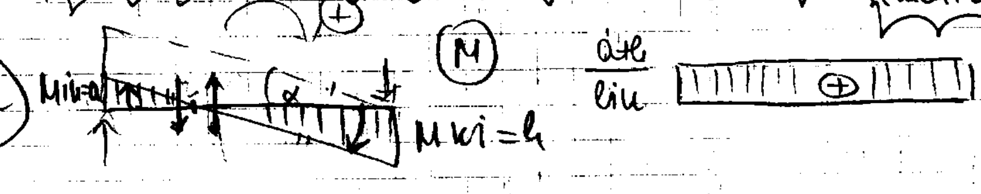
$\frac{M_{ik}+M_{ki}}{l_{ik}}$ ⇒ на месту где је $T=0$
⇒ $M=\max M$

$tg\alpha = \frac{M_{ik}-M_{ki}}{l_{ik}}$ (НАГИБ)

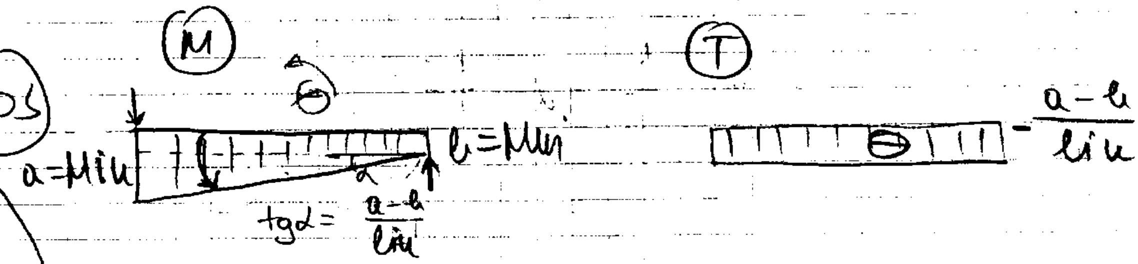
упоредно силе које ће дати обј моменти

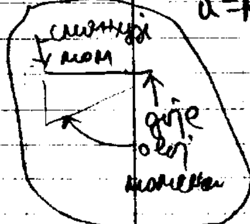
⁎ T сила је позитивна на оним местима где осу штапа треба обрнути у смеру казаљке на сату, а негативна на оним местима где је треба обрнути супротно од смера казаљке на сату да се поклопи са дијаграмом M (тангентом).

пр 2

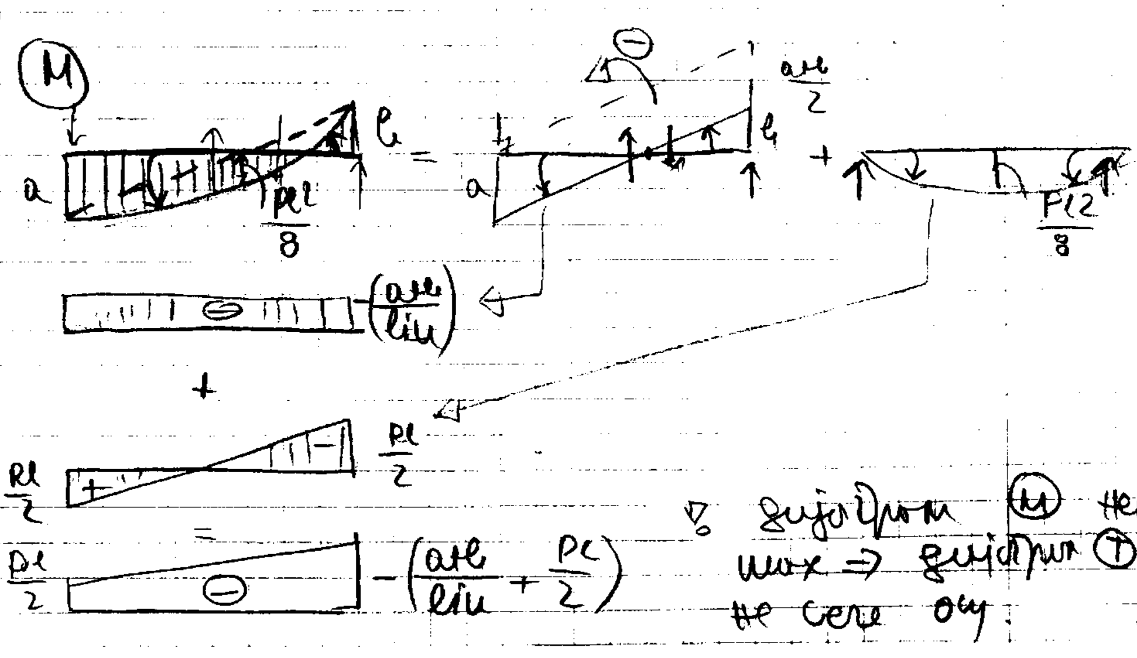


пр 3



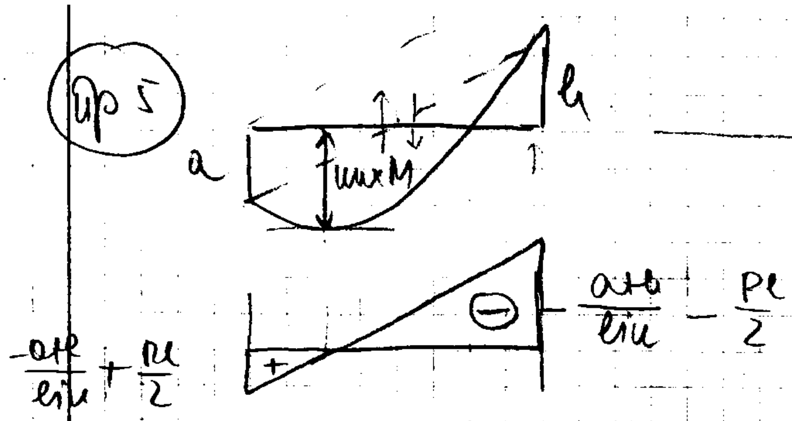


пр 4



⁎ дијаграм (M) нема max ⇒ дијаграм (T) не сече осу.

Пр 5



N_0, M_0, T_0 – "утицаји од "просте греде""
S_{ik}, M_{ik}, M_{ki} – утицаји од сила на крају штапа

⇒ S_{ik}, M_{ik}, M_{ki} представљају **граничне услове по силама**, што да можемо одредити силе у пресеку јер имамо 3 услова равнотеже по силама (а имамо и по деформацијама.)

Ако знамо M, N, T можемо одредити и $\varepsilon, \varkappa, \psi_T$

из ј-на:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$$

$$\varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\psi_T = \frac{T \cdot k}{EF}$$

ψ – обртање осе

$\psi - \psi_T$ – обртање попречног пресека.

ИНТЕГРАЛИ ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ДИФ. Ј-НА ШТАПА.

$$d(\varphi-\varphi_T) = -\kappa\, ds$$

$$du = \varepsilon\, dx - \varphi\, dy$$

$$dv = \varphi\, dx + \varepsilon\, dy$$

$/\cdot(y_b-y)\quad /\cdot(y-y_a)\quad /\cdot(x_b-x)\quad /\cdot(x-x_a)$

интегралимо ј-не у границама од a до b.

$$(\varphi-\varphi_T)_b - (\varphi-\varphi_T)_a = -\int_a^b \kappa\, ds$$

$$u_b - u_a = \int_a^b \varepsilon\, dx - \int_a^b \varphi\, dy = \int_a^b \varepsilon\, dx + \int_a^b \varphi_T\, dy - \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy$$

$$v_b - v_a = \int_a^b \varepsilon\, dy + \int_a^b \varphi\, dx = \int_a^b \varepsilon\, dy + \int_a^b \varphi_T\, dx + \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy$$

$$\int_a^b (y_b-y)\, d(\varphi-\varphi_T) = -\int_a^b (y_b-y)\,\kappa\, ds$$

$$\int_a^b (y-y_a)\, d(\varphi-\varphi_T) = -\int_a^b (y-y_a)\,\kappa\, ds$$

(парцијална интеграција $\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du \Rightarrow$)

$$\int_a^b (y_b-y)\, d(\varphi-\varphi_T) = -(y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy = -\int_a^b (y_b-y)\,\kappa\, ds$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy &= (y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_a - \int_a^b (y_b-y)\,\kappa\, ds \\
\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy &= (y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b (y-y_a)\,\kappa\, ds \\
\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dx &= (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_a - \int_a^b (x_b-x)\,\kappa\, ds \\
\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dx &= (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b (x-x_a)\,\kappa\, ds
\end{aligned}}$$

$dx = ds\cos\alpha \qquad dy = ds\sin\alpha$

$$\Rightarrow u_b - u_a = -(y_b - y_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b \left[(y_b - y)\mathcal{H} + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T\sin\alpha\right] ds$$

$$u_b - u_a = -(y_b - y_a)(\varphi-\varphi_T)_b - \int_a^b \left[(y - y_a)\mathcal{H} - \varepsilon\cos\alpha + \varphi\sin\alpha\right] ds.$$

$$v_b - v_a = (x_b - x_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b \left[-(x_b - x)\mathcal{H} + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha\right] ds$$

$$v_b - v_a = (x_b - x_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b \left[(x - x_a)\mathcal{H} + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha\right] ds$$

Закључак: Можемо одредити померања u_a ако нам је познато обртање поп. пресека $(\varphi-\varphi_T)_a$ а то обртање ако је познато обртање $(\varphi-\varphi_T)_b$.
Да би одредили померање једне тачке потребно је одредити померање и обртање неке друге тачке.

Ако пресек **a → i** и **b → c** (или a → c, b → k)

из ⊛ ⇒ $\boxed{(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \mathcal{H}\,ds = (\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k \mathcal{H}\,ds}$

Физички смисао: Обртање поп. пресека у тачки c $(\varphi-\varphi_T)_c$ биће једнако обртању $(\varphi-\varphi_T)_i$ + промени кривине т. пресека од i до c

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i + \int_i \mathcal{H}\,ds.$$

Слично $\overset{⊛}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\begin{aligned} u_c &= u_i - (y_c - y_i)(\varphi-\varphi_T)_i + \int_i^c \left[(y_c - y)\mathcal{H} + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T\sin\alpha\right] ds = \\ &-u_k + (y_k - y_c)(\varphi-\varphi_T)_k + \int_i^c \left[(y - y_c)\mathcal{H} - \varepsilon\cos\alpha + \varphi_T\sin\alpha\right] ds. \end{aligned}}$$

Померање у једној оси знамо ако знамо u_i или u_k и обртање п.п. у i или k и знамо деформацију штапа $\varepsilon, \mathcal{H}, \varphi_T$ које знамо ако знамо силе у пресеку M, N, T.

$$(*) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_c &= v_i + (x_c - x_i)(\varphi - \varphi_T)_i + \int_i^c \left[-(x_c - x)\kappa + \varepsilon \sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha\right] dS \\ &= v_k - (x_k - x_c)(\varphi - \varphi_T)_k - \int_c^k \left[(x - x_c)\kappa + \varepsilon \sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha\right] dS. \end{aligned}}$$

Добили смо изразе за померање и обртање произвољног п.п. који се деформише услед дејства сила:

$$(1) \quad (\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_i - \int_i^c \kappa \, dS = (\varphi - \varphi_T)_k + \int_c^k \kappa \, dS$$

$$(2) \quad \begin{aligned} u_c &= u_i - (y_c - y_i)(\varphi - \varphi_T)_i + \int_i^c \left[(y_c - y)\kappa + \varepsilon \cos\alpha - \varphi_T \sin\alpha\right] dS \\ &= u_k + (y_k - y_c)(\varphi - \varphi_T)_k + \int_c^k \left[(y - y_c)\kappa - \varepsilon \cos\alpha + \varphi_T \sin\alpha\right] dS. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} v_c &= v_i + (x_c - x)(\varphi - \varphi_T)_i + \int_i^c \left[-(x_c - x)\kappa + \varepsilon \sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha\right] dS \\ &= v_k - (x_k - x_c)(\varphi - \varphi_T)_k - \int_c^k \left[(x - x_c)\kappa + \varepsilon \sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha\right] dS. \end{aligned}$$

За штап који се не деформише $\varepsilon, \kappa, \varphi_T = 0$

$$(*) \xrightarrow{\varepsilon, \kappa, \varphi_T = 0} \boxed{\begin{aligned} \varphi_c' &= \varphi_i & \varphi_c'' &= \varphi_k \\ u_c' &= u_i - (y_c - y_i)\varphi_i & u_c'' &= u_k + (y_k - y_c)\varphi_k \\ v_c' &= v_i + (x_c - x_i)\varphi_i & v_c'' &= v_k - (x_k - x_c)\varphi_k. \end{aligned}}$$

3 ГРАНИЧНА УСЛОВА ЗА РЕШАВАЊЕ ДИФ. ЈЕДНАЧИНА

ПОМЕРАЊЕ ШТАПА КАО КРУТОГ ТЕЛА У РАВНИ

Померање штапа као крутог тела у равни описују u_i, v_i, φ_i или u_k, v_k, φ_k. Ове 3 величине су 3 гранична услова за решавање (*) диференцијалних ј-на.

Ако је штап статички одређен, овим смо решили проблем.

u_i, v_i, φ_i (u_k, v_k, φ_k) на крају i (k) дефинишу кретање штапа као крутог тела у равни (и обезбеђују граничне услове по померањима).

Уводимо 3 деформацијски независне величине штапа U_1, U_2, U_3 које су ф-је померања штапа на крајевима.

$$\boxed{\begin{array}{c} U_j = U_j(u_i, v_i, \varphi_i, u_k, v_k, \varphi_k) \quad j=1,2,3. \\ \text{ДЕФОРМАЦИЈСКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА} \end{array}}$$

* Важи принцип суперпозиције.

померање и обртање произвољне тачке носача

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_{c,0} + \varphi_{c1}U_1 + \varphi_{c2}U_2 + \varphi_{c3}U_3$$

$J=0$ - само оптерећење?

$$u_c = u_{c,0} + u_{c1} U_1 + u_{c2} U_2 + u_{c3} U_3$$

$$v_c = v_{c,0} + v_{c1} U_1 + v_{c2} U_2 + v_{c3} U_3$$

нема φ_T зато што је при том стању оптерећење једнако нули а φ_T постоји само када имамо деформације од оптерећења.

$(\varphi-\varphi_T)_{c,0}$, $u_{c,0}$, $v_{c,0}$ су величине обртања поп. прес. односно померања тачака штапа услед оптерећења ($p \neq 0$) и када је $U_j=0$ што је

$\boxed{U_j=0 \text{ стање}}$

Када имамо оптерећење $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T \neq 0$

$\varphi_{c,j}$, $u_{c,j}$, $v_{c,j}$ су величине обртања и.и. тј. померања пресека штапа при $v_j=1$, $v_k=0$, $j\neq k$ и када нема спољашњег оптерећења $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T=0$.

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_{c,0} + \boxed{\varphi_c'}$$ обртање и.и. као крутог тела.

$$u_c = u_{c,0} + \boxed{u_c'}$$ (из интеграције "деформације").

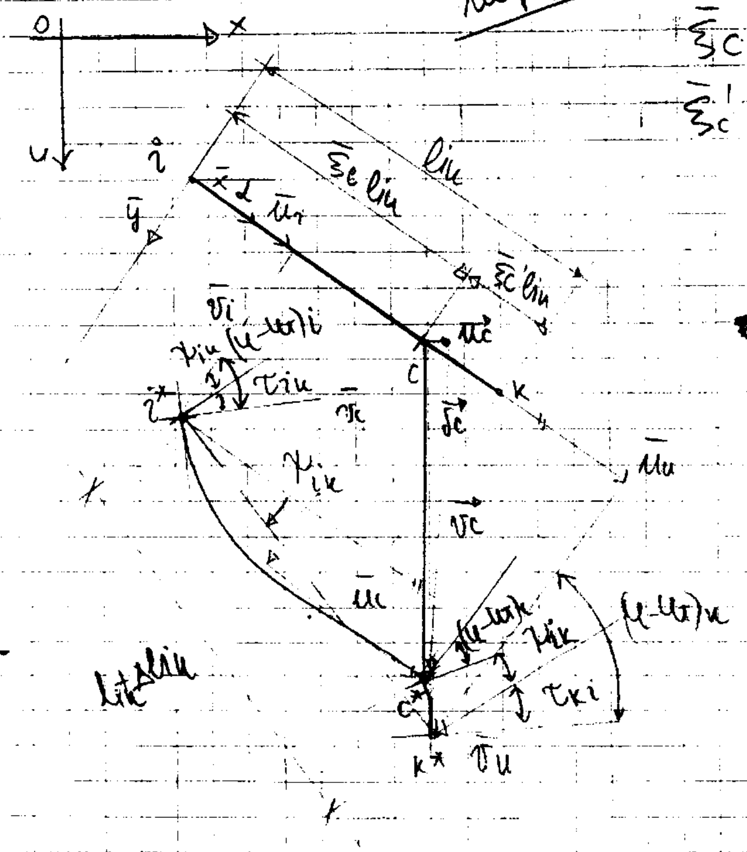
$$v_c = v_{c,0} + \boxed{v_c'}$$

за њих је $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T=0$ нема деформације.

$$\left.\begin{aligned} u_c' &= u_i - (y_c-y_i)\varphi_i \\ v_c' &= v_i + (x_c-x_i)\varphi_i \\ \varphi_c' &= \varphi_i' = \varphi_k' \end{aligned}\right\}$$ померање тачке штапа као крутог тела у односу на померање једног краја.

ОСНОВНЕ ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА

→ Уводимо нове величине које ближе одређују деформацију штапа. В локалним координатама све.



$$\bar\xi_c l_{ik} = \bar x_c - \bar x_i$$

$$\bar\xi_c' l_{ik} = \bar x_k - \bar x_c$$

$$\bar u_c = u_c\cos\alpha + v_c\sin\alpha$$

$$\bar v_c = v_c\cos\alpha - u_c\sin\alpha$$

Под оптерећењем се овај штап деформише

ψ_{ik} - УГАО ОБРТАЊА ШТАПА

Δl_{ik} - ПРОМЕНА ДУЖИНЕ ШТАПА

δ_c^D - вектор помераја; можемо га ~~дефинисати~~ разложити на u, v и $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

ψ_{ik} - померање штапа као крутог тела

$(\varphi-\varphi_T)_i$ - угао обртања ч.ч. на месту i. (Пре деформације је ч.ч. $\perp$ на осу штапа $\xi, \eta, \varphi_T=0$).

τ_{ik} - зависи од оптерећења и деформације

Сада ч.ч. је претрпео обртање. ψ_{ik} потиче од обртања штапа као крутог тела.

τ_{ik} - ДЕФОРМАЦИЈСКИ УГАО на крају i штапа ik.

? зависи од оптерећења и деформације штапа.

* $(\varphi-\varphi_T)_i = \psi_{ik}+\tau_{ik}$ — φ - угао обртања осе

$(\varphi-\varphi_T)_k = \psi_{ik}+\tau_{ki}$ — φ_T - промена $\angle$ између осе и $\bar{u}$-$\bar{u}$.

ψ_{ik} не зависи од деформације штапа јер је последица померања штапа као крутог тела.

→ Пројектујемо $l_{ik}+\Delta l_{ik}$ на правац паралелан првобитном правцу штапа.

$$(l_{ik}+\Delta l_{ik})\cos\psi_{ik} = l_{ik}+\bar{u}_k-\bar{u}_i$$

- Пројекција $\Delta l_{ik}+l_{ik}$ на правац $\bar{y}$

$$(l_{ik}+\Delta l_{ik})\sin\psi_{ik} = \bar{v}_k-\bar{v}_i$$

ψ_{ik} је реално мали $\psi_{ik} \approx 0 \Rightarrow$ $\sin\psi_{ik} \approx \psi_{ik}$, $\cos\psi_{ik} \approx 1$

Δl_{ik} је реално врло мали $\Rightarrow \Delta l_{ik} \cdot \psi_{ik} \approx 0$

$$\Rightarrow \Delta l_{ik} \cdot \psi_{ik} \approx 0$$

$$l_{ik} + \Delta l_{ik} = l_{ik} + \bar{u}_k - \bar{u}_i$$
$$l_{ik}\,\psi_{ik} = \bar{v}_k - \bar{v}_i$$

$\Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i$ промена дужине тетиве штапа.

$$\psi_{ik} = \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$

Ове величине дефинишу промену дужине штапа у правцу тог штапа, а угао обртања штапа је $\psi_{ik} \approx \operatorname{tg}\psi_{ik} = \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$

$$\Delta l_{ik} = \underbrace{\bar{u}_k - \bar{u}_i}_{} = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik} = F_1(i,k)$$

компонентална померања крајева штапа.

$$\psi_{ik} = \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}} = \frac{(v_k - v_i)\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} = F_2(i,k)$$

$$\Rightarrow^{*} \tau_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_k - \psi_{ik}$$
$$= (\varphi - \varphi_T)_i - F_2(i,k)$$

$$\tau_{ki} = (\varphi - \varphi_T)_k - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_k - \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$
$$= (\varphi - \varphi_T)_k - F_2(i,k)$$

Одбацили смо деформацију штапа и увели 3 нове деформацијске величине

$\boxed{\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}}$ — ОСНОВНЕ ДЕФ. ВЕЛИЧИНЕ ЈЕДНОГ ШТАПА

$\boxed{\varepsilon, \kappa, \varphi_T}$ — ОСНОВНЕ ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА

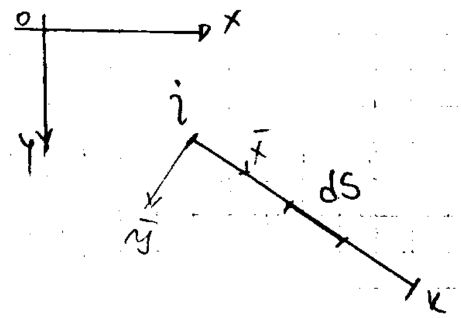
$\Delta l_{ik}, t_{ik}, t_{ki}$ - можемо изразити преко $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T$.

$$du = \varepsilon dx - \varphi dy$$
$$dv = \varepsilon dy + \varphi dx$$
$$d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds$$

?

Ове величине ће бити инваријантне у односу на коор. сис. јер се локални коорд. сис. само ротира у односу на глобални.

$$d\bar{u} = \varepsilon d\bar{x} - \varphi d\bar{y}$$
$$d\bar{v} = \varepsilon d\bar{y} + \varphi d\bar{x}$$
$$d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds$$



$$d\bar{x} = ds$$
$$d\bar{y} = 0$$

$$d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds$$
$$d\bar{u} = \varepsilon ds$$
$$d\bar{v} = \varphi ds$$

$$\int_i^c \quad \int_c^k$$

$$\Rightarrow \bar{u}_c = \bar{u}_i + \int_i^c \varepsilon ds = \bar{u}_k - \int_c^k \varepsilon ds$$

$$\bar{v}_c = \bar{v}_i + (\bar{x}_c - \bar{x}_i)(\varphi - \varphi_T)_i - \int_i^c [(\bar{x}_c - \bar{x})\varkappa - \varphi_T] ds$$

$$\bar{v}_c = \bar{v}_i + (\bar{x}_c - \bar{x}_i)(\varphi - \varphi_T)_i + \int_i^c [(\bar{x}_c - \bar{x})\varkappa + \varepsilon + \varphi_T] ds$$

$$= \bar{v}_k - (\bar{x}_k - \bar{x}_c)(\varphi - \varphi_T)_k - \int_c^k [(\bar{x} - \bar{x}_c)\varkappa + \varphi_T] ds$$

$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_i - \int \varkappa ds$$
$$= (\varphi - \varphi_T) + \int_c^k \varkappa ds$$

$c \to k$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_i + \int_i^k \varepsilon ds$$

$$\bar{u}_k - \bar{u}_i = \Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon ds$$

Промена дужине тетиве штапа је једнака интегралу ~~штапа~~ дилатације елементарних ⊗ кутова штапа од јединачних дилатација.

клизна координата

$$\int_i^u \Rightarrow \quad (c \to u) \quad \bar v_u = \bar v_i + \cancel{\bar\xi_c'}^{\,=1 (c\to k)} \, l_{iu} \underbrace{(\psi - \varphi_T)_i}_{\cancel{(x_c - x)}} - \int_i^k (\bar\xi' \, l_{iu} \cdot \kappa - \varphi_T) \, dS$$

$$\frac{\bar v_u - \bar v_i}{l_{iu}} = \psi_{iu} + \tau_{iu} - \frac{1}{l_{iu}} \int_i^u (\bar\xi' \, l_{iu} \, \kappa - \varphi_T) \, dS$$

$$\boxed{\tau_{iu} = \frac{1}{l_{iu}} \int_i^k [\bar\xi' \, l_{iu} - \kappa - \varphi_T] \, dS}$$

$(c \to i)$

$$\bar v_i = \bar v_u - \cancel{\bar\xi_c}_{\,=1 (c \to i)} \, l_{iu} (\psi - \varphi_T)_k - \int_c^k (\bar\xi \, l_{iu} \, \kappa + \varphi_T) \, dS$$

$$\frac{-\bar v_k - \bar v_i}{l_{iu}} = -\cancel{\psi_{iu}} - \tau_{ki} - \int_i^u (\bar\xi \cdot l_{iu} \, \kappa + \varphi_T) \, dS$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{iu}} \int_i^u (\bar\xi \, l_{iu} \kappa + \varphi_T) \, dS}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta l &= \int_i^k \varepsilon \, dS \\ \tau_{ik} &= \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k [\bar\xi' l_{ik} \kappa - \varphi_T] \, dS \\ \tau_{ki} &= -\frac{1}{l_{ik}} \int_i^k [\bar\xi \, l_{ik} \kappa + \varphi_T] \, dS \end{aligned}}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$$

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

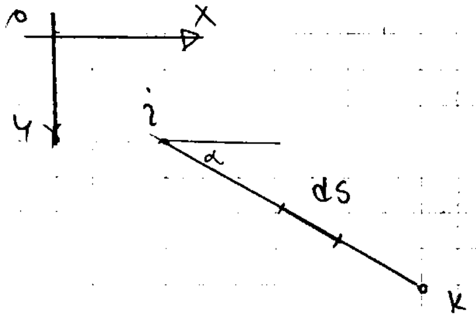
$$\varphi_T = \frac{T \cdot k}{GF}$$

$$k = \frac{F}{I^2} \int_F \left(\frac{S}{e}\right)^2 dF$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ -\tau_{ki} \end{bmatrix} \qquad \xi = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \varphi_T \end{bmatrix} \qquad \delta = \int_i^k L' \varepsilon \cdot dS$$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ik} & \bar\xi' \\ 0 & 1/l_{ik} & \bar\xi \end{bmatrix} \qquad L' = L^T$$

МОРОВА АНАЛОГИЈА ЗА ШТАП
СТАТИЧКО-КИНЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА

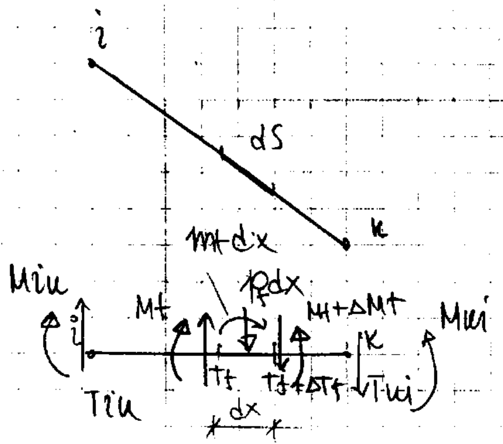


Познато нам је:
v_i, $(\varphi-\varphi_T)_i$ „ v_k, $(\varphi-\varphi_T)_k$

$dx = ds\cos\alpha$
$dy = ds\sin\alpha$

(1) $d(\varphi-\varphi_T) = -\mathcal{H}\,ds$
(2) $du = \varepsilon dx - \varphi dy$
(3) $dv = \varphi dx + \varepsilon dy$

Посматрамо услове равнотеже дела штапа ds.



p_f, M_f, T_f – фиктивно оптерећење, моменти и сила.

ФИКТИВНИ ШТАП

Фиктивни штап је управан на правац одговарајућег померања (v_i)

(1)/dx $\quad \dfrac{d(\varphi-\varphi_T)}{dx} = -\dfrac{\mathcal{H}}{\cos\alpha}$

(3)/dx $\quad \dfrac{dv}{dx} = (\varphi-\varphi_T) + \varphi_T + \varepsilon \underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{tg\alpha}$

$$\frac{dv}{dx} = (\varphi-\varphi_T) + \varepsilon\, tg\,\alpha + \varphi_T$$

Оптеретили смо део dx распоређеним моментима и силама и добијемо резултанту $p^f dx$ и $m^f dx$

СИЛЕ У ПРЕСЕКУ ЈЕДНОГ ФИКТИВНОГ ПРАВОГ ШТАПА ОПТЕРЕЋЕНИМ ФИКТИВНИМ ОПТЕРЕЋЕЊЕМ.

$$(*)\quad \frac{dT^f}{dx} = -p^f \qquad \overset{\Sigma M=0}{\frac{dM^f}{dx}} = T^f + m^f$$

* Аналогија:

$$T_f \leftrightarrow (\psi-\psi_T) \qquad M_f \leftrightarrow v$$

$$p^f \leftrightarrow \frac{\kappa}{\cos\alpha} \qquad m_f \leftrightarrow \varepsilon \operatorname{tg}\alpha + \psi_T$$

$$(*) \Rightarrow \quad p^f = \frac{\kappa}{\cos\alpha} = \left(\frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)\sec\alpha$$

$$m^f = \varepsilon \operatorname{tg}\alpha + \psi_T = \left(\frac{N}{EF} + \alpha_t t\right)\operatorname{tg}\alpha + \frac{T \cdot k}{GF}$$

оптерећење фиктивног носача је моменат реалног носача.

Ако можемо наћи силе у пресеку неког правог штапа можемо наћи и померања преко фиктивног носача (и обрнути опорног штапа) оптерећеног неким оптерећењем.

Померања можемо срачунати као M_f и T_f фиктивног штапа управног на правац у коме тражимо померање и оптерећеног фиктивним оптерећењем p^f и m^f.

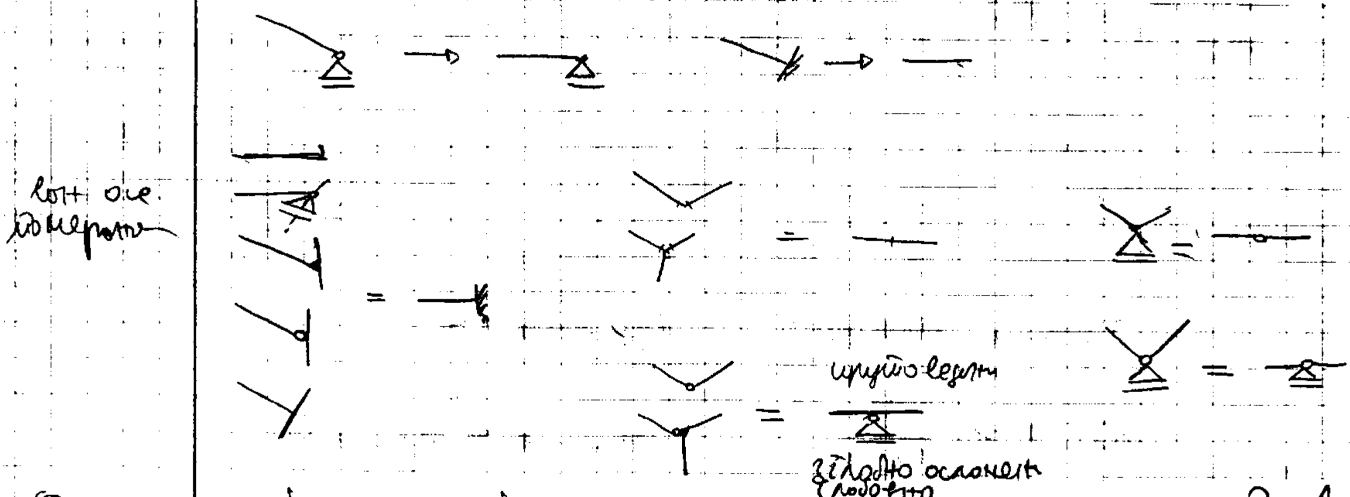
Утицај N и T се најчешће занемарује јер је мали.

Гранични услови фиктивног носача морају одговарати одговарајућим на опорном.

$$M_{ik}^f = v_i \qquad T_{ik}^f = (\psi-\psi_T)_i$$

$$M_{ki}^f = v_k \qquad T_{ki}^f = (\psi-\psi_T)_k$$

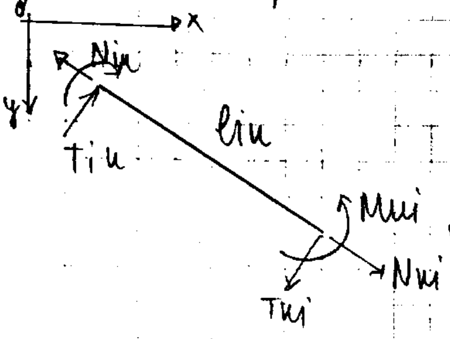
- Гранични услови за померања опорног штапа једнаки су граничним условима за силама за фиктивни носач.



* не преноси реакције ослонаца и оптерећење у правцу осе фиктивни носача.

ВЕЗА ИЗМЕЂУ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНИХ И ДЕФОРМАЦИЈСКИ НЕЗАВИСНИХ ВЕЛИЧИНА

Код статички неодређених система број услова по силама је мањи од броја услова по померањима па силе изражавамо преко померања.



$$X_1 = \frac{N_{ik}+N_{ki}}{2} = S_{ik}$$

$$X_2 = M_{ik}$$

$$\underbrace{X_3 = M_{ki}}$$

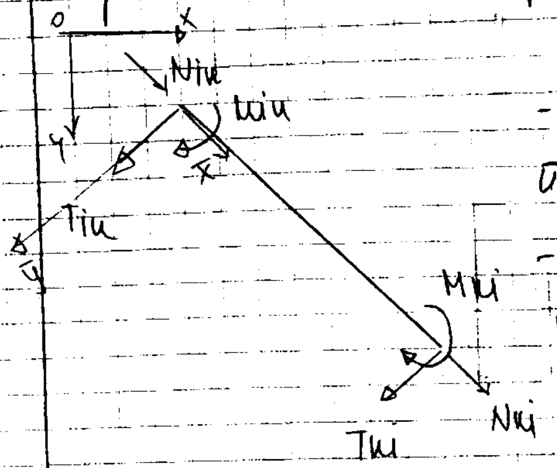
за овако изабране статички независне величине ⇒

$$N = S_{ik} + N_0$$

$$T = \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} + T_0$$

$$M = M_{ik}\,\xi' + M_{ki}\,\xi + M_0$$

Уводимо нову конвенцију за силе у пресецима која одговара локалном координатном сис.



- силе су позитивне у правцима одговарајућих позитивних оса ($\bar{x}$ или $\bar{y}$)
- моменти су позитивни ако обрћу од x на y.

По новој конвенцији: ⇒ $X_1 = \frac{N_{ik} - N_{ki}}{2} = S_{ik}$

$X_2 = M_{ik}$

$X_3 = -M_{ki}$

I)

⇒ $N = S_{ik} + N_0$

$T = -\frac{M_{ki} + M_{ik}}{l_{ik}} + T_0$

$M = M_{ik}\,\bar{\xi}' - M_{ki}\,\bar{\xi} + M_0$

(1) $\boxed{R = L \cdot X + R_0}$

$R = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}$ сил. у пресеку $X = \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix}$ статички независне $R_0 = \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix}$ силе у пресеку просте греде

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & -\frac{1}{l_{ik}} \\ 0 & \bar{\xi}' & -\bar{\xi} \end{bmatrix}$

II) Веза између $\varepsilon, \kappa, \gamma_T$ (деформацијских величина елемената штапа) и сила у пресеку.

$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$

$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$

$\gamma_T = \frac{T \cdot k}{GF}$

(2) $\boxed{\mathcal{E} = D_E \cdot R + \mathcal{E}_T}$

$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma_T \\ \kappa \end{bmatrix}$ $\mathcal{E}_t = \begin{bmatrix} \alpha_t t^{\circ} \\ 0 \\ \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \end{bmatrix}$

$D_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{GF} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$ реципрочне вредности крутости штапова.

III)

$$\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon \, dS$$

$$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k \left[-\varphi_T + \xi' l_{ik} \kappa\right] dS$$

$$\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ki}} \int_i^k \left[\xi l_{ik} \kappa + \varphi_T\right] dS$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \qquad L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & \xi' \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & -\xi \end{bmatrix} \qquad L' = L^T$$

$$\boxed{\delta = \int_i^k L' \varepsilon \, dS} \quad (3)$$

$$\delta = \int_i^k L' \varepsilon \, dS = \int_i^k L'(D_E R + \varepsilon_t) dS = \int_i^k L'\left[D_E(LX + R_0) + \varepsilon_T\right] dS$$

$$= \int_i^k (L' D_E \cdot L \, dS) X + \int_i^k L' D_E R_0 \, dS + \int_i^k L' \varepsilon_T \, dS$$

$\int_i^k L' D_E \cdot L \cdot dS = f$ **МАТРИЦА ФЛЕКСИБИЛНОСТИ ШТАПА.**

f је симетрична у односу на главну дијагоналу.

$\delta_0 = \int_i^k L' D_E \cdot R_0 dS$ – вектор који зависи само од оптерећења.

$\delta_t = \int_i^k L' \varepsilon_T dS$ – зависи од температурне промене $\alpha t°$ и темп. разлике $\alpha t \frac{\Delta t}{h}$

$$\boxed{\delta = fX + \delta_0 + \delta_t}$$

БАЗНА МАТРИЦА ФЛЕКСИБИЛНОСТИ ШТАПА.

IV) ВЕЗА $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$ и $u, v, (\varphi-\varphi_T)$

$$\Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i$$

$$\tau_{ik} = (\varphi-\varphi_T)_i - \frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}$$

$$\tau_{ki} = (\varphi-\varphi_T)_k - \underbrace{\frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}}}_{\psi_{ik}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix}}_{\delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{ik}} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{ik}} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_{ik}} & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ (\varphi-\varphi_T)_i \\ \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ (\varphi-\varphi_T)_k \end{bmatrix}_{6\times 1}}_{\bar{q}}$$

$$\boxed{\delta = C \cdot \bar{q}} \qquad (4)$$

БИРАМО ДЕФОРМАЦИЈУ НЕЗАВИСНЕ

$U_1 = \bar{u}_i \quad U_2 = \bar{v}_i \quad U_3 = (\varphi-\varphi_T)_i$

$U_4 = \bar{u}_k \quad U_5 = \bar{v}_k \quad U_6 = (\varphi-\varphi_T)_k$

Изабрали смо ових 6 деформацијски независних величина које су 6 граничних услова по померањима.

ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ПО ПОМЕРАЊИМА

→ Тражимо везу сила S_{ik}, M_{ik}, M_{ki} и одговарајућих померања

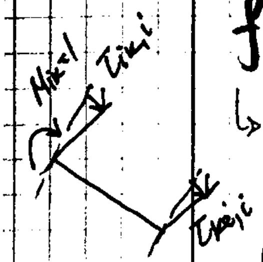
$$\delta = C\,\bar{q} = f X + \delta_0 + \delta_t$$

$$f X = C\,\bar{q} - \delta_0 - \delta_t$$

$$\boxed{X = f^{-1}\left(C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t\right)}$$

Можемо срачунати силе X ако имамо вектор $\bar{q}$, тј. померања тих пројектованих штапа.

$f^{-1} = K_0$ БАЗНА МАТРИЦА КРУТОСТИ ~~...~~ ШТАПА



$$[D_E]_{3\times3} \quad [L]_{3\times3}$$

$$f = \int_i^k L' D_E L \, dS \qquad 3\times3 \qquad [L']_{3\times3} \rightarrow [L'D_E]_{3\times3} \quad [L'D_E L]_{3\times3}$$

↳ симетрична у односу на главну дијагоналу

$$\Downarrow$$

$$f = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,s} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{ik,i} & \tau_{ik,k} \\ 0 & \tau_{ki,i} & \tau_{ki,k} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\tau_{ik,k} = \tau_{ki,i}}$$

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,0} \\ \tau_{ik,0} \\ \tau_{ki,0} \end{bmatrix}$$

$$\Delta l_{ik,s} = \int_i^k \frac{1}{EF} dS$$

$$\tau_{ik,i} = \int_i^k \left(\frac{k}{GF} \frac{1}{l_{ik}^2} + \frac{\bar{\xi}'^2}{EI} \right) dS$$

$$\tau_{ki,k} = \int_i^k \left(\frac{k}{GF} \cdot \frac{1}{l_{ik}^2} + \frac{\bar{\xi}^2}{EI} \right) dS$$

$$\Delta l_{ik,0} = \int_i^k \frac{N_0}{EF} dS$$

$$\tau_{ik,0} = \int_i^k \left(-\frac{k}{GF} \frac{T_0}{l_{ik}} + \frac{M_0}{EI} \bar{\xi}' \right) dS$$

$$\tau_{ki,0} = \int_i^k \left(-\frac{k}{GF} \frac{T_0}{l_{ik}} + \frac{M_0}{EI} \bar{\xi} \right) dS$$

$$\delta t = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,t} \\ \tau_{ik,t} \\ \tau_{ki,t} \end{bmatrix}$$

$$\Delta l_{ik,t} = \int_i^k \alpha_t t^\circ dS$$

$$\tau_{ik,t} = \int_i^k \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \bar{\xi}' dS$$

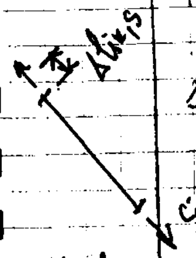
$$\tau_{ki,t} = -\int_i^k \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \bar{\xi} dS$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \delta & & f & & X & & \delta_0 & & \delta t \\ \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,s} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{ik,i} & \tau_{ik,k} \\ 0 & \tau_{ki,i} & \tau_{ki,k} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,0} \\ \tau_{ik,0} \\ \tau_{ki,0} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \Delta l_{ik,t} \\ \tau_{ik,t} \\ \tau_{ki,t} \end{bmatrix} \end{array}$$

⊛ Издужење Δl_{ik} је збир издужења при $S_{ik}=1$, издужења од температуре и издужење од оптерећења.

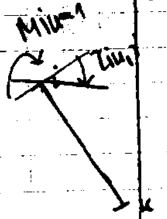
⊛ $\tau_{ik,i}$ је деформациони угао на месту i када је $M_{ik}=1$

Ако уведемо смену $ds = l \cdot d\bar{\xi} \Rightarrow \int_0^l \rightarrow \int_0^1$



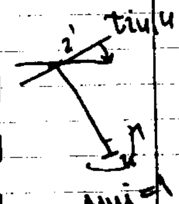
$\Delta l_{ik,S} = \frac{l}{EF}$ колико ће штап да се издужи при $S_{ik}=1$ $(X_1=1)$
и стању $M_{ik}=M_{ki}=0$

$\Delta l_{ik,0} = \Delta l_{ik,t} = 0$



$\tau_{ik,i} = \underbrace{\frac{l}{3EI}}_{\text{утицај од савијања}} + \underbrace{\cancel{\frac{k}{lGF}}}_{\text{утицај од смицања}} = \tau_{ki,k}$

* код нормалних гредних носача код којих висина није велика у односу на дужину занемарујемо



$\tau_{ik,k} = -\frac{l}{6EI} + \cancel{\frac{k}{lGF}} = \tau_{ki,i}$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ 0 & -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$$

БАЗНА МАТРИЦА ФЛЕКСИБИЛНОСТИ (за прав штап const поп. пресека).

→ када на штап делује само спољашње оптерећење:

$\Delta l_{ik,0} = \frac{l}{EF}\int_0^1 N_0 \, d\bar{\xi}$

$\tau_{ik,0} = \frac{l}{EI}\int_0^1 M_0 \bar{\xi}' \, d\bar{\xi} - \cancel{\frac{k}{GF}\int_0^1 T_0 \, d\bar{\xi}}$ → 0 (најчешће)

$\tau_{ki,0} = -\left(\frac{l}{EI}\int_0^1 M_0 \bar{\xi} \, d\bar{\xi} + \cancel{\frac{k}{GF}\int_0^1 T_0 \, d\bar{\xi}}\right)$

→ од утицаја αt и $\alpha t \frac{\Delta t}{h}$

$\Delta l_{ik,t} = \alpha t \cdot l \int_0^1 T \, d\bar{\xi} \stackrel{t=const}{=\!=} \alpha t \cdot l \cdot t$

$\tau_{ik,t} = \alpha t \frac{l}{h}\int_0^1 \Delta t \, \bar{\xi}' \, d\bar{\xi} \stackrel{t=const}{=\!=} \alpha t \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{l}{2}$

$\tau_{ki,t} = -\alpha t \cdot \frac{l}{h}\int_0^1 \Delta t \, \bar{\xi} \, d\bar{\xi} \stackrel{t=const}{=\!=} -\alpha t \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{l}{2}$

$k_0 = f^{-1}$

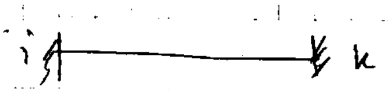
$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \text{const за један штап}$$

$$\boxed{X = K_0 (C\bar{q}_h - \delta_0 - \delta_t)}$$

$K_0 = f(EI, EF, \text{дим. штапа})$

Ко је ф-ја димензија штапа и крутости и const је за померени штап.

⇒ за задато $\bar{q}_i$ (померање и обртање) на крају штапа можемо срачунати $X(S_{ik}, M_{ik}, M_{ki})$

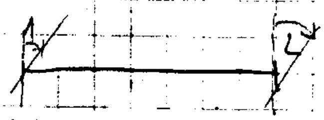


$u_i = 0 \qquad u_k = 0$

$v_i = 0 \qquad v_k = 0$

$(\varphi - \psi)_i = 0 \qquad (\varphi - \psi)_k = 0$

$\hookrightarrow X = K_0(-\delta_0 - \delta_t)$



$u_i = 3mm \qquad u_k = \ldots$

$v_i = 2mm \qquad v_k = \ldots$

$(\varphi - \psi)_i = 2rad \qquad (\varphi - \psi)_k = \ldots$

$\hookrightarrow X = K_0(C\bar{q}_i - \delta_0 - \delta_t)$

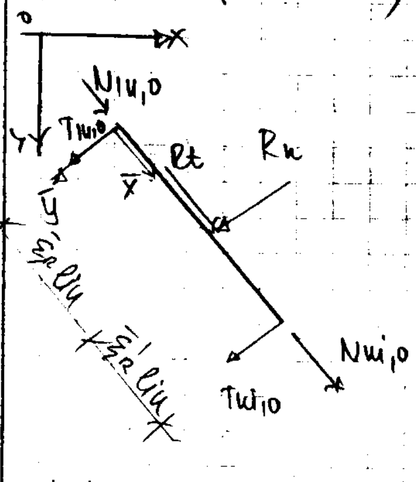
ако имамо бројне вредности можемо срачунати силе у штапу.

силе у пресеку за $\boxed{X_i = 0}$

за $X_1 = S_{ik}$

$X_2 = M_{ik}$

$X_3 = -M_{ki}$



$X_i = 0$ штапа ⇒ $N_{ik,0}$; $N_{ki,0}$; $T_{ik,0}$, $T_{ki,0}$

$$N_{ik,0} = N_{ki,0} = -\frac{R_t}{2} = N_0$$

$$T_{ik,0} = -R_n \bar{\xi}_R'$$

$$T_{ki,0} = -R_n \bar{\xi}_R$$

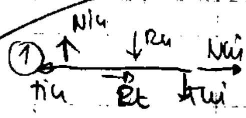
$$N_{ik} = S_{ik} + N_{ik,0}$$

$$N_{ki} = -S_{ik} + N_{ki,0}$$

$$T_{ik} = T_{ik,0} + \frac{M_{ki} + M_{ik}}{l_{ik}}$$

$$T_{ki} = T_{ki,0} - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{l_{ik}}$$

1



$N_{ik,0} = \frac{R_t}{2}$

$N_{ki,0} = -\frac{R_t}{2}$

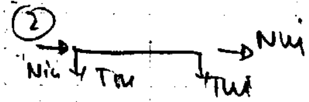
$T_{ik,0} = R_n \bar{\xi}_R'$

$T_{ki,0} = -R_n \bar{\xi}_R$

$N_{ik} = N_{ik,0} + S_{ik}$

$T_{ik} = T_{ik,0} + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$

2



$N_{ik,0} = N_{ki,0} = -\frac{R_t}{2}$

$T_{ik,0} = R_n \bar{\xi}_R'$

$T_{ki,0} = R_n \bar{\xi}_R$

$N_{ik} = N_{ik,0} + S_{ik}$

$N_{ki} = N_{ik,0} - S_{ik}$

$T_{ik} = T_{ik,0} + \frac{M_{ki} + M_{ik}}{l_{ik}}$

$T_{ki} = T_{ik,0} - \frac{M_{ki} + M_{ik}}{l_{ik}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_{ik} \\ T_{ik} \\ M_{ik} \\ N_{ki} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix}}_{\bar{R}} = \underbrace{\begin{array}{ccc} S_{ik} & M_{ik} & M_{ki} \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{ik}} & \frac{1}{l_{ik}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ik} & -1/l_{ik} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}_{6\times3}}_{C^{1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} N_{ik,0} \\ T_{ik,0} \\ 0 \\ N_{ki,0} \\ T_{ki,0} \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times1}}_{R_0} \quad X_i = 0$$

$(M_{ik,0} = M_{ki,0} = 0)$

$X_i = 0$

$$\boxed{\bar{R} = C^{1} \cdot X + \bar{R}_0} \qquad C^{1} = C^{T}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad \bar{R} = C^{1}X + \bar{R}_0$$

Веза сила у пресеку на крајевима штапа и сила независних.

$$X = k_0 (C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t)$$

$$\bar{R} = C^{1} k_0 (C\bar{q} - \delta_0 - \delta_t) + \bar{R}_0$$

$$\bar{R} = \underbrace{(C^{1} k_0 C)}_{K} \bar{q} + \underbrace{\bar{R}_0 - C^{1} k_0 (\delta_0 + \delta_t)}_{\bar{Q}}$$

$k_0\ [k_0]_{3\times3}\ [\ C\ ]_{3\times6}$

$[C^{1}]_{6\times3} [C^{1}k_0]_{6\times3} [C^{1}k_0C]_{6\times6}$

$\boxed{K = C^{1} k_0 C}$ **МАТРИЦА КРУТОСТИ ШТАПА**

$R_0 - C^{1} k_0 (\delta_0 + \delta_t)$ зависи само од спољашњег оптерећења

→ Силе на крајевима штапа можемо срачунати ако познајемо R_0

$$
\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\
0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\
-\frac{EF}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EF}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\
0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{\varphi}_k \end{bmatrix}
\qquad T=0 \quad + \bar{Q}
$$

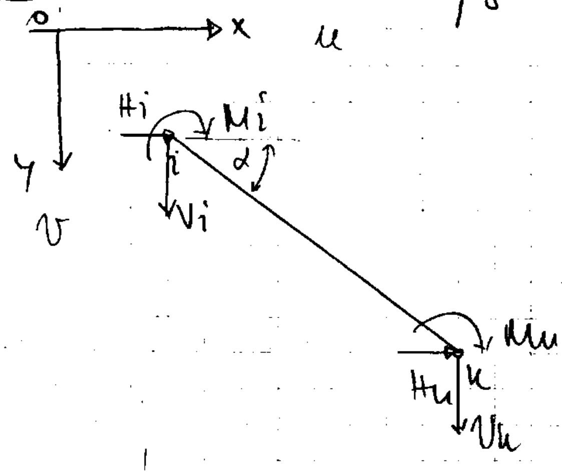
$$\bar{R} = K \cdot \bar{q} + \bar{Q} \qquad K$$

⊛ $u_{i,k}$ јер смо занемарили утицај $T \Rightarrow u=0$.

Успоставили смо везу између померања и обртања на крајевима штапа и сила на крајевима штапа.

~~Видимо да су различити~~ случајеви оптерећени одвојени.
Аксијално напрезање је потпуно одвојено од савијања. ($\frac{EF}{\ell}$, а на местима савијања је нула)

→ У глобалном координатном систему: XOY



$$\boxed{\bar{R} = T \cdot R}$$

T-матрица трансформације

$$
T = \begin{bmatrix}
\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\
-\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\
 & 0 & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$R = \begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_k \\ V_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{q} = T \cdot q}$$

* исте је трансформација и за померања и за силе.

$$\bar{R} = k\,\bar{q} + \bar{Q}$$

$$\bar{R} = k\,T\,q + \bar{Q}$$

$$R = T^{-1}(k\,T\,q + \bar{Q})$$

$$R = (T'\,k\,T)\,q + T'\bar{Q}$$

$$R = K^{*} \cdot q + \underbrace{T'\bar{Q}}_{Q}$$

$$\boxed{K^{*} = T' \cdot K \cdot T}$$

МАТРИЦА КРУТОСТИ У ГЛОБАЛНОМ коорд. сис.

$$\boxed{R = K^{*} q + Q}$$

За статички одређене штапове силе срачунавамо из одговарајућих померања.

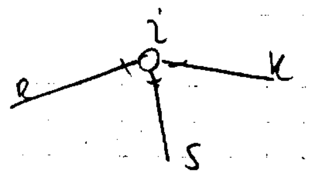
ЗАКЉУЧАК ⇒ Из конструкције смо извукли један број штапова: размотрили геометрију деформације, услове равнотеже. Имали смо 3 о.п.с. и имали 6 (9) диф. јна у којима су непознате силе и померања. Велики штапове на ст. одређене и неодређене. Ако су одређени из граничних услова по силама можемо одредити унутрашње сила у пресеку и преко фиктивних штапова рачунати померања и на крају силе. Код неодређених морамо различитим методама срачунати довољан број реакција да сведемо носач на статички одређен сис.

НОСАЧИ

Састоје се од једног или више штапова који су међусобно везани. Могу се састојати ~~само~~ из простих штапова и од греда. Прости штапови могу само да приме нормалну силу (имају само крутост на истезање) а греде имају и крутост на савијање (имамо M, T, N).

Носачи могу бити **равни**, линијски носачи. Ови су равни, тј. цео носач можемо представити у једној равни. Оптерећење делује само у тој равни. (раван носача)
Штапови могу бити двојако везани:

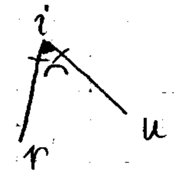
- зглавкаста веза (ЗГЛОБ)
омогућава да се суседни пресеци могу независно обртати у процесу деформације. Обртање φ_i за сваки од ових пресека бити различито



$\varphi_r \neq \varphi_k \neq \varphi_s$ што зависи од оптерећења

- крута веза: суседни штапови који су круто везани φ је исто, обртање φ_i је исто за оба

$\varphi_r = \varphi_k$



Крути угао је угао под којим стоје два круто везана штапа. За n везаних штапова биће $n-1$ крутих углова.

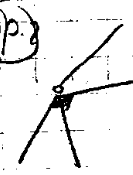
* Прости штапови могу бити само зглобно везани а греде и круто

сл.1

$m=4$

$m-1=3$ крута угла

сл.2



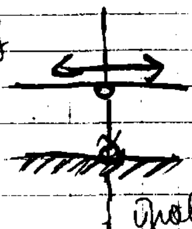
Штапови и крути углови спречавају релативна померања тачака штапова па се зову **УНУТРАШЊИ ЕЛЕМЕНТИ НОСАЧА**.

(Спречавају да се апсолутно пом...

Поред унутрашњих имамо и **ОСЛАЊАЈУЋЕ ЕЛЕМЕНТЕ** који спречавају померање тачака носача у односу на њену тачку у равни. То су ослонци и уклештења.

- **Ослонац** спречава померање ослоначкој тачки у правцу ослањања. (конструктивни део носача).

1 ослонац



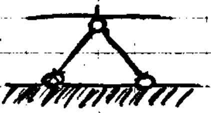
правац ослањања

- немогуће је померање тачке у вертикалном правцу без деформације.
- хоризонтално померање је дозвољено

1 ослонац

ПОКРЕТНО ЛЕЖИШТЕ

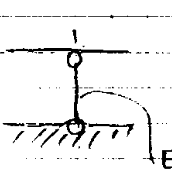
2 ослонца



НЕПОКРЕТНО ЛЕЖИШТЕ

Сваки ослонац може бити **крут** или **еластичан**

- крути



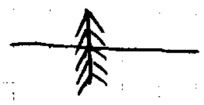
$EF \to \infty$

$\varepsilon = \frac{N}{EF} = 0$

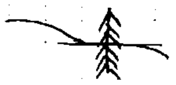
- ЕЛАСТИЧАН ОСЛОНАЦ, $EF \neq \infty$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EF} \neq 0$

• Уклештење је конструкцијски елемент који у уклештеном пресеку спречава обртање



- код пресек при деформацији не може да се окрене $\varphi_i = 0$.



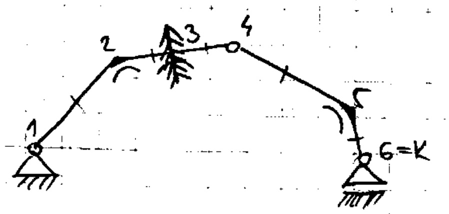
- тачка може да се помери у равни али пресек остаје прав при деформацији.

Комбинација непокретног лежишта и уклештења
је **непокретно уклештење**.
Може бити **круто** и **еластично**.

Број штапова **Z_s**
Број крутих углова **Z_k**
Број ослонаца **Z_o**
Број уклештења **Z_u** (може бити

Укупан број унутрашњих и спољашњих елемената штапа:
$$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u$$

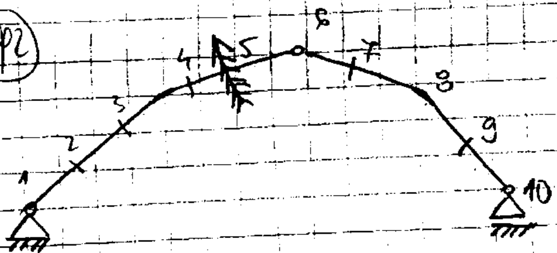
пр.



$k=6$
$Z_s = 5 \quad Z_o = 3$
$Z_k = 3 \quad Z_u = 1$

Морамо дефинисати почетак и крај штапа
• Тачке у којима су штапови међусобно везани су **ЧВОРОВИ** (1,...,k)

пр2



$K=10$

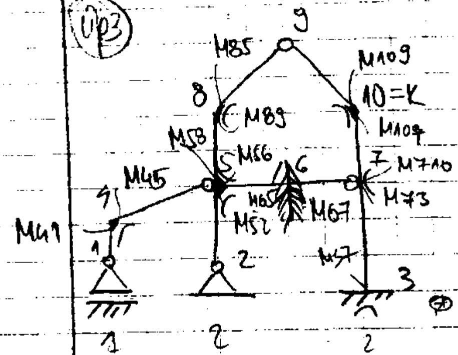
$Z_s=9$ $\quad Z_o=3$

$Z_k=7$ $\quad Z_u=1$

Број чворова је са доње стране ограничен а са горње није. Ми се задовољавамо на случају у ком је број чворова мин.

* број елемената је једнозначно одређен пошто је условљен број чворова и оптерећењем.

пр3



$K=10$

$Z_s=10$ $\quad Z_o=5$

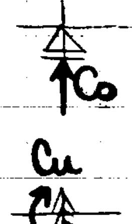
$Z_k=8$ $\quad Z_u=2$

* ипак мог М урачунати али може да се доби разлика услед компензираног момента.

ОСНОВНЕ НЕПОЗНАТЕ НОСАЧА

На носач делују спољашње силе:

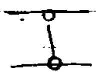
- активне (спољашње оптерећење P, M, q...)
- реактивне (силе којима се реакције ослонаца опиру померању ослоњених тачака)



спречено је вертикално померање

Co – реакција ослонца

Cu – моменат укљештења



ако иде ↓ делује сила супротна

Co .... Zo РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА

Cu .... Zu МОМЕНАТ УКЉЕШТЕЊА

код непомерљивих ослонаца реакција је произвољног правца

При граничним условима по силама су статичким независ.н $X_1=\delta_{ik}$ $X_2=M_{ik}$ $X_3=M_{ki}$

За аксијалну силу није битно да ли је прост штап или греда.

S_{ik} .... Z_s

Моменти се добијају из момената крутих углова (у упоришту из веза упорни до реакције).

Моменти у крутом углу узму су исти ако нема концентрисаних мом., ако има ови се слажу.

M_{ik}, M_{ki} ..... Z_k+m m - број групно крутог-везних штапова или број чворова у којима постоји бар један крути угао

$m=6$

претпостављамо да нема концентрисаних м...

У једном носачу имамо $Z_0+Z_1+Z_s+Z_k+m$ непознатих да решимо силе. (**статичке непознате**).

Да би решили померања потребне су нам 3 деформационе величине за сваки штап.

$\Delta l_{ik}=\bar{u}_k-\bar{u}_i$ u_k, u_i су зависне од промене дужине штапове.

На страни сигурности смо ако узмемо у обзир горњу непознате u_i и v_i тј. је број померања 2K. **u_i, v_i - непозната чворна померања**. $(2K-Z_s)$

2K .. број померања

Имамо 2 тј. јна из којих можемо одредити непознате. **укупно стат. и деф. непознатих** Z_0, Z_1, Z_s, Z_k+m+2K

$\Delta l_{ik}=\bar{u}_k-\bar{u}_i$

$\bar{u}_k$ $\bar{u}_i$

померања су зависна од деформација

(I) УСЛОВИ КОМПАТИБИЛНОСТИ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА НОСАЧА

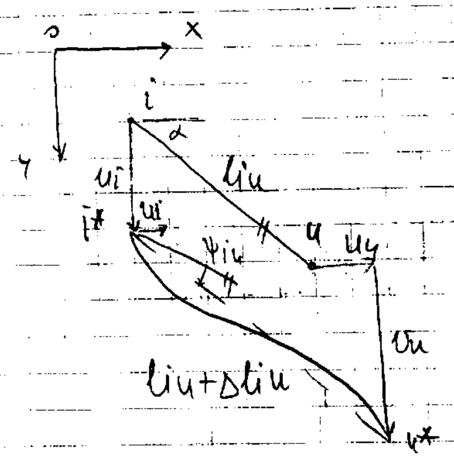
односе се на геометрију деформације

P

У општем случају успоставља везу између u_i и v_i чворова и деформацијских величина штапа Δl_{ik}, τ_{ik}, τ_{ki} и померања ослонаца c_{oi} и обртања укљештења c_{ri}. И таквих једн. има 4.

(1) односи се на промену дужине штапа (тетиве)

P



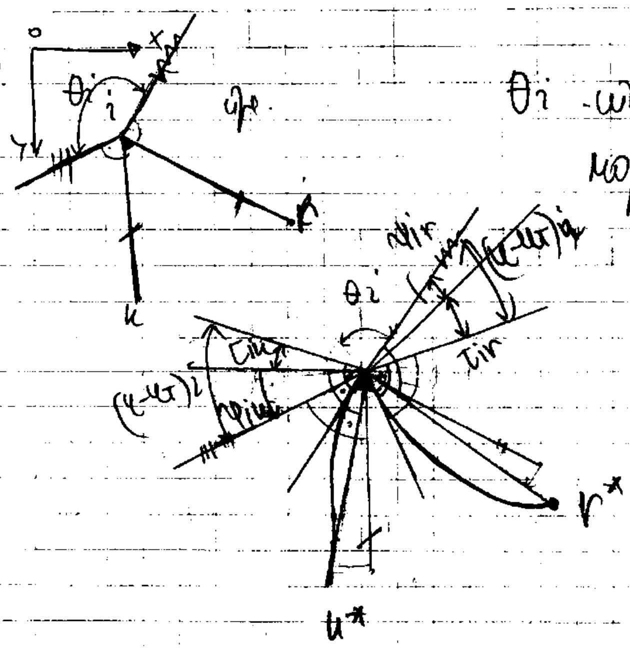
$$\boxed{F_1(i,k) = \Delta l_{ik}} \quad \ldots z_s$$

оваx једн. има колико и штапова

$$F_1(i,k) = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik}$$

(2) односи се на два круто спојена штапа

посматрамо њихову деформацију



θ_i током деформације мора остати const.

$$(\varphi-\varphi_T)_i = F_2(i,k) + \tau_{ik}$$
$$(\varphi-\varphi_T)_i = F_2(i,r) + \tau_{ir}$$
$$\Downarrow$$
$$F_2(i,k) = (\varphi-\varphi_T)_i - \tau_{ik}$$
$$F_2(i,r) = (\varphi-\varphi_T)_i - \tau_{ir}$$

$$F_2(i,k) = \psi_{ik}$$
$$F_2(i,r) = \psi_{ir}$$

$$\boxed{F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}} \quad \ldots z_k$$

$(\varphi-\varphi_T)_i - \psi_{ik} = \tau_{ik}$

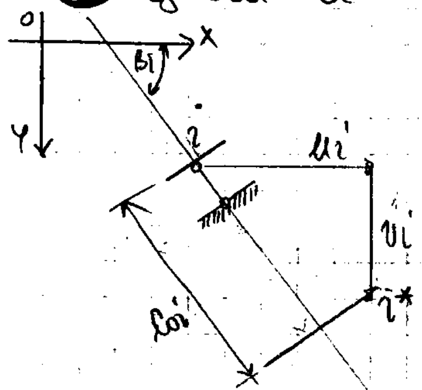
успоставља везу између обртања на крају штапа τ_{ik} и τ_{ir}

ових реакција има толико и других услова у носачу Zк.

изједначимо леву и десну страну.

релативно померање тврдог носача

(3) односи се на ослоначке тачке



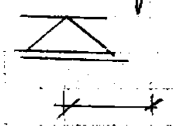
померање линије

i - ослоначка тачка
Претпоставили смо да је прешло у i*

$$\boxed{u_i\cos\beta_i + v_i\sin\beta_i = c_{oi}} \quad \dots Z_o$$

c_{oi} - померање ослонца у правцу ослонца.

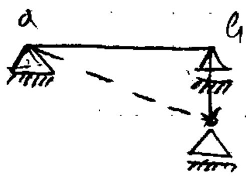
Вектор померања би смо нето дозвољено померање ослонца.



Померање зависи од тога да ли је ослонац крут или еластичан.

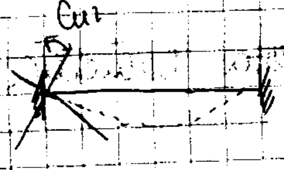
c_{oi} - СЛЕГАЊЕ ОБЈЕКТА (узели смо еластичне ослонце.)

Ако можемо да израчунамо та померања можемо срачунати и утицаје тих померања.
Ако је тло нестишљиво неће доћи до слегања.



неће имати никаквих сила услед c_b

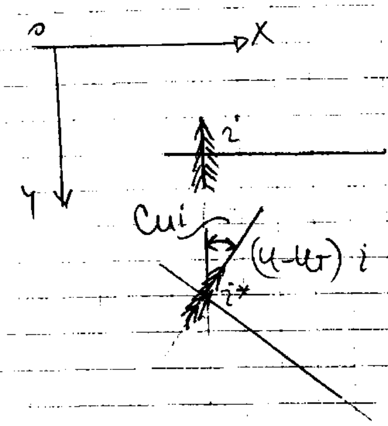
! Код статички одређених носача неће доћи до статичких утицаја у носачу (M, T, N)



Имамо $\varepsilon, \kappa, \varphi_T \Rightarrow N, T, M$.

Код статички неодређених носача померања ослонаца и обртање уклештења узрокују статичке утицаје

(4) односе се на обртање уклештења.



$(\varphi-\varphi_T)_i = \psi_{iu}+\tau_{iv} = C_{ui}$

$Z_u \ldots \boxed{F_2(i,u) = (\varphi-\varphi_T)_i - \tau_{iu}}$ УСЛОВ ЗА УКЉЕШТЕЊЕ

$\boxed{F_2(i,u) = C_{ui} - \tau_{iu}}$

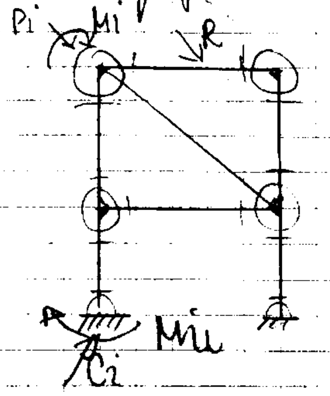
$F_2(i,u)$ је ф-ја померања чвора на крају штапа

Укупан број услова компатибилности померања чворова

$\Sigma\,(Z_o+Z_u+Z_k+Z_s)$

II Услови равнотеже.

Из једног носача исечемо пуним пресецима све чворове и носач смо раздвојили на низ чворова и низ штапова. Да би то стојало у равнотежи на пресецима штапова наносимо силе у пресеку.

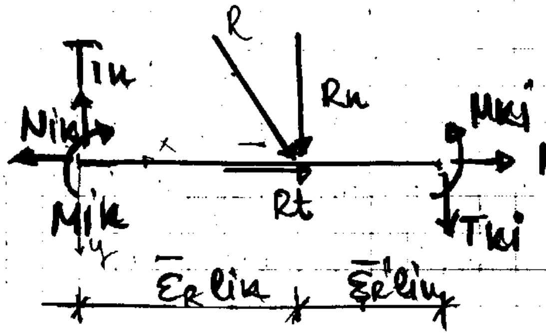


R, P_i, M_i - произвољно оптерећење.

Ако је ослоначки чвор или и реакцију ослонца и моменат уклештења.

Равнотежа штапа

1)



2s независних услова

(*) $T_{ik} = R_n \bar{\xi}'_R + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$ $\qquad N_{ik} - N_{ki} = R_t$

$T_{ki} = -R_n \bar{\xi}_R + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$ $\qquad \underbrace{N_{ik} + N_{ki} = 2S_{ik}}_{\Downarrow}$

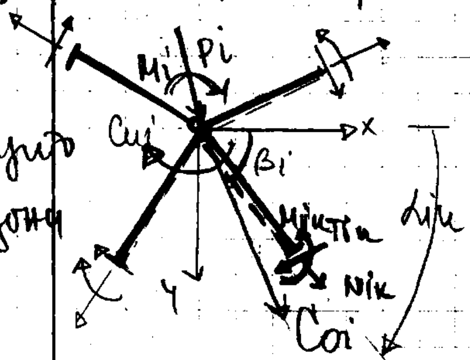
$$\underbrace{\begin{aligned} N_{ik} &= \frac{R_t}{2} + S_{ik} \\ N_{ki} &= -\frac{R_t}{2} + S_{ik} \end{aligned}}_{k}$$

за сваки штап по форму J-ну

2) Посматрамо равнотежу чвора

k независних чворова

1) круто везана



βi - угао ослонца

Coi - сила реакција ослонца

Cиi - моменат уклештења у i

Pi, Mi - оптерећење у чвору.

Pi (Pix, Piy)

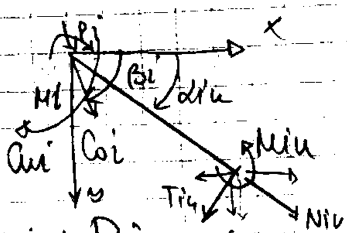
На пројекцији штапова по закону акције и реакције делују исте пресечне силе. Изабрали смо репрезентативни штап на чијем крају су силе Mik, Tik, Nik.

(*) прости штап прима N, може и T али не може моменат. Од тога зависи да ли ће посматрати EF или и EI. Ако је и у моделу I ће бити мали да не може да прими моменат савијања.

Код бетона се а.о. одређује које силе ће да прими носач.

→ Поставимо репрезентативни штап:

Можемо наћи силе 3 услова равнотеже:



(1) $\Sigma X = 0$: $\sum N_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum T_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0$

по свим штаповима

(2) $\Sigma Y = 0$: $\sum N_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum T_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0$

(3) $\Sigma M = 0$: $\sum \lambda_{ik}\cdot M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0$

у чвору

*Моменат зависи од тога који смо стрелицу изабрали за дољу.

* $\lambda_{ik} = \pm 1$ + у смеру казаљке на сату

мултипликатор − у супротном смеру.

зависно од смера момента

свих сила које делују у чвору.

2k:

*(1) $\sum S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cdot\cos\beta_i + H_i = 0$

$H_i = P_{ix} + \frac{1}{2}\sum R_t\cos\alpha_{ik} - \sum R_k\bar{\xi}_k'\sin\alpha_{ik}$

(2) $\sum S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0$

$V_i = P_{iy} + \frac{1}{2}\sum R_t\sin\alpha_{ik} + \sum R_k\bar{\xi}_k'\cos\alpha_{ik}$

m: (3) $\sum \lambda_{ik}M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0$

број чворова у којима постоји бар 1 крути угао − m

Ових ј-на има **2k+m**

Непознате (ослонаца) z_o C_{oi}

(уклештени) z_u C_{ui}

(аксијалне сил) z_s S_{ik}

(моменти) $z_k + m$ M_{ik}, M_{ki}

компон. померања $2K$ u, v

$$\left(z_o + z_u + z_s + z_k + m + 2K\right)$$

Једначине:

- услови компатибилности

$F_1(i,k) = \Delta l_{ik}$ .... z_s

$F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}$ .... z_k

$u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = C_{oi}$ (ком. ослонца) z_o

$F_2(i,k) = C_{ui} - \tau_{ik}$ .... z_u

~~+ услови равнотеже~~

Једначине: $\left(z_o + z_u + z_s + z_k + 2K + m\right)$

Број ј-на у једном носачу једнак је броју непознатих у једном носачу. Можемо добити непознате којима смо потпуно дефинисали стање сила и померања у том штапу.

* **Кинематичка дефи. носача** кад сист. штапова који је задатак да у границама еластичности материјала спречи померањи одређених тачака независно и у односу на сталне тачке у простору.
* **Статичка деф. носача** кад се ~~кад~~ штапова који у границама носивости материјала може да прими и пренесе произвољне спољ. силе, тј. на које прои. спољ. силе могу да стоје у равнотежи

КЛАСИФИКАЦИЈА НОСАЧА

услови компатибилности померања чворова штапа

$F_1(i,k) = \Delta l_{ik}$ .... z_s

$F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}$ z_k услови компатибилности

$u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi}$ ...... z_o померања чворова

$F_2(i,k) = c_{ki} - \tau_{ik}$ .... z_u

$F_1(i,k) = (u_k - u_i)\cos\alpha_{ik} + (v_k - v_i)\sin\alpha_{ik}$

$F_2(i,k) = \dfrac{(v_k - v_i)\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} = \psi_{ik}$

- u_i, v_i су непознате - померања чворова носача ..... $2K$
- Слободни чланови: $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}, c_{oi}, c_{ki}$

(1) $z_s + z_k + z_o + z_u = 2K$ најопштији случај

сис. има решење ⇒ $D \neq 0$: тада можемо одредити одговарајућа померања.

Нема слободне чланове

нема деформација ни померања ослонаца ни одступања уклештења

$\Delta l_{ik} = 0$
$\tau = 0$
$c_{oi} = 0$
$c_{ki} = 0$
$\Rightarrow u, v = 0$ тривијално решење. (нема померања чворова)

нема деформ ⇒ нема померања.

Ако је бр. ј-на = бр. непознатих и $D \neq 0$ је носач је кинематички просто стабилан.

КИНЕМАТИЧКИ (просто) **СТАБИЛАН НОСАЧ** је статички сис. штапова чији чворови не могу да се помере а да се при томе не деформише ни један

штит, не помери ни један ослонац и не трпи ни једно уклештење.
(Ако нема деформације ⇒ нема ни померања).

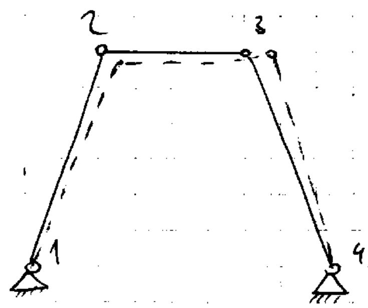
② $Z_s+Z_u+Z_o+Z_k>2K$

Број з-на је већи од броја непознатих величина. У том случају ће сис. моћи да се реши ако је $R(Z_s+Z_u+Z_o+Z_k)=2K$ и такви носачи се називају **кинематички вишеструко стабилни** носачи. Код њих је $(Z_s+Z_u+Z_o+Z_k)-2K$ број сувишних елемената у носачу. (Можемо их избацити да би дошли до кинематички просто стабилног штапа).

③ $Z_s+Z_u+Z_o+Z_k<2K$

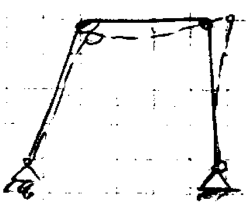
(или претходни случај а да је $D=0$)
Овакви носачи су **кинематички лабилни носачи**. Они не могу бити носачи конструкција.

(пр.)



$k=4$
$2K=8$ $\quad Z_u=0$
$Z_s=3$
$Z_k=0$ $\quad 7<8$
$Z_o=4$ кинематички лабилан

Не може да прими произвољно оптерећење. Може доћи до промене положаја а да не дође ни до какве деформације ⇒ МЕХАНИЗАМ.

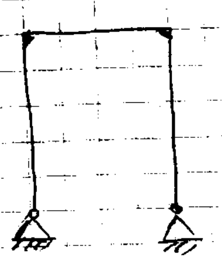


$2K=8$ $\quad Z_k=1$
$Z_o=4$ $\quad Z_s=3$
$Z_u=0$

$8=8$ ✓
кин. просто стабилан

он не може да се помери а да не дође до деформације штапа. (постојано су Δl_{ik}, t_{ik}, t_{ki}).

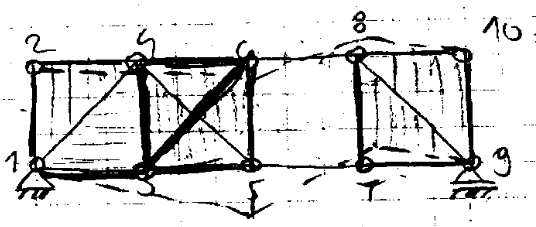
вишеструко кинематички стабилан



$2K=8 \quad Z_o=4$

$Z_s=3 \quad Z_u=6$

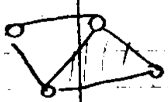
$Z_k=2 \quad \overline{9>8}$



$Z_s=17 \quad Z_o=3$

$Z_k=0 \quad Z_u=0$

$2K=20 \quad 20$



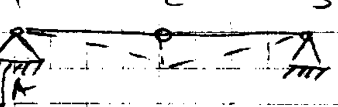
крута плоча

Неправилан распоред елемената

4-5 је вишак

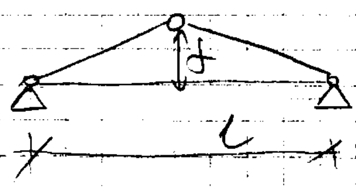
⇒ 2 ј-не ће бити линеарно зависне. (услов да је $\Delta l_{45}=0$ је већ садржан у условима ◻ не помера.

критична конфигурација



$Z_s=2 \quad 2K=6$

$Z_o=4$



има одговарајућу стрелу.

Код критичне конфигурације може доћи до мали[х] померања без деформације. Ако је f мало у односу l конфигурација ће бити блиска критичној

⊛ Сис-са неправилно распоређеним елементима имају коначна померања, а сис-са критичном конфигурацијом ∞ мала померања али не могу бити носачи

СТАТИЧКА КЛАСИФИКАЦИЈА ШТАПА

услови равнотеже свих чворова и штапова

$$\sum S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0$$

2k $\quad \sum S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0$

m $\quad \sum \lambda_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0$

укупан бр. ј-на: $2k+m$

непознате: S_{ik} ... z_s

M_{ik}, M_{ki} .... $z_k + m$

C_{oi} .... z_o

C_{ui} .... z_u

$$z_s + z_o + z_u + z_k + m$$

① Најједноставније

Coi, Cui, M, T, N зависе само од оптерећења, и једнаке су 0 ако нема оптерећења.

$$2k+m = z_s + z_k + z_o + z_u + m$$

$$D \neq 0.$$

Овакви носачи код којих је бр. ј-на једнак броју непознатих се називају **СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИ**.

$2k = z_s + z_k + z_o + z_u \Rightarrow$ Статички одређени носачи су истовремено кинематички стабилни.

② Број непознатих већи од броја ј-на

$$z_s + z_u + z_o + z_k + m > 2k + m$$

$$D \neq 0$$

Из услова равнотеже се не могу рачунати силе у пресе-
цу. Ови носачи су статички неодређени.

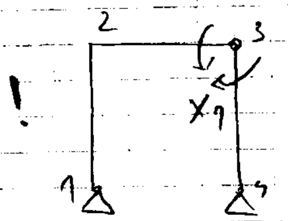
Сz, Сm, M, T, N могу да постоје и код неоптерећених носача

$\Rightarrow (z_s+z_u+z_o+z_u) > 2k$ **СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ**

$\Rightarrow$ Статички неодређени носачи су кинематички вишеструко стабилни.

$(z_s+z_k+z_o+z_u+u_i)-(2k+u_i)$ - број статичких неодређених величина носача.

!



$\delta_{11}X_1 + \delta_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{\delta_0}{\delta_{11}}}$

Код обих носача постоји више унутрашњих равнотежних стања ($x_1=1$ ...)

Код статички одређених постоји само једно унутрашње равнотежно стање.

Статички неодређене носаче карактерише више унутрашњих равнотежних стања

③ Статички преодређени носачи

$$2k+u_i > z_s+z_u+z_o+z_u+u_i$$

Не могу да приме и пренесу оптерећење у границама еластичности.

$2k-(z_s+z_u+z_o+z_u)$ - број степени слободе кретања

МОГУЋЕ РАВНОТЕЖНО СТАЊЕ. МОГУЋЕ СТАЊЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНТА ШТАПА

$$dH + dy\,p_x = 0$$
$$dV + p_y\,dx = 0 \qquad (A)$$
$$dM + H\,dy - V\,dx = 0$$

УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЧВОРОВА

Услови равнотеже чворова штапа:

$$\sum N_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum T_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0$$
$$\sum N_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum T_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0 \qquad (B)$$
$$\sum \lambda_{ik} M_{ik} + C_{mi} + M_i = 0$$

ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА (ЕЛЕМЕНТАРНЕ)

Деформацијске величине штапа

$$du = \varepsilon\,dx - \varphi\,dy$$
$$dv = \varepsilon\,dy + \varphi\,dx \qquad (C)$$
$$d(\varphi - \varphi_T) = -\kappa\,ds$$

УСЛОВИ КОМПАТИБИЛНОСТИ ШТАПА

Услови компатибилности померања

$$F_1(i,k) = \Delta l_{ik}$$
$$F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik} \qquad (D)$$
$$F_2(i,k) = C_{mi} - \tau_{ik} \qquad (C_{mi} = (\varphi - \varphi_0)_i)$$
$$u_i\cos\beta_i + v_i\sin\beta_i = C_{oi}$$

ДЕФОРМАЦИЈСКЕ ВЕЛИЧИНЕ ЦЕЛОГ ШТАПА.

$$\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon\,ds$$
$$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}}\int_i^k \left[\xi' l_{ik}\kappa - \varphi_T\right] ds \qquad (E)$$
$$\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ik}}\int_i^k \left[\xi l_{ik}\kappa + \varphi_T\right] ds$$

Решавање ових ј-на је много лакши проблем од се уводе 2 екстремална принципа помоћу ће једначине могу да се замене.

① МОГУЋЕ РАВНОТЕЖНО СТАЊЕ носача, чине скуп система спољашњег распоређеног оптерећења p_x и p_y, концентрисаних сила P_i и момената M_i у чвору, реакција ослонаца C_{oi} и момената уклештења $C_{\varphi i}$, сила у пресецима H, V, M (N, T) који идентички задовољава једначине (A) и (B)

(МРС носача оптерећеног распоређеним спољашњим оптерећењем p_x, p_y и концентрисаним силама P_i и моментима M_i је скуп сис. реакција ослонаца C_{oi}, $C_{\varphi i}$ и сила у пресецима N, T и M (H, V) које задовољавају услове равнотеже свих штапова (A) и свих чворова носача (B))

-Код статички одређених носача за дато оптерећење p_x, p_y, P_i, M_i постоји само један сис. реакција C_{oi}, $C_{\varphi i}$ и сила у пресецима H, V, M који задовољавају (A) и (B) тј. постоји само једно равнотежно стање (могуће) које одговара том оптерећењу и то је равнотежно стање које се у носачу стварно јавља.

-Код статички неодређених носача за p_x, p_y, P_i, M_i постоји више C_{oi}, $C_{\varphi i}$, H, V, M који задовољавају (A) и (B), тј. постоји више могућих равнотежних стања тог носача. Па је равнотежно стање само једно од свих тих унутрашњих стања.

(Ако гледамо X_1 или X_2 или X_3 имаћемо различита равнотежна стања. Што је носач више статички неодређен, више равнотежних стања имамо.)

② **МОГУЋЕ СТАЊЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ** носача је скуп свих померања носача u, v и обртања φ, деформацијских величина шипки Δl_{ik}, τ_{ik}, τ_{ki} и померања ослонаца c_{0i} и обртања уклештења $c_{\varphi i}$ који су идентички задовољавају ј-не (C), (D), (E).

- <u>Код ст. одређених носача</u> (кинематички просто стабилних) број услова компатибилности померања чворова је = броју померања чворова и за c_{0i}, $c_{\varphi i}$, Δl_{ik}, τ_{ik} односно $\kappa, \varepsilon, \varphi_T$ могу се одредити померања која задовољавају ове услове.

- <u>Код ст. неодређених</u> ови услови су испуњени само за неке вредности слободних чланова c_{0i}, $c_{\varphi i}$, Δl_{ik}, τ_{ik} односно $\varepsilon, \kappa, \varphi_T$.

ВЕЗА МРС И МСД

~ МРС
≈ МДС.

Да би успоставили везу посматрамо неки статички одређен или ст. неодређен носач и два стања у том носачу: једно могуће равнотежно стање носача дефинисано са $\tilde{p}_x$, $\tilde{p}_y$, $\tilde{P}_i$, $\tilde{M}_i$, $\tilde{H}$, $\tilde{V}$, $\tilde{M}$ $(\tilde{N}, \tilde{T})$, $\tilde{c}_{0i}$, $\tilde{c}_{\varphi i}$ и једно деформацијски могуће стање носача дефинисано са: $\approx u$, $\approx v$, $\approx \varphi$, $\approx \varepsilon$, $\approx \kappa$, $\approx \varphi_T$, $\approx \Delta l_{ik}$, $\approx \tau_{ik}$, $\approx c_{0i}$, $\approx c_{\varphi i}$.

Ова веза важи и за ст. одређене и ст. неодређене носаче. Ова два стања су међусобно независна.

Помножимо три услове равнотеже:

$$d\tilde H + \tilde p_x\,dy = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde u}$$
$$d\tilde V + \tilde p_y\,dx = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde v}$$
$$d\tilde M - \tilde V dx + \tilde H dy = 0 \qquad / -(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)$$

$$\int_i^k \oplus \;\Rightarrow\; \underbrace{\int_i^k \tilde{\tilde u}\,d\tilde H - \int_i^k(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\tilde H\,dy} + \underbrace{\int_i^k \tilde{\tilde v}\,d\tilde V + \int_i^k \tilde V(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,dx} - \int_i^k(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,d\tilde M$$
$$+ \int_i^k \tilde p_x\,\tilde{\tilde u}\,dy + \int_i^k \tilde p_y\,\tilde{\tilde v}\,dx = 0$$

$$\int_i^k \tilde{\tilde u}\,d\tilde H - \int_i^k(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\tilde H\,dy = \left[\tilde{\tilde u}\cdot\tilde H\right]_i^k - \int_i^k \tilde H\,d\tilde{\tilde u} - \int_i^k \tilde H(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,dy$$
$$= \left[\tilde H\cdot\tilde{\tilde u}\right]_i^k - \int_i^k\left[\tilde H\,(\underbrace{d\tilde{\tilde u}+\tilde{\tilde\varphi}\,dy}_{\tilde{\tilde\varepsilon}\,dx} - \tilde{\tilde\varphi}_T\,dy)\right]$$
$$= \left[\tilde H\cdot\tilde{\tilde u}\right]_i^k - \int_i^k\left[\tilde H\,(\tilde{\tilde\varepsilon}\,dx - \tilde{\tilde\varphi}_T\,dy)\right]$$

$$\int_i^k \tilde{\tilde v}\,d\tilde V + \int_i^k \tilde V(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,dx = \left[\tilde{\tilde v}\,\tilde V\right]_i^k - \int_i^k \tilde V\,d\tilde{\tilde v} + \int_i^k \tilde V(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,dx$$
$$= \left[\tilde{\tilde v}\,\tilde V\right]_i^k - \int_i^k \tilde V\,(\underbrace{d\tilde{\tilde v}+\tilde{\tilde\varphi}\,dx}_{\tilde\varepsilon\,dy} + \tilde{\tilde\varphi}_T\,dx)$$
$$= \left[\tilde{\tilde v}\,\tilde V\right]_i^k - \int_i^k \tilde V\,(\tilde{\tilde\varepsilon}\,dy + \tilde{\tilde\varphi}_T\,dx)$$

$$-\int_i^k(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\,d\tilde M = -\left[\tilde M\cdot(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\right]_i^k + \int_i^k \tilde M\,\overbrace{d(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)}^{-\tilde{\tilde\kappa}\,ds} =$$
$$-\left[\tilde M\cdot(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)\right]_i^k - \int_i^k \tilde M\,\tilde{\tilde\kappa}\,ds$$

$$\Rightarrow \left[\tilde M(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T) + \tilde H\,\tilde{\tilde u} + \tilde V\cdot\tilde{\tilde v}\right]_i^k + \int_i^k \tilde p_x\,\tilde{\tilde u}\,dy + \int_i^k \tilde p_y\,\tilde{\tilde v}\,dx =$$

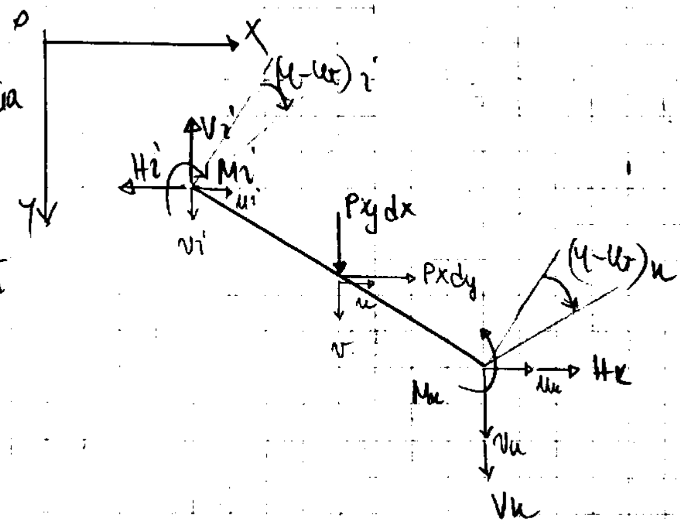
$dx = ds\cos\alpha$
$dy = ds\sin\alpha$

$$= \int_i^k\left[\tilde M\,\tilde{\tilde\kappa} + \tilde{\tilde\varepsilon}\,\underbrace{(\tilde H\cdot\cos\alpha + \tilde V\sin\alpha)}_{\tilde N} + \tilde{\tilde\varphi}_T\cdot\underbrace{(\tilde V\cos\alpha - \tilde H\sin\alpha)}_{\tilde T}\right]ds$$
$$= \int_i^k(\tilde M\,\tilde{\tilde\kappa} + \tilde{\tilde\varepsilon}\,\tilde N + \tilde T\,\tilde{\tilde\varphi}_T)\,ds$$

$$\overbrace{\left[-\tilde M(\tilde\varphi-\tilde\varphi_T)+\tilde H\cdot\tilde{\tilde u}+V\cdot\tilde{\tilde v}\right]_i^k}^{1}+\overbrace{\int_i^k(\tilde p_x\tilde u\,dy+\tilde p_y\tilde v\,dx)}^{2}=$$
$$\int_i^k[\tilde M\tilde{\tilde\varkappa}+\tilde{\tilde\varepsilon}\cdot\tilde N+\tilde{\tilde\gamma}\cdot\tilde T]ds$$

★ Физички смисао.

*силе на крају штапа N_i, T_i, N_k, M_k су једнаке силама у чвору али су супротног смера.



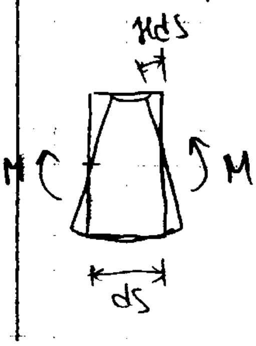
позитивно померање су у смеру позитивних оса x и y ⇒ u_i, v_i, $(\varphi-\varphi_T)_i$ је позитивно

$[-M(\tilde\varphi-\tilde\varphi_T)+\tilde H\tilde u+\tilde V\cdot\tilde v]_i^k$ - је рад сила и момената на крајевима штапа при њеном померању и обртању

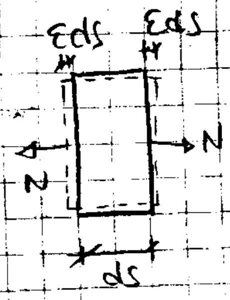
$\int_i^k(\tilde p_x\tilde u\,dy+\tilde p_y\tilde v\,dx)$ - је рад расподељених сила дуж штапа

$\int_i^k(\tilde M\tilde{\tilde\varkappa}+\tilde{\tilde\varepsilon}\tilde N+\tilde{\tilde\gamma}\cdot\tilde T)dS$ - је рад сила на крајевима штапа (рад активних и реактивних сила) и оптерећења могућег равнотежног стања штапа на одговарајућим померањима и обртањима могућег стања деформације.

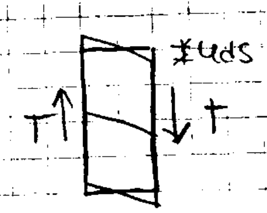
Посматрамо елемент штапа dS:



рад момената на промени кривине ϰds.



рад нормалне силе на дилатацији εds



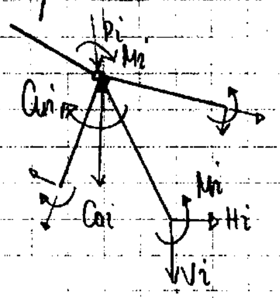
рад трансферзалних сила на померању ψds

За цео носач:

$$\sum_i \left[-\tilde M(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)+\tilde H\,\tilde{\tilde u}+\tilde V\tilde{\tilde v}\right]_i^u+\sum_i\int_i(\tilde p_x\tilde{\tilde u}\,dy+\tilde p_y\tilde{\tilde v}\,dx)$$

$$=\sum_i\int_i^u\left[\tilde M\tilde{\tilde\varkappa}+\tilde\varepsilon\tilde N+\tilde{\tilde\psi}_T\cdot\tilde T\right]dS$$

(*) Исјеци сав носач на штапове и чворове и посматрај репрезентативни чвор.



Рад сила на пресјецима свих штапова једнак је раду сила на пресјецима свих штапова у чвору. Рад сила у чвору = раду спољашњих сила у чвору.

$\sum_i \left[-\tilde M(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)+\tilde H\cdot\tilde{\tilde u}+\tilde V\cdot\tilde{\tilde v}\right]_i^u$ можемо замијенити рад спољашњих сила у том чвору на одговарајућим померањима

$$\sum_i\left[-\tilde M(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)+\tilde H\cdot\tilde{\tilde u}+\tilde V\cdot\tilde{\tilde v}\right]_i^u=\sum_i\tilde P_i\tilde{\tilde S}_i+\sum_i\tilde M_i(\tilde{\tilde\varphi}-\tilde{\tilde\varphi}_T)+\sum_i\tilde C_{oi}\cdot\tilde{\tilde c}_{oi}+\sum_i\tilde C_{ui}\cdot\tilde{\tilde c}_{ui}$$

$\sum P_i S_i$ – померање силе P_i у смеру S_i

$$\sum_i \int_i^u = \int_s \text{ свих штапова}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{S}}_i + \sum_i \tilde{M}_i(\tilde{\tilde{u}}-\tilde{\tilde{\varphi}})_i + \int_s (p_x u\,dy + p_y v\,dx)} +$$

$$\underbrace{\sum_i C_{oi} c_{oi} + \sum_i C_{ui} c_{ui}} = \int_s (M\varkappa + N\varepsilon + T\psi)\,dS$$

рад реакцијских сила на одговарајућим померањима. $= \sum Cc$

$\sum \tilde{P}\tilde{\tilde{S}}$ рад свих активних спољашњих сила у носачу. Рад расподељених сила по штапу и концентрисаних сила у чвору $= \sum \tilde{P}\tilde{\tilde{S}}$

Циљ је био: успоставити везу МРС и МСД једног носача:

ВЕЗА МРС И МСД.

$$\sum \tilde{P}\tilde{\tilde{S}} + \sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \int_s (\tilde{M}\tilde{\tilde{\varkappa}} + \tilde{N}\tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T}\tilde{\tilde{\psi}})\,dS$$

Из ове везе следе 2 основна принципа у теорији конструкција, принцип виртуелних сила и принцип виртуелних померања.
Претпоставићемо да је једно од ова два стања виртуелно а друго стварно.

! Принцип виртуелних сила

Ако у ј-ну за могуће стање деформације унесемо померања и деформацијске величине, које се у носачу стварно јављају, а уместо могућег равнотежног стања обележимо цртом, добијамо ј-ну:

$$\sum \bar{P} s + \sum \bar{C} c = \int_s (\bar{M}\varkappa + \bar{N}\cdot\varepsilon + \bar{T}\cdot\psi)\,dS$$

Силе су замишљене а деформације стварне.

Принцип виртуелних померања

Кад у ј-не за могуће равнотежно стање деформација унесемо реакције и силе у пресецима које се под датим оптерећењем јављају, а уместо могућег стања деформације обележимо цртом добијемо ј-ну:

$$\sum P\bar{\delta} + \sum C\bar{c} = \int_s (M\bar{\varkappa} + N\cdot\bar{\varepsilon} + T\cdot\bar{\psi}_T)ds$$

Замишљена померања стварних сила.

Из ових ј-на видимо да ће виртуелна померања бити ∞ мала померања која задовољавају услове компатибилности померања носача.

Применом ПВС можемо одредити деформацију у носачу $(\varepsilon, \varkappa, \psi)$ а ПВП силе у носачу. Принципи важе и за статички одређене и неодређене носаче.

Применом ПВП можемо срачунати све што и из услова равнотеже тј. ј-на (А) и (В), а применом ПВС све што може да се срачуна из деформацијских услова тј. ј-на (С) (D).

. ОПШТИ ПОЈМОВИ О УТИЦАЈНИМ ЛИНИЈАМА.

утицаји: N, T, M (H, V), u, v, φ (утицаји у носачу)

УТИЦАЈИ У НОСАЧУ

Услед деловања спољашњих утицаја (активне силе или оптерећења, t, померања ослонаца, ...) у носачима настају реакције ослонаца ..., ..., силе у пресецима, померања ослонаца и деформације и.д. које називамо **УТИЦАЈИМА У НОСАЧУ**

На основу 3 осн. претпост. добили смо линеарну теорију конструкција, тј. важи принцип суперпозиције. Можемо сабирати утицаје оптерећења, линеарно додавати...
У нелинеарној теорији не важи принцип суперпозиције.

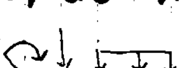
* На све наше носаче делује неко оптерећење:

1) ПО НАЧИНУ ДЕЛОВАЊА
2) ПО НАЧИНУ ПРЕНОШЕЊА
3) ПО ВРЕМЕНУ ДЕЛОВАЊА (ТРАЈАЊА)

1) по начину деловања:

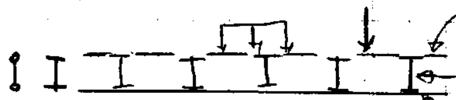
- расподељене силе и расподељене моменте
- концентрисане силе и концентрисане моменте

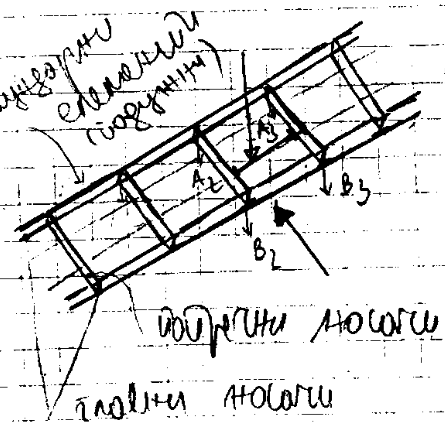
2) по начину преношења:



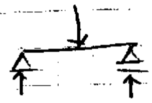
* оптерећења која се директно преносе на носач (примају оптерећење по целој дужини)
* оптерећења која индиректно, посредно преносе на носач (само у одређеним тачкама).

индиректно: оптерећење се преноси на носач само преко попречних носача.

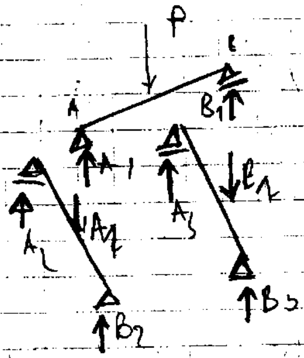


попр. носачи су попречно носачи оптерећени ⊥ на своју раван пр. 

роштиљ носача (оптерећење делује ⊥ на раван носача).



сила система просте греде
- занимају нас утицаји на главни носач

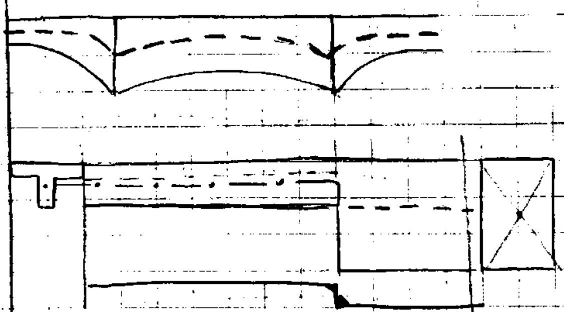


-сила на главном носачу може да делује само на местима потпоре носача.

Низ тачака у којима је носач посредно оптерећен = (чворови носача)

сис. свих секундарних носача може ићи на пр. систем простих греда.

пр. Бронич мост



системна линија једног штапа пролази кроз тежиште поп. пресека.

спојимо ове две системне линије неким штапом и ортогоналним углом.

3) **по времену трајања:**

* стално оптерећење (сопствена тежина конструкције и свих елемената који су на њу уграђени).
* повремено оптерећење (оно које се повремено делују на конструкцију, ветар, снег

оптерећење од људске навале, у ситуација...

* изузетно оптерећење (земљотрес, ударн...
...)...

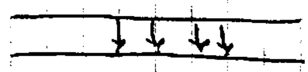
За свако од ових оптерећења постоје **фактори сигурности** - коефи. са којима их рачунамо након конструисања. У њих смо урачунали све нетачности и упрошћавања, недовољно познавање материјала, ...

$\gamma = 1{,}6\ ;\ 1{,}8\ldots$ 60% смо увећали оптерећење

Врсту и величину оптер. које користимо одређујемо анализом опт.

Покретно оптерећење може бити приказано као једнолико подељено опт. или сис. везаних концентрисаних сила.

- једнако подељено може да потиче од људске навале

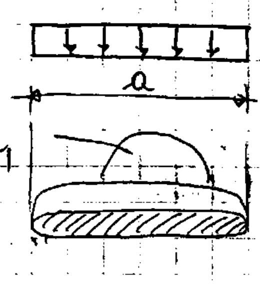


(људска навала)

једнолико подељено опт. непре-кидне дужине (80 kg по 1 m²)·γ

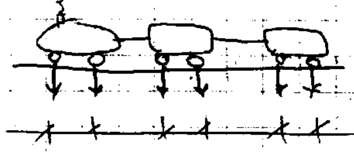
- једнолико подељено оптерећење тачно одређене дужине.

за оптерећење од људи, ускладиштеног материјала, моторних возила...



- сис. везаних концентрисаних сила. за друмска и друга возила

њихово возило које мост треба да поднесе



везане су силе сталним размацима

фиксна растојања

износи и интензитети } везане су силе сталним разм.

Оптерећења су дефинисана одговарајућим прописима.

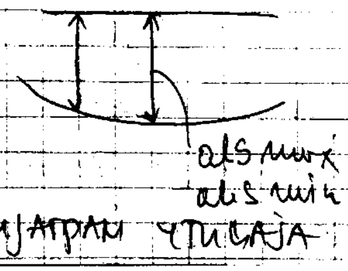
Ако се сила креће, моменти савијања у некој про-извољној тачки се мења у зависности од положаја силе на конструкцији.

Треба наћи највећу и најмању вредност утицаја (утицаја) у зависности од положаја силе.
Тражимо max и min утицај у носачу.
max – позитиван највећи утицај у носачу
min – највећи негативан утицај у носачу.

(општији опис)
Положај силе за коју је утицај max је **ОПАСАН**, или **МЕРОДАВАН** положај за вредност неког утицаја у том пресеку.

Опасан положај оптерећења за сваки пресек и за сваки утицај у носачу у општем случају је други.
Треба одредити дијаграм свих утицаја у носачу који ће давати највећи утицај – дијаграм екстремних вредности утицаја.

Дијаграм екс. вре. утицаја је такав дијаграм где свaки ордината утицаја представља највећу вредност утицаја у датом пресеку. Највећи од свих утицаја се назива **АПСОЛУТНИ МАКСИМУМ** (АПСОЛУТНИ МИНИМУМ.) (≠ дијаграм момената (5се мења M=const)

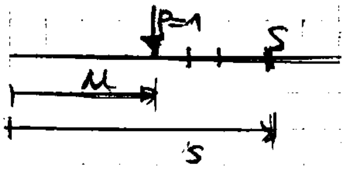


димензионишемо сваки пресек за тај максимални утицај.

∇ R ⊛ ДИЈАГРАМ УТИЦАЈА НИЈЕ ИСТО ШТО И ДИЈАГРАМ ЕКСТРЕМ. ВРЕДНОСТИ УТИЦАЈА

ПОЈАМ УТИЦАЈНЕ Ф-ЈЕ И УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ

Замислимо да у једном носачу у пресеку s посматрамо неки утицај. Вредност утицаја у пресеку s биће ф-ја од s и u: $Z=f(s,u)$ s – место утицаја, u – место деловања
Z – било који утицај (N, T, M (H, V), φ, v, ψ ...) P=1



P – покретна јединична сила која се креће по носачу, и има положај од u
s – положај пос. пресека.

→ Z(s,u) за случај када је **u=const** положај јединичне силе је const.
$Z(s,u) = Z(s)$
ако је z=M онда је z дијаграм момената.

моментна линија није утицајна линија

Графички приказ би био **дијаграм утицаја** у носачу (или неки други утицаја).

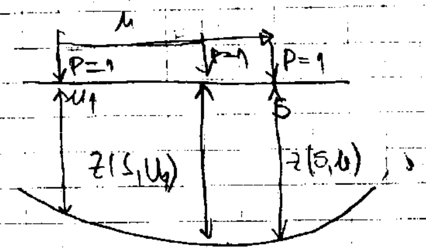
→ Z(s,u) за **s=const** a u се мења

$Z(s,u) = Z(u)$ утицај z на месту s за различите положаје јединичне силе.

Ова ф-ја је промена утицаја z у пресеку s кад се P=1 креће по носачу. Ова ф-ја се назива **УТИЦАЈНА Ф-ЈА**.

Z (s,u) УТИЦАЈНА Ф-ЈА, а њен графички приказ је **УТИЦАЈНА ЛИНИЈА**. Ако вредности утицаја z на месту u нанесемо у правцу нападне линије P=1 добићемо утицајну линију за утицај z на месту s.

Деф **Утицајне линије** су праве или криве линије чији облик зависи од врсте носача, врсте утицаја у по-сматраном пресеку и од начина преношења оптерећења (директно или посредно оптерећени носачи).



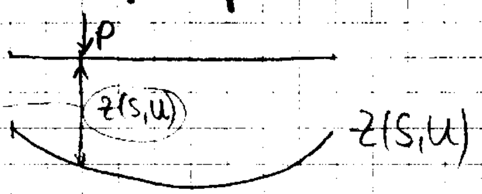
~~Z(S,U) представља вредност утицаја у пресеку S када је P=1 на месту u.~~

▽ Утицајна линија је увек везана за један пресек, вредности утицаја у пресеку S за одређени положај јединичне силе P=1.

Ако знамо утицајну линију можемо одредити утицаје услед произвољног оптерећења које има исти правац као P=1 за коју је нацртана утицајна линија.

СРАЧУНАВАЊЕ УТИЦАЈА ИЗ УТИЦАЈНИХ ЛИНИЈА

1) Сис. концентрисаних сила

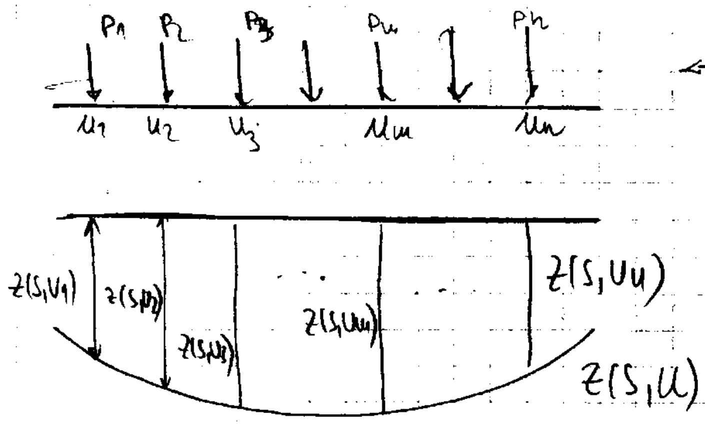


$$Z_S = P \cdot Z(S,U)$$

→ $Z_S = P \, Z(S,U)$

утицајну линију смо нацртали за јединичну силу.

На утицајној линији су утицаји у неком т.т. S услед јединичне силе P=1 која се креће. Када делује сила P онда је утицај $Z_S = P * \underset{(P=1)}{Z(S,U)}$



← пр. воз у једном положају

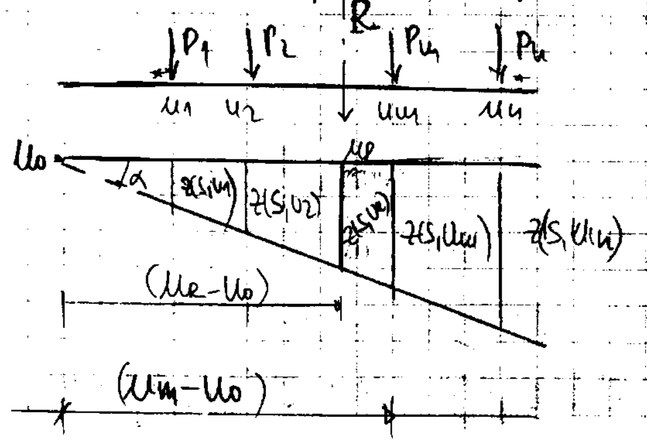
$Z(S,U_1)$ - утицај у пресеку S кад имамо силу P_1 на U_1 а остале силе не дају утицај

утицај у S

$$\boxed{Z_S=\sum_{m=1}^{n} P_m \cdot Z(S,U_m)}$$

вредност утицаја

→ Ако је утицајна линија <u>права линија.</u>



$$R=\sum_{m=1}^{n} P_m$$

положај R: $\Sigma M_{U_1} \vee \Sigma M_{U_n}$

$$Z(S,U_m) = (U_m-U_0)\cdot tg\alpha \quad m=1,2,\dots n$$

сила * крак = статички моменат P_m у односу на O.

$$Z_S = tg\alpha \sum_{m=1}^{n} P_m\cdot(U_m-U_0)$$

моменат концентрисаних сила замењујемо моментом резултанте. у односу на O

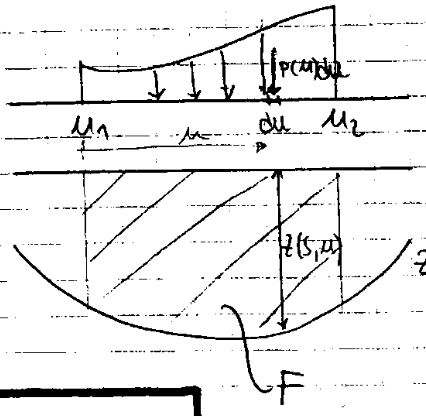
$$\sum_{m=1}^{n} P_m (U_m-U_0) = R\cdot(U_R-U_0)$$

$$Z_S = tg\alpha\cdot R(U_R-U_0) = R\cdot Z(S,U_R)$$

$$\boxed{Z_S = R\cdot Z(S,U_R)}$$

Када је утицајна линија права линија можемо срачунати вредност утицаја у S за неки положај S: множећи резултанту са ординатом утицајне линије испод R.

2) РАСПОДЕЉЕНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ



- утицајну линију смо конструисали за P=1. Па користимо диференцијално мали део du и сила је $p(u)\cdot du$ која је елементарна.

$$\boxed{Z_s = \int_{u_1}^{u_2} p(u)\cdot z(s,u)\,du}$$

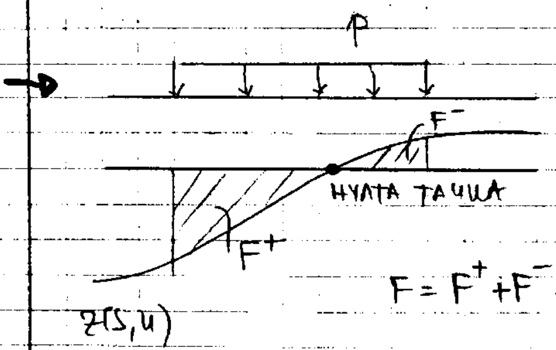
F - утицајна површ p(u) du - ЕЛЕМЕНТАРНА СИЛА

→ **$p(u) = p = const$** ЈЕДНАКОРАСПОДЕЉЕНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ

$$Z_s = p\underbrace{\int_{u_1}^{u_2} z(s,u)\,du}_{} = p\cdot F$$

$$\boxed{Z_s = pF}$$

интензитет опт. * површина дијаграма утицајне испод распод. опт.

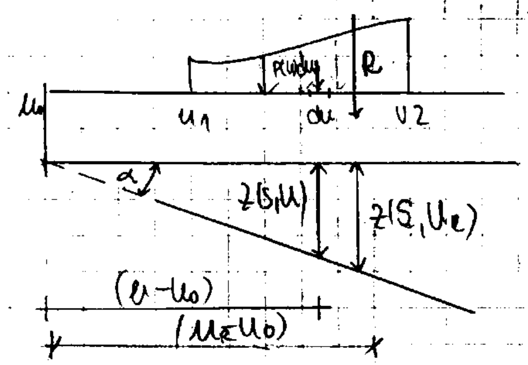


$$Z_s = p\cdot(F^+ + F^-) = pF$$

$$F = F^+ + F^- = F^+ - |F^-|$$

(РАЗДЕЛНИЦА)
НУЛТА ТАЧКА је тачка где утицајна линија прелази из позитивног у негативни део (тј. мења знак). Линија сече апсцисну осу и дели позитивне од негативних делова утицајне линије.

→ Случај произвољног оптерећења на утицајну праву линију



P(u)du – елементарна сила.

$$z(S,u) = (u-u_0)\cdot tg\alpha$$

$$Z_S = tg\alpha \int_{u_1}^{u_2} P(u)\cdot(u-u_0)\,du$$

ВРЕДНОСТ УТИЦАЈА

P(u)·du – елементарна сила

P(u)·du·(u−u₀) статички моменат ове елементарне силе у односу на 0.

$$\int_{u_1}^{u_2} P(u)(u-u_0)\,du = R\cdot(u_R-u_0)$$

$$R = F = \int_{u_1}^{u_n} P(u)\,du$$

делује у T дијаграма оптерећења

$$Z_S = tg\alpha\cdot R(u_R-u_0)$$

$$\boxed{Z_S = R\cdot z(S,u_R)}$$

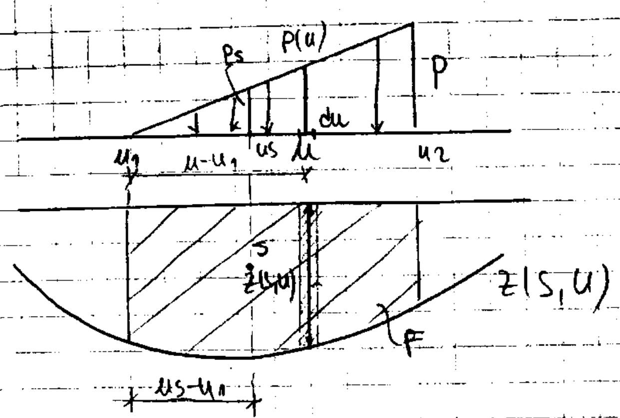
Ако је утицајна линија права линија вредност утицаја је вредност резултанте × ордината испод те резултанте.

→ Случај троугаоног оптерећења на произвољној утицајној ли[нији]

сличност Δ ⇒

$$\frac{P(u)}{u-u_1} = \frac{P}{u_2-u_1}$$

$$\Rightarrow P(u) = P\cdot\frac{(u-u_1)}{(u_2-u_1)}$$



$$Z_s = \int_{u_1}^{u_2} p(u)\, z(s,u)\, du = \frac{P}{(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2} z(s,u)\,(u-u_1)\,du$$

производ површине × $(u-u_1)$ је моменат површине у односу на u_1.

$\int$ – моменат целе површине у односу на u_1.

$$p_s = P\cdot\frac{u_s-u_1}{u_2-u_1} \quad (\Delta)$$

$$Z_s = \frac{P}{(u_2-u_1)}\cdot F\,(u_s-u_1)$$

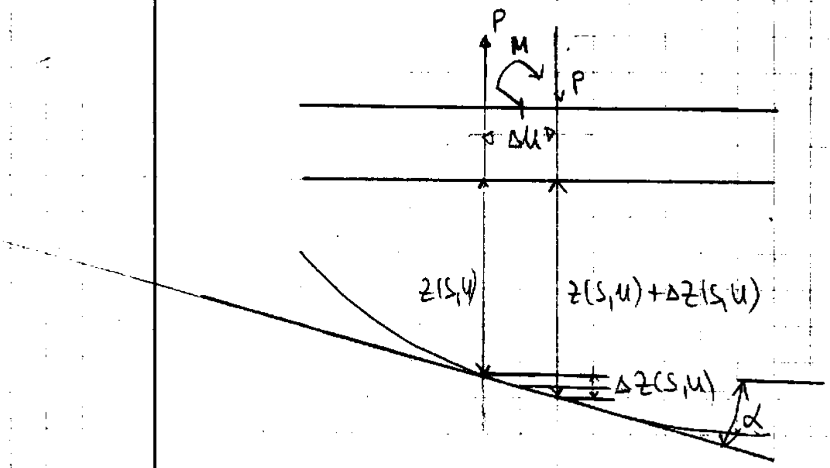
$$= F\,p_s$$

$$\boxed{Z_s = p_s\cdot F}$$

Вредност утицаја је једнака производу вредности оптерећења на месту тежишта површине и саме те површине.

3) КОНЦЕНТРИСАНИ МОМЕНАТ

Задата нам је утицајна линија и моменат савијања M. Тражимо вредност утицаја у пресеку S када у неком пресеку носача делује моменат.



$M = P\cdot\Delta u$

Моменат M заменимо спрегом сила $P\cdot\Delta u$, јер је утицајна линија нацртана за силе.

Вредности утицаја:

- претпоставили смо смер јединичне силе у гравитационом смеру

$$Z_S = \sum P_m z(S,u_m)$$

$$P\left[\cancel{z(S,u)}+\Delta z(S,u) - \cancel{z(S,u)}\right] = P\Delta z(S,u) = M\cdot\frac{\Delta z(S,u)}{\Delta u}$$

Тражимо граничну вредност када $\Delta u \to 0$, u). Δu прелази у тачку

$$\Rightarrow Z_S = M\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z(S,u)}{\Delta u} = M\cdot z'(S,u) = M\cdot tg\,\alpha$$

Ако на носачу делује M који обрће у смеру казаљке на сату ↷ онда ће вредност утицаја у S бити = производу M и тангенса угла нагиба тангенте на утицајну линију на месту момента M.

Ако је M ↺ биће $Z_s=-M\cdot tg\alpha$

$$\boxed{Z_s = M\cdot tg\alpha}$$

ДИМЕНЗИЈЕ УТИЦАЈНИХ ЛИНИЈА

Ординате утицајне линије $[z(s,u)] = \left[\frac{a}{\text{силе}}\right]$ имају димензију утицаја за који је конструисана подељену кроз димензију силе.

z - димензија a (утицај је димензије a)

Ако је утицајна линија за силу: a=сила $z(s,u)=\frac{\text{сила}}{\text{сила}}$ онда ће за силе ординате утицајне линије бити бездимензионалне.

За моменте $\frac{\text{сила}\cdot\text{дужина}}{\text{сила}}$ = дужина

Ординате утицајне линије за M

За померања $\left(\frac{\text{дужина}}{\text{сила}}\right)$, димензије $\frac{\text{дужина}}{\text{силе}}$.

За обртање је димензија $\frac{rad}{\text{сила}}$.

- a=сила $z(s,u)=1$
- a=M $z(s,u)$=ДУЖИНА
- a=ОБРТАЊЕ $z(s,u)=\frac{1}{\text{СИЛА}}$
- a=ПОМЕРАЊЕ $z(s,u)=\frac{\text{дуж}}{\text{сила}}$

ОДРЕЂИВАЊЕ ОПАСНОГ ПОЛОЖАЈА И СРАЧУНАВАЊЕ ЕКСТРЕМНИХ УТИЦАЈА ИЗ УТИЦАЈНИХ ЛИНИЈА

Имамо утицајну линију и покретно оптерећење. Треба одредити онај положај оптерећења за који ће се јавити мах и мин утицај у т.т.

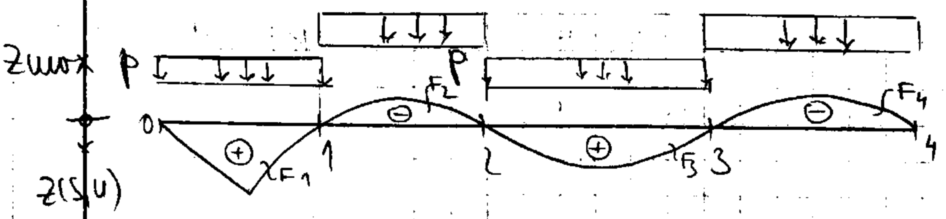
Имамо оптерећења: једнолико подељено опт. непрекидне дужине, једнолико подељено одређене дужине, сис. везаних концентрисаних сила.

Вредности утицаја покретног опт. зависе од инт. и положаја оптерећења

1) једнолико подељено оптерећење непрекидне дужине.
= људска навала

p - подужно оптерећење

- делови утицајне линије изнад хоризонтале имају ⊕ знак



- утицајна линија за оптерећење од људске навале на мосту. Посматрани утицај је моменат.
- највећи утицај: када смо оптеретили позитивне делове утицајне линије, Zmax.

$$\max Z_p = p(F_1+F_3)$$

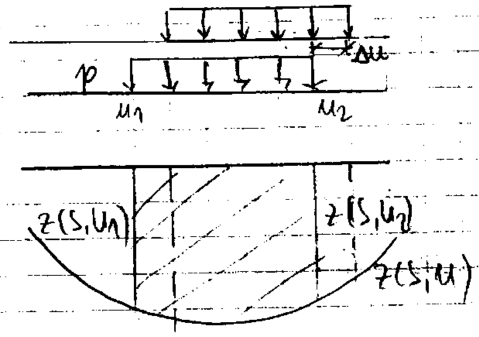
услед p.

$$\min Z_p = -p(F_2+F_4)$$

Да би нашли max Z_p или min Z_p добијемо сецкано оптерећења.
Прорачунавање утицаја за непрекидно оптерећење се добија стављањем опт. на све позитивне и све негативне делове утицајне линије.

2) једнолико подељено оптерећење одређене дужине

Имамо утицајну линију и питање је на које место треба ставити оптерећење да се оствари max утицај



- добијамо од тога да је положај између u_1 и u_2 већ меродаван.
- прираштај оптерећења ће бити о пода Δu-то јер смо претпоставили да смо тачно у екстр. положају.

прираштај утицаја треба да буде 0.

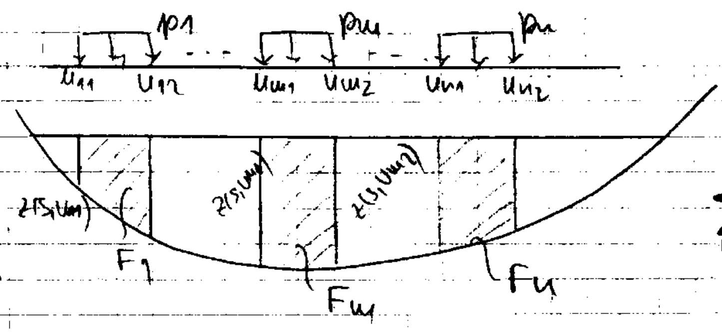
$$\Delta Z_S = p\Delta u\,[\underbrace{z(S,u_2)}_{\text{добијамо}} - \underbrace{z(S,u_1)}_{\text{губимо од површине}}] = 0$$

$p \neq 0 \quad \Delta u \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$z(S,u_2) = z(S,u_1)$$ **КРИТЕРИЈУМ ЗА МЕРОДАВАН ПОЛОЖАЈ**

На утицајној линији оптерећење морамо ставити тако да леве ординате утицајне линије буде једнака десној ординати утицајне линије.
Критеријум за меродаван положај једнолико подељеног оптерећења на произвољној ут. линији.

- већи број оваквих оптерећења на произвољној ут. линији

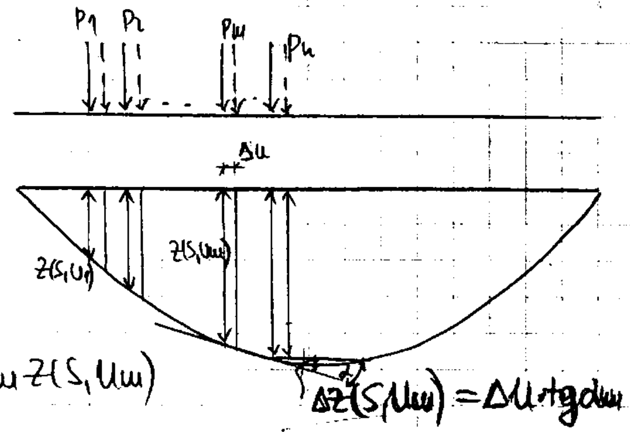


критеријум за меродаван положај:

$$\sum_{m=1}^{n} p_m\, z(S,u_{m1}) = \sum_{m=1}^{n} p_m\, z(S,u_{m2})$$

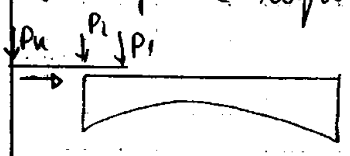
3) систем везаних концентрисаних сила (покретно)

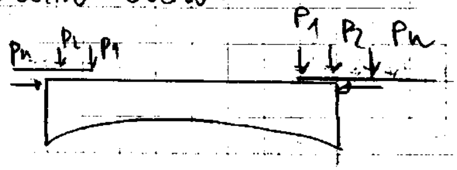
↓P_1↓P_2 ... ↓P_m ... ↓P_n дефинисани су положаји и интензитети



$$z_S = \sum_{m=1}^{n} P_m \, z(S,U_m)$$

Постоје 2 варијанте кретања сила:

1) 

2) 

сила P_1 је прва сила, а сила P_n задња потом

може и P_n да буде прва сила (пример)

Кретање у задатом правцу P_1 - прва сила,
кретање у оба правца и P_1 и P_n могу бити прве силе.

1) Мењати положај силе са највећим интензитетом испод највеће ординате свих комбинација има доста.

2) Извести аналитички критеријум за одређивање положаја

Аналитички критеријум за одређивање положаја

Полазимо од тога да смо већ нашли неповољан положај, тј. да нема већег утицаја од $z_S = \sum_{m=1}^{n} P_m \cdot z(S,U_m)$

Слика од сила ће доћи на нову ординату, tg α је различит за сваки случај.

Укупан прираштај треба да буде = 0

$$\Delta Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m \cdot \Delta z(s, u_m) = \Delta u \sum_{m=1}^{n} P_m \cdot tg\,\alpha_m = 0$$

$$\Delta u \neq 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{m=1}^{n} P_m\, tg\,\alpha_m = 0}$$

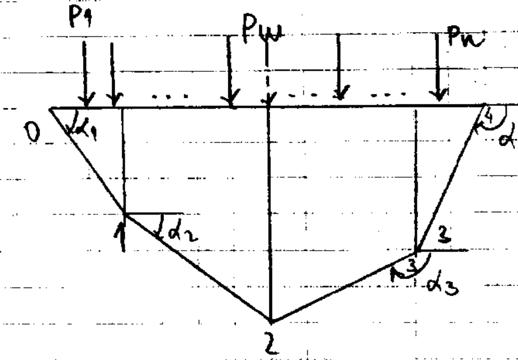
АНАЛИТИЧКИ ЕКСТРЕМУМ

критеријум за меродаван положај сис. сила на утицајној линији произвољног облика.

код непрекидне криве је tgα ф-је Z непрекидна ф-ја.

- Zs има екст. вредности у том положају у односу на ∞ блиске положаје оптерећења.

Утицајна линија може бити глатка крива линија али и полигоналну линију



tgα ће стално да се мења, дуж овог је const.

$$\sum_{m=1}^{n} P_m \cdot tg\,\alpha_m \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$$ не може бити једнако нули.

Ако померимо силе за Δu неће се значајно променити, јер силе остају у свом пољу. Кад (код tgα) једна сила пређе неко теме доће до промене, може се десити да са ⊕ пређе на ⊖, тј. $\sum P_m\, tg\,\alpha_m$ је прошла кроз нулу. То се десило када је једна сила прошла преко једног темена. Та сила је меродавна сила.

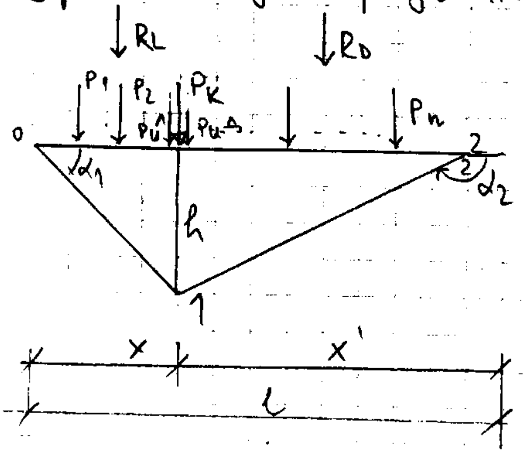
Сила која када пређе преко темена утицајне линије доће до промене знака ($\sum P_m\, tg\,\alpha_m$) је меродавна сила. !

Меродавну силу треба ставити код што теме утицајне линије.

КРИТЕРИЈУМ ЗА ОПАСАН ПОЛОЖАЈ

Исс. сила је у меродавном положају кад се једна од сила која је меродавна налази код једног од темена утицајне линије, а померањем лево или десно долази до промене знака $\sum P_i\, tg\alpha_i$ (цела прича нема математичку подлогу ...) треба кроз све силе при њеном положају преко темена $\sum P_i\, tg\alpha_i$ мења знак, и која од тих сила је меродавна.

→ Утицајна линија троугаоног облика



- силу P_i смо ставили баш на теме
- силу P_i разложимо на P_i^l и P_i^d сразмерно дужинома

$$R_l=\sum_{i=1}^{k^l} P_i \qquad R_D=\sum_{i=k^0}^{N} P_i$$

$$R_l\cdot tg\alpha_1 + R_D\, tg\alpha_2 = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\, tg\alpha_i = 0\right)$$

$$tg\alpha_1=\frac{h}{x} \qquad tg\alpha_2 = -\frac{h}{x'}$$

$$R_l\cdot\frac{h}{x} - R_D\cdot\frac{h}{x'} = 0$$

$$\frac{R_l}{x} = \frac{R_D}{x'}$$

I критеријум

$$\frac{R_l}{x}=\frac{R_D}{x'}=\frac{R_l+R_D}{x+x'}=\frac{R}{l}$$ **I критеријум**

Критеријум за меродавну положај система сила

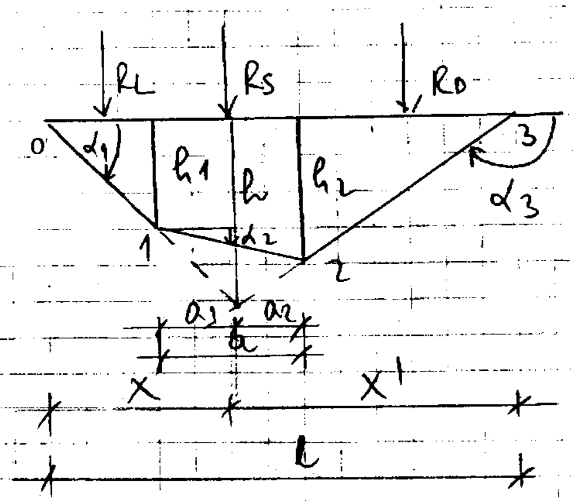
Просечно оптерећење леве гране утицајне линије мора бити једнако просечном опт. десне гране утиц. линије или мора бити једнако утицајном оптерећењу.

$$\frac{R}{l} > \begin{cases} \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{k-1} P_m \\ \frac{1}{x'}\sum_{m=k+1}^{n} P_m \end{cases}$$

II критеријум без меродавне силе P_k. (нема P_k)

Ниједну силу ставимо на теме а остале помоћу једну, тако да су испуњени ови критеријуми.

→ Утицајна линија произвољног облика.



R_L - резултанта сила које делују на леви део утицајне линије
R_S – на средњи
R_D – на десни

$$R_L \operatorname{tg}\alpha_1 + R_S \operatorname{tg}\alpha_2 + R_D \operatorname{tg}\alpha_3 = 0$$

R_L, R_S, R_D у себи садрже и меродавну силу P_k.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{x} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h_2-h_1}{a} = \frac{h}{x}\cdot\frac{a_1}{a} - \frac{h}{x'}\cdot\frac{a_2}{a} \qquad \operatorname{tg}\alpha_3 = -\frac{h}{x'}$$

$$R_L\cdot\frac{h}{x} + R_S\left(\frac{h}{x}\cdot\frac{a_1}{a} - \frac{h}{x'}\cdot\frac{a_2}{a}\right) + R_D\cdot\left(-\frac{h}{x'}\right) = 0$$

$$\frac{R_L + R_S\frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D + R_S\frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R_L + R_S + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l}$$

Да би покретан сис. везаних сила на произвољној утицајној линији био у меродавном положају потребно је да просечно оптерећење дела x оптерећеног $R_L + R_S\frac{a_1}{a}$ буде једнако са просечним оптерећењем дела x' оптерећеног $R_D + R_S\frac{a_2}{a}$ односно једнако укупном просечном оптерећењу дела l оптерећеног $R = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

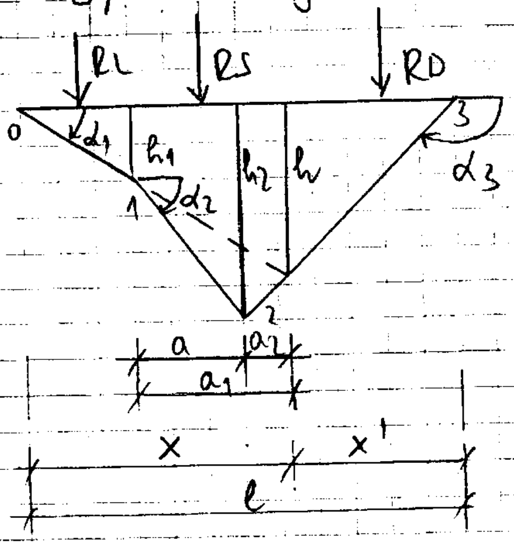
Мада се меродавна сила не налази у сопственим вредностима R_L, R_S, R_D, укупно просечно оптерећење при меродавном положају сис. сила биће веће од просечних вредности оптерећења на x и x'.

КРИТЕРИЈУМ ЗА МЕРОДАВНУ СИЛУ:

$$\frac{R_L + R_S\frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D + R_S\frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R}{l}$$ I КРИТЕРИЈУМ (СА P_K)

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{R_L + R_S\frac{a_1}{a}}{x} \\ \dfrac{R_D + R_S\frac{a_2}{a}}{x'} \end{matrix}\right\} < \frac{R}{l}$$ II КРИТЕРИЈУМ (БЕЗ P_K)

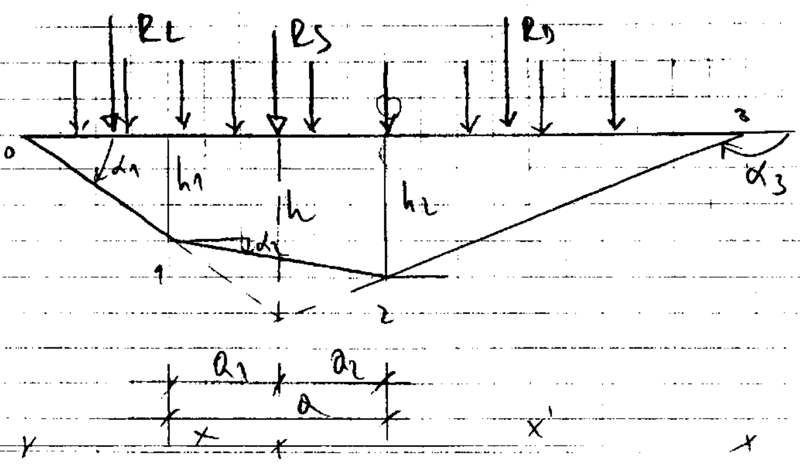
Ако утицајни линију има следећи облик:



КРИТЕРИЈУМ ЗА МЕРОДАВНУ СИЛУ

$$\frac{R_L + R_S \frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D - R_S \frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R}{l}$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{R_L + R_S \frac{a_1}{a}}{x} \\[2ex] \dfrac{R_D - R_S \frac{a_2}{a}}{x'} \end{array}\right\} < \frac{R}{l}$$



$$tg\alpha_1 = \frac{h}{x}$$

$$tg\alpha_3 = -\frac{h}{x'}$$

$$tg\alpha_2 = \frac{h_2 - h_1}{a} = \frac{h}{x}\frac{a_1}{a} - \frac{h}{x'}\frac{a_2}{a}$$

$$h_2 = \frac{h}{x'}(x' - a_2)$$

$$h_1 = \frac{h}{x}(x - a_1)$$

$$R_L tg\alpha_1 + R_S tg\alpha_2 + R_D tg\alpha_3 = 0$$

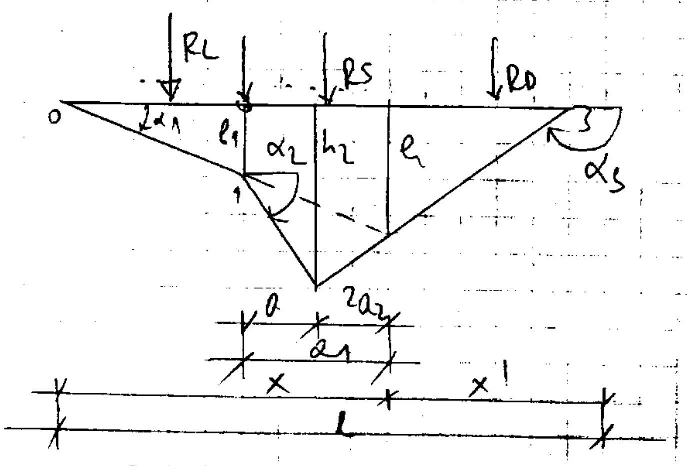
$$R_L \cdot \frac{h}{x} + R_S\left[\frac{h}{x}\left(\frac{a_1}{a}\right) - \frac{h}{x'}\left(\frac{a_2}{a}\right)\right] - R_D \frac{h}{x'} = 0$$

Критеријум са притиском силом:

$$\frac{R_L + R_S \frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D + R_S \frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R_L + R_S + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l}$$

Критеријум без притиске силе:

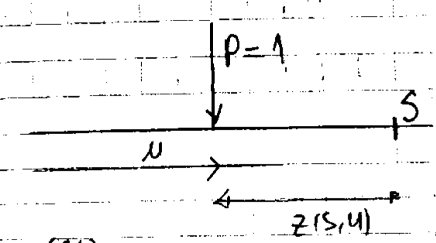
$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{R_L + R_S \frac{a_1}{a}}{x} \\[2ex] \dfrac{R_L + R_S \frac{a_2}{a}}{x'} \end{array}\right\} < \frac{R}{l}$$



$$\frac{R_L + R_S \frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D - R_S \frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R}{l}$$

Сил. сила увек треба поставити да се меродавна сила налази на једном од темена и проверити ове критеријуме.

ОБЛИК УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА СТАТ. ОДРЕЂЕНЕ НОСАЧЕ (ЗА H, V, M (N, T) и Coi, Cui)



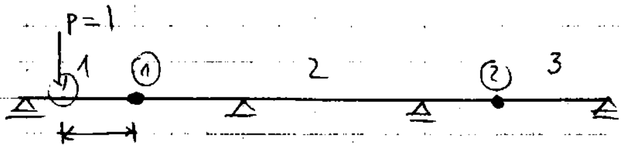
Coi, Cui, N, T, M стат. одређених носача одређујемо из услова равнотеже делова носача које сматрамо за круте плоче.

Ако ставимо P=1 на место u добили реакције ослонца и сила у пресеку можемо одредити услове равнотеже. Једино оптер. је одређена јединична сила. Утицај у s од реакције ослонца (P=1) услови равнотеже зависе од спољ. оптер. које је P=1.

z(s,u) за N, T, M и Coi, Cui ће бити **линеарна** ф-ја положаја P=1 дуж сваке круте плоче дуж које се она креће. (следи из сис. ј-на методе декомпозиције)

z(s,u) за N, T, M и Coi, Cui за стат. одређене носаче су линеарне ф-је положаја P=1 дуж сваке круте плоче, дуж које се та сила креће.
Ово следи из услова равнотеже из којих рачунамо M, N, T и Coi, Cui (лево и десно од пресека).

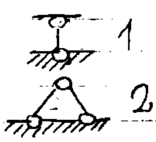
НОСАЧ КОЈИ СЕ САСТОЈИ ИЗ ВИШЕ КРУТИХ ПЛОЧА



Zp - број плоча

3Zp - број степени слободе

Zo - ослонац може да укине **1** степен слободе



Zu - унутрашња веза обртање

• **зглобова** укида **2** степени слободе кретања (обртање и померање)

$\boxed{3Z_p = \underbrace{Z_o + Z_u + 2Z_{zglobova}}}$ кинем. број стабилних

број степени слободе — укинути степени слободе

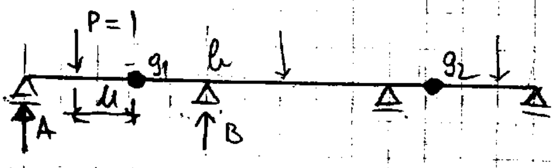
УСЛОВ КИНЕМАТИЧКЕ СТАБИЛНОСТИ НОСАЧА КОЈИ СЕ САСТОЈИ ИЗ СИСТЕМА КРУТИХ ПЛОЧА

$9 = 5 + 2 \cdot 2 = 9$ ✓

Критеријум према плана је критеријум кинематичке стабилности носача

Утицајна линија је линеарна ф-ја положаја јединичне силе P=1.

пр1

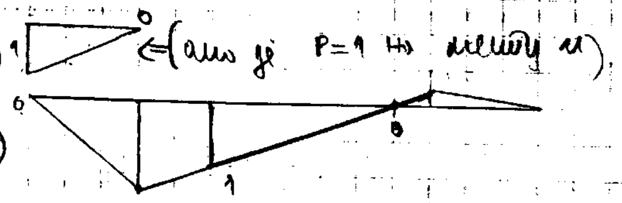


$Z_p = 3$ $\quad Z_{zglob} = 2$

$Z_o = 5$

реакције (A) ... (ако је P=1 на месту u)

ослонаца (B)

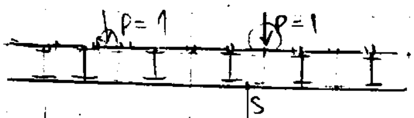


Утицајна ф-ја за (B) се простире на целом носачу, а за (A) само ако је сила P=1 на делу Ag_1.

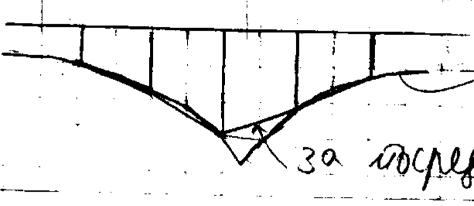
Утицајна ф-ја је права линија дуж сваке круте плоче дуж које се креће оптерећење.

Колико плоча толико и утицајних линија.

пр2



Онолико утиц. линија по колико се креће P.



права линија је за директно оптерећ. носач

за посредно опт. носач полигонална

У сваком посредно оптерећеном носачу, у коме су секундарни подужни носачи статички одређени (који чешће сис. просте греде), утицајне линије за све утицаје су праве линије дуж сваког секундарног подужног носача и имају на месту чворова исте вредности ординате утицајне линије као директно оптерећен носач.

Добићемо полигоналну утицајну линију.

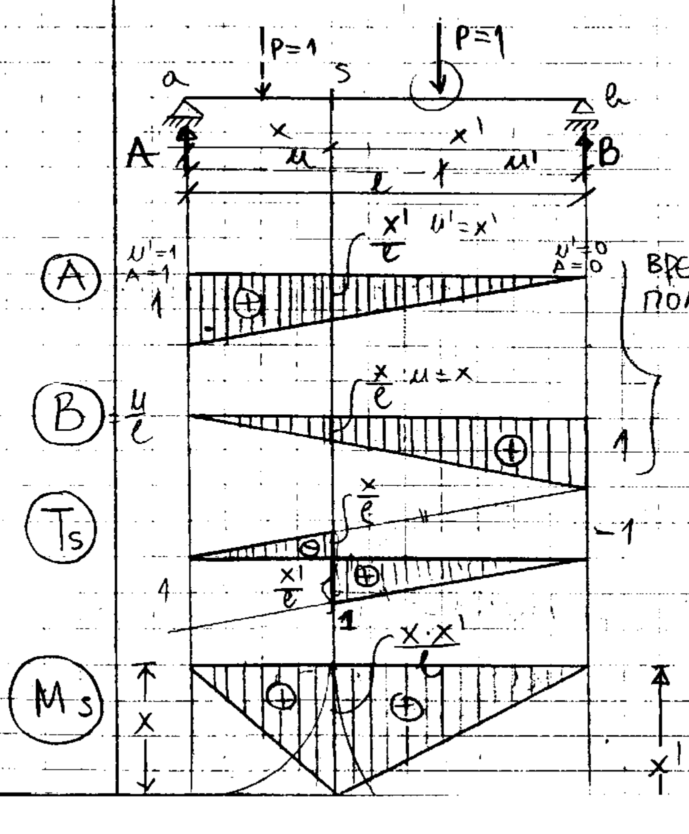
1 КОНСТРУКЦИЈА УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ПРОСТЕ ГРЕДЕ.

Def. **Проста греда** је носач који се састоји од једне кинематички круте плоче ослоњене на једно непокретно и једно покретно лежиште чији је правац ослонаца вертикалан. Битна особина просте греде је да при вертикалном оптерећењу има вертикалне реакције!

реакције ослонаца:

$A = \frac{u'}{l}$ $B = \frac{u}{l}$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A = P \cdot u'/l$, $P = 1$



ВРЕДНОСТИ А ЗА РАЗЛИЧИТЕ ПОЛОЖАЈЕ СИЛЕ $P=1$.

УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА (A) и (B)

$x < u < l$ (десно од S) $T_S = A = \frac{u'}{l}$, $M_S = A \cdot x = \frac{u' \cdot x}{l}$

$0 \le u < x$ (лево од S) $T_S = -B = -\frac{u}{l}$, $M_S = B x' = \frac{u x'}{l}$

1 на дијаграму A је реакција ослонца a када је P=1 на месту a ; $\frac{x'}{l}$ је реакција силе A када је P=1 на x, у S. $\frac{x}{l}$ је реакција ослонца b, B, када је P=1 на S. x.

Дијаграми (A) и (B) су (+) за претпостављене смерове A и B.

Дијаграми сила у пресеку имају знак према конвенцији за силе у пресеку.

За T и M смо пресекли носач у пресеку S и све силе редуковали на тај пресек. Овим смо добили две круте плоче aS и Sb.

За T и M, N увек треба пресећи на месту где их тражимо, а могу бити плоча (мин. једну више).

Утицајна линија се састоји само од две праве линије: леве и десне гране утицајне линије.

Ts

$x<u\le l$ # Када је P=1 десно од пресека T ће бити једнаки реакцији A, а момент Ms моменту A у односу на T п.п. S.

$0\le u<x$ Када је P=1 лево од п.п. T ће бити −B, а Ms моменту B у односу на T.п.п S.

На делу десно од пресека утицајна линија за (T) силе је иста као за (A), а лево од S (T) је исто као (B) са негативним знаком.

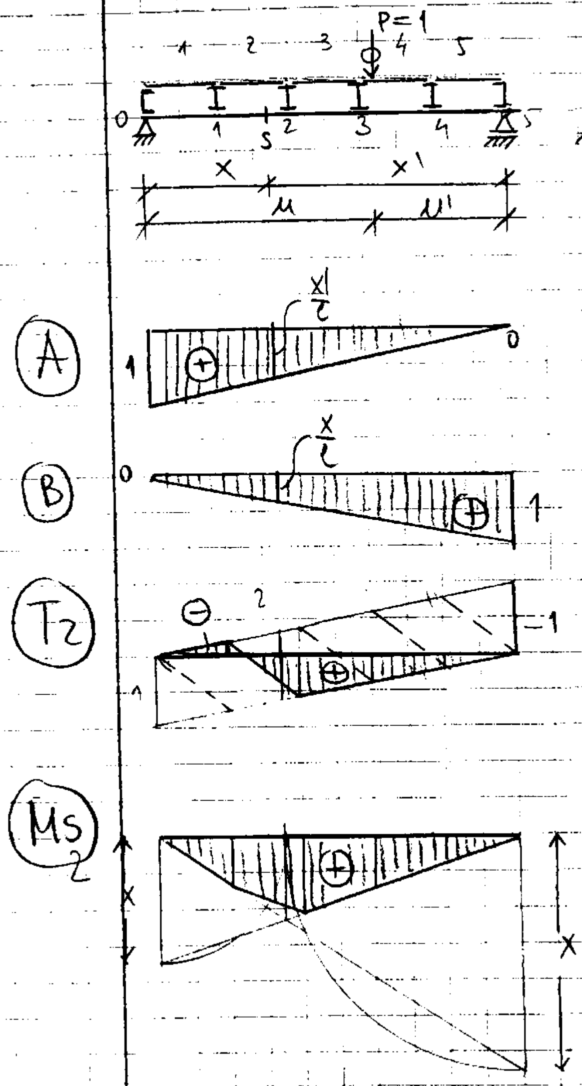
T Испод пресека утицајна линија има скок од 1.

Ms Утицајна линија за момент је у пресеку права x: у a је x у b је 0 и у b = x', у a = 0

Линија је троугаона са теменом испод S

и врхом ординатом $\frac{x \cdot x'}{l}$ и једнако је дијаграму моменатa услед оптерећења јединичном силом у пресеку S.

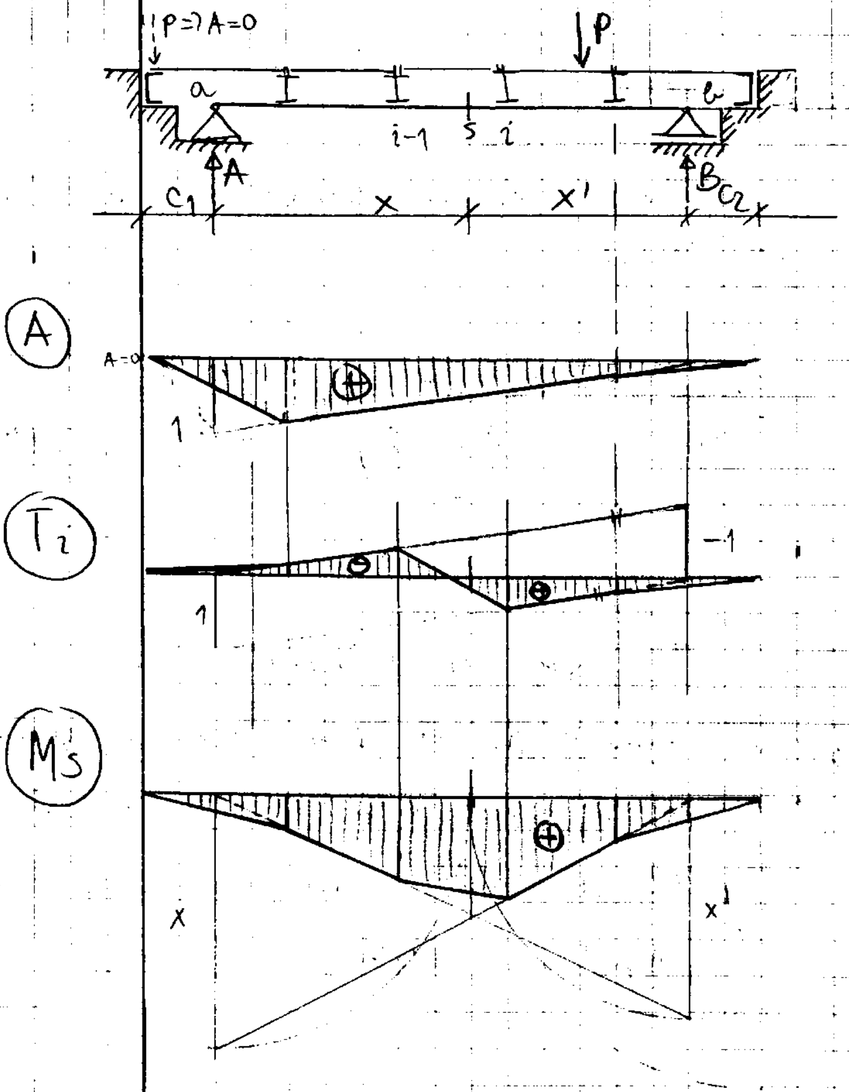
Посредно оптерећен носач



- секундарни носачи су сис. просте греде
- дијаграми за (A) и (B) су исти као и при директном оптерећењу
- T2 – S је у 2. пољу
- између два попречна носача утицајне линије за (T) су исте па се зато конструишу за одређена поља

Код посредно оптерећених носача (T) и (M) цртамо за поље а не за пресек. За било који други пресек који би био у пољу (2) била би иста утицајна линија за (T) и (M).
Утицајна линија за (M) код просте греде је трапезног облика

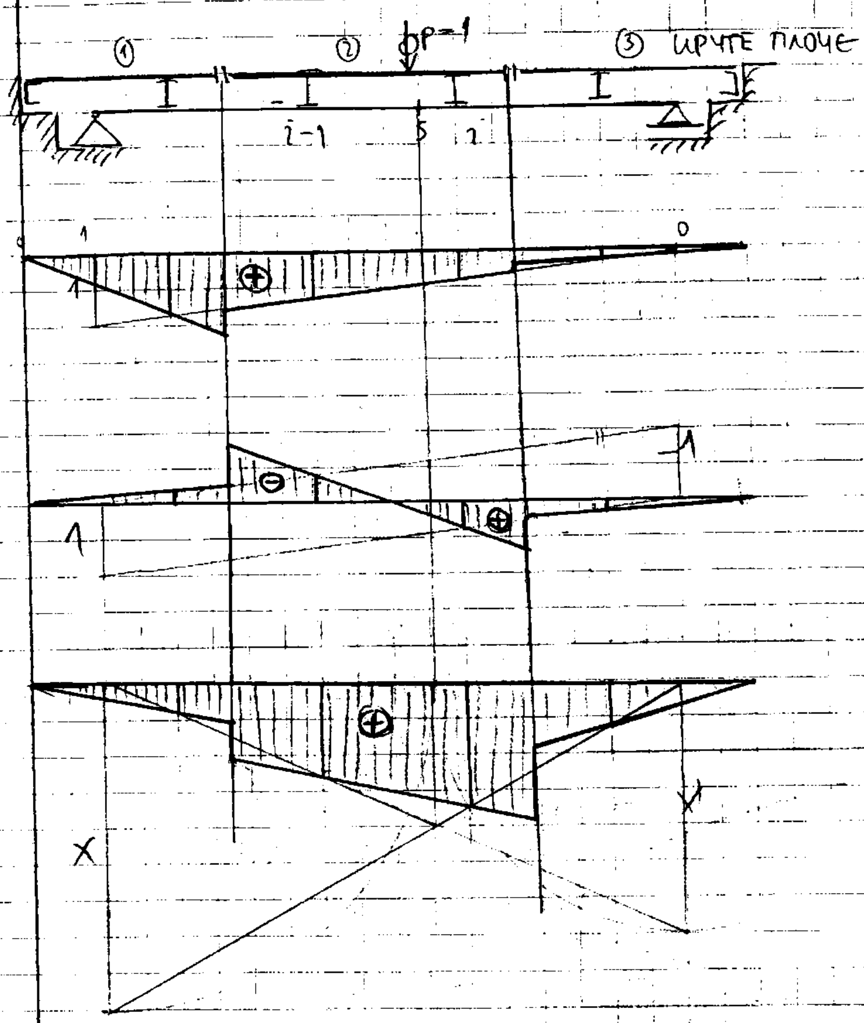
Проста греда код које су крајњи попречни носачи издвојени из распона



• сис. простих греда

Реакција ослонца а, или А, ће бити једнако нули на месту [јер ће целу силу да прими тај ослонац ако је на том месту.

Секундарни подужни носачи су греде са препустима

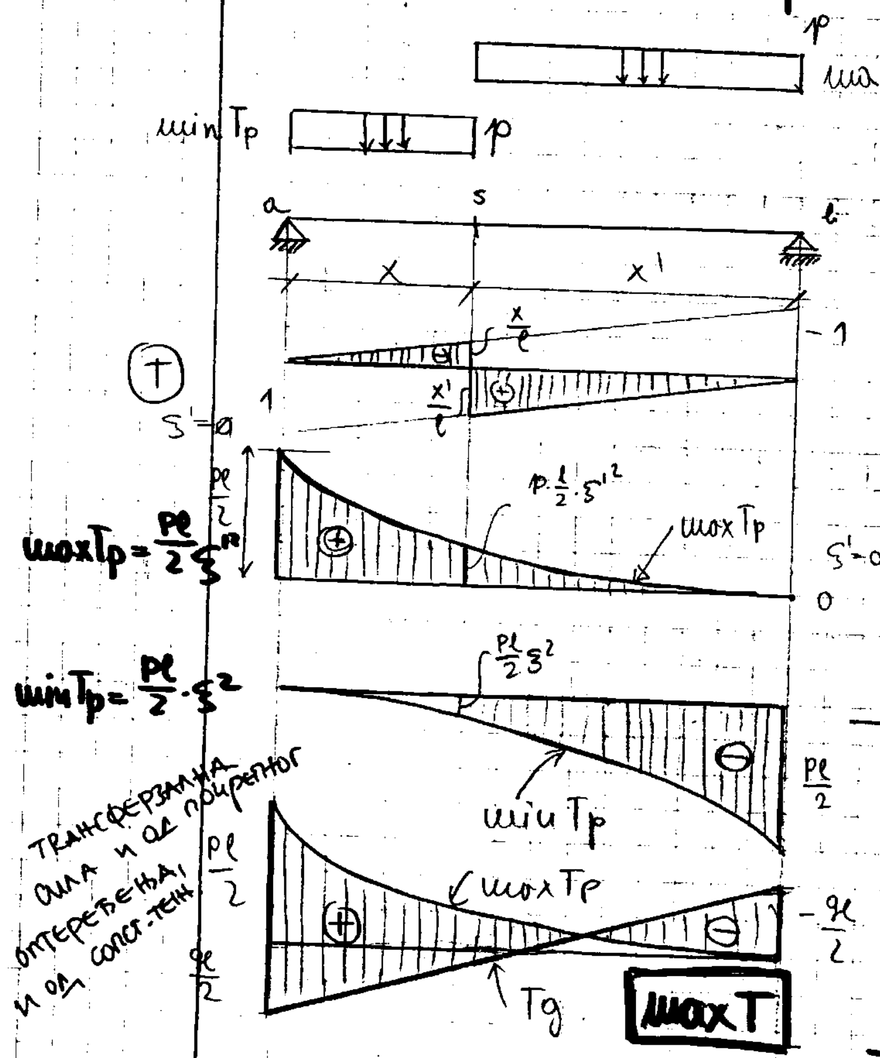


- на местима секун. одржних носача су ординате исте као код директних а због крутих плоча је линеарна промена.

Секундарни носач је система греда са препустима. Ординате између места одржних носача су исте и код посредно и непосредно оптерећених носача. Због једне круте плоче је линеарна ф-ја.

Одређивање екстремних вредности утицаја. Граничне вредности трансферзалних сила код просте греде

(2)



→ $\max T_p = p\cdot F^+ = p\cdot\frac{1}{2}\frac{x'^2}{l} = \frac{pl}{2}\cdot\left(\frac{x'}{l}\right)^2 = \frac{pl}{2}\cdot\xi'^2$

- дијаграм max T_p ће бити ф-ја ξ'

Дијаграм max T услед покретног оптерећења

→ $p\cdot\frac{l}{2}\cdot\xi'^2$ је највећа трансф. сила која може да се јави у том пресеку услед покретног опт-р

→ $\min T_p = pF^- = p\cdot\frac{1}{2}\frac{x^2}{l} = \frac{pl}{2}\cdot\xi^2$

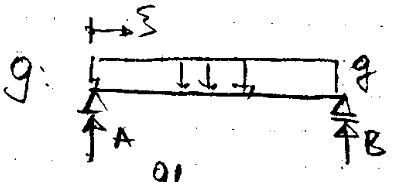
Max T_p се јавља код ослонца A а опада параболично на b, а min T_p се јавља код ослонца b а параболично опада на a.

• Посматрамо истовремено дејство њиховог сталног оптерећења (сопствене тежине која увек делује) и покретног оптерећења p.

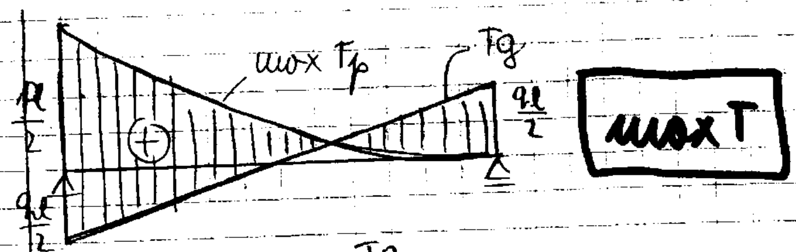
$$T_g = \overbrace{\frac{g\cdot l}{2}}^{A}\cdot\overbrace{(1-2\xi)}^{t_R} = \frac{g\cdot l}{2}\cdot t_R$$

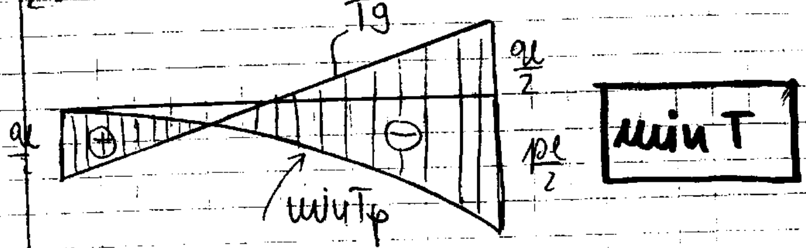
⇒ $\max T = T_g + \max T_p$

$\min T = T_g + \min T_p$



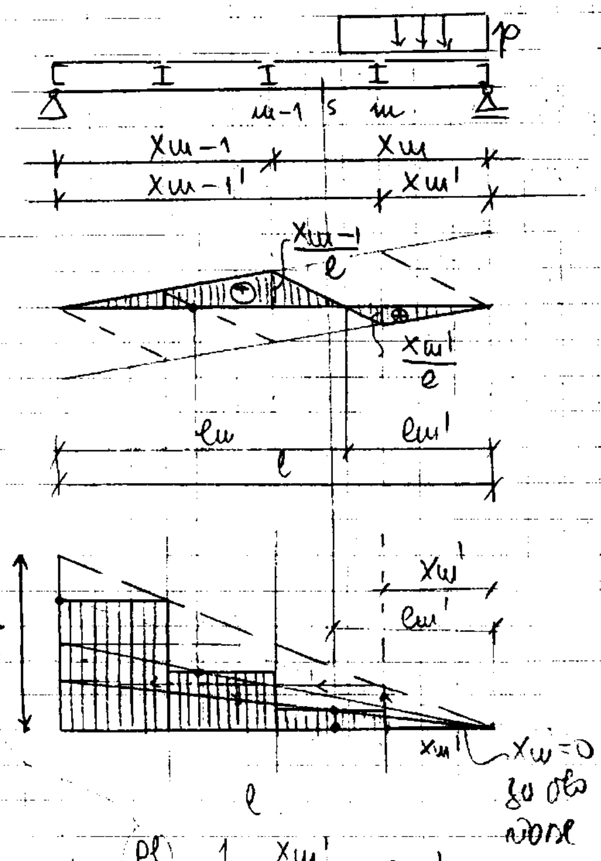
$A = B = \frac{gl}{2}$ $\quad t_R = (1-2\xi)$





Видимо да у близини a постоји зона где су T силе увек позитивне, а у близини b где су увек негативне. Величине ових зона зависе од односа сталног и покретног оптерећења

ДИЈАГРАМИ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ УТИЦАЈА НА ПРОСТОЈ ГРЕДИ КОЈА ЈЕ ПОСРЕДНО ОПТЕРЕЋЕНА



$$\max T_p = p\cdot F^+ = p\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x_m'}{\ell}\cdot \ell_m' = \frac{p\cdot\ell}{2}\cdot\frac{x_m'}{\ell}\cdot\frac{\ell_m'}{\ell}$$

утицајна линија је иста за цело поље => T=const.

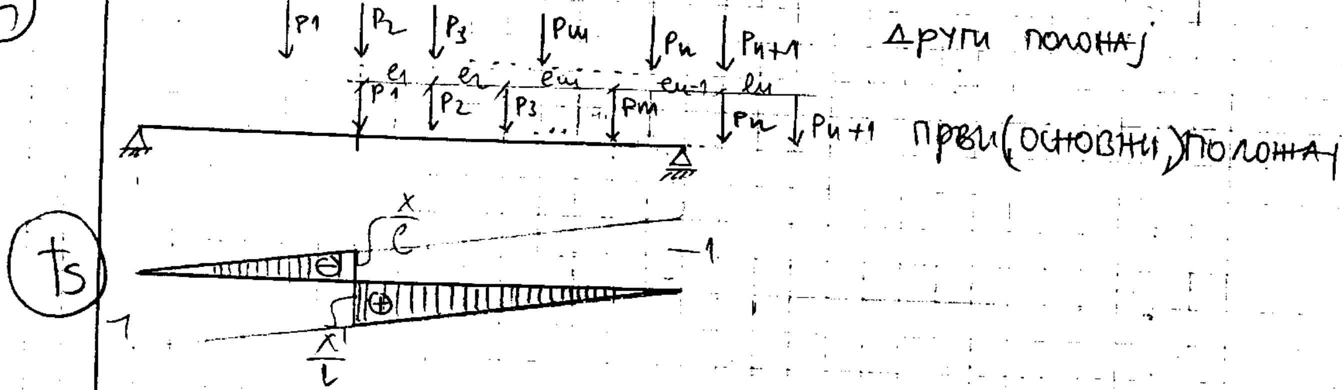
Вредност max T_p је иста за све пресеке у једном пољу па ће линија max T у пољу бити права хоризонтална линија, а дијаграм max T за цео носач ће бити степенаста ф-ја.

$$\max T = \underbrace{\frac{p\ell}{2}\cdot\frac{1}{\ell}}_{tg\alpha}\cdot\frac{x_m'}{\ell}\cdot \ell_m'$$

Дијаграм minT је исти као само у односу дијаграма maxT са промењеним знаком.

3

ВЕЗАНИ СИС. КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА

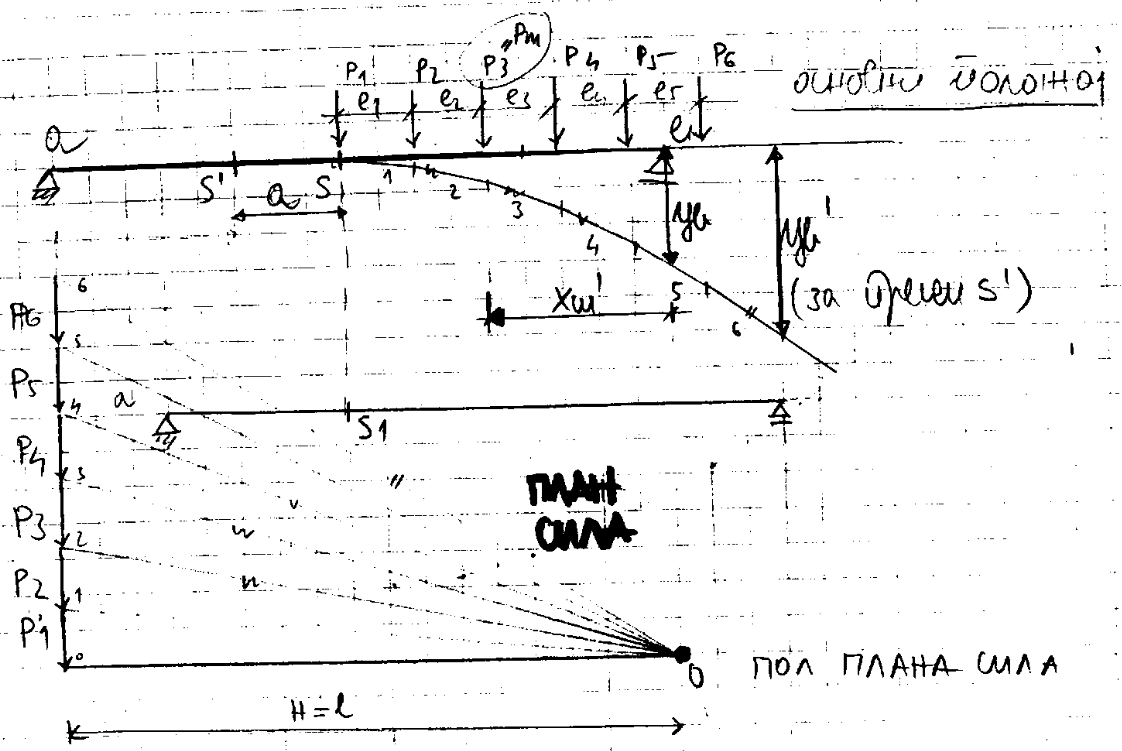


Положај при коме се прва сила налази над пресеком (највећом ординатом) називамо **први, основни положај**. Положај када је друга сила над пресеком називамо **други положај**.

Први положај је најчешће опасан положај јер се све силе налазе над ⊕ делом. Могуће је остварити и опасан положај са другим положајем ако је P_1 много мало а e_1 велико.

Померањем сис. улево смањиће се утицај јер прелазимо на ⊖ део, а померањем удесно такође јер се ⊕ ординате смањују.

Нашли смо ово за 1 пресек, али је потребно то урадити за све пресеке.



сл. 1

$A = \frac{1}{l}\sum P_m \cdot x_m'$ A је једнако T сили јер су све силе десно од пресека

Статички моменат сила P_m у односу на b једнак је производу отстојања пола H у плану сила и одсечка y_b на вертикали кроз ослонац b између крајњих зракова верижног полигона (1). $\boxed{\sum P_m x_m' = H \cdot y_b}$.

H је у размери за силе, а y_b у размери за дужине.

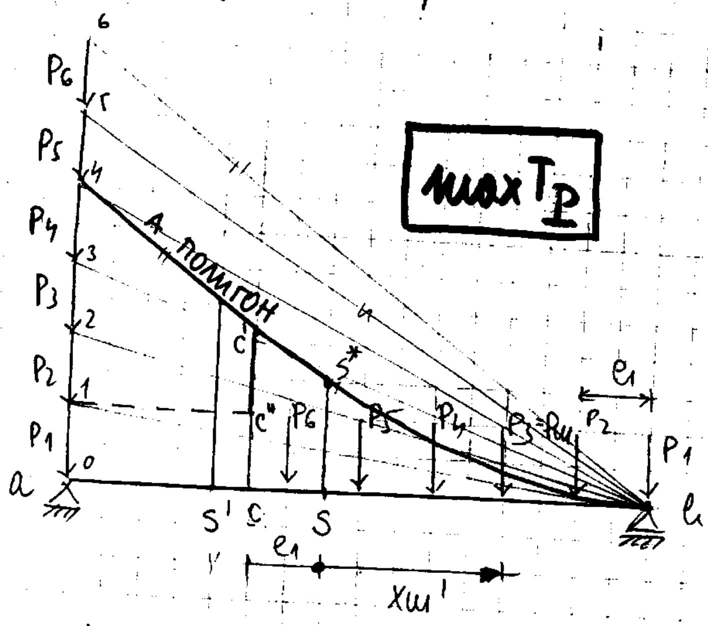
$\Rightarrow y_b = \frac{1}{l}\sum P_m x_m' = A$

(све силе су десно од пресека па је $T=A$)

Треба одредити A за сваки положај сила.
Сада смо одредили вредности реакције ослонца a, A за овај положај сила и то је max T за овај положај сила.

Ако силу P_1 поставимо у b а остале на a можемо одредити $\sum P_m x_m'$ у односу на b сила P_1 до P_5 на овој слици 1. једнака је статичком мом. за S минус сила на сл2. Окренутемо верижни полигон.

сл2.



(сл2.) (сл1)

$\overline{SS^*} = y_k = A$

$\boxed{\max T_P}$

Ако је основни положај меродаван за све пресеке "А-полигон" представља дијаграм max трансферзалних сила.

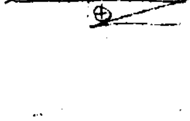
Реакција A која одговара основном положају сис. сила у било ком пресеку греде једнака је одговарајућој ординати овог полигона.

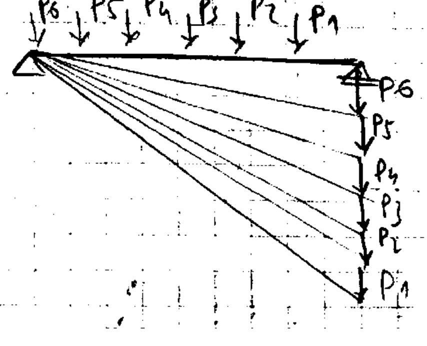
За миним. Т силе оптерећење је са леве стране пресека и посматрамо основни положај. Т сила ће бити једнака B са ⊖ знаком. Дијаграм минималних Т сила добијамо конструкцијом B полигона.

Када је сис. сила у другом положају $T = A' - P_1$ ($c'c''$). A' је реакција ослонца a за други положај. На графику је то вредност $c'c''$ упоређивањем SS^* и $c'c''$ закључујемо који положај меродаван и колико је max T у посматраном пресеку.

Добили смо линију сличну параболи кој р само што је у случају P она полигонална линија.

B-ПОЛИГОН

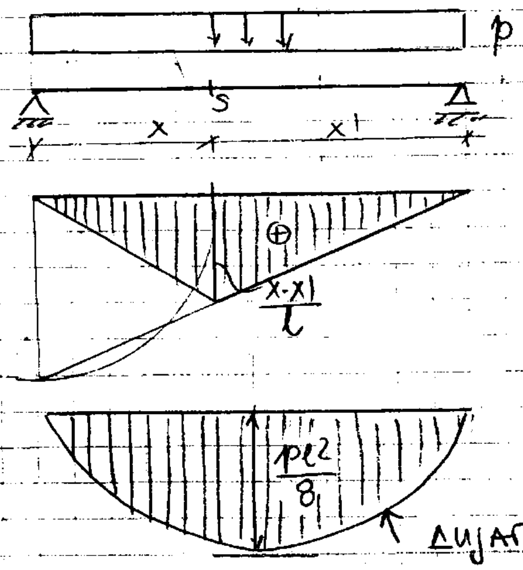




ДИЈАГРАМ ГР. ВРЕДНОСТИ МОМЕНАТА САВИЈАЊА

4

1) ЈЕДНАКОПОДЕЉЕНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ



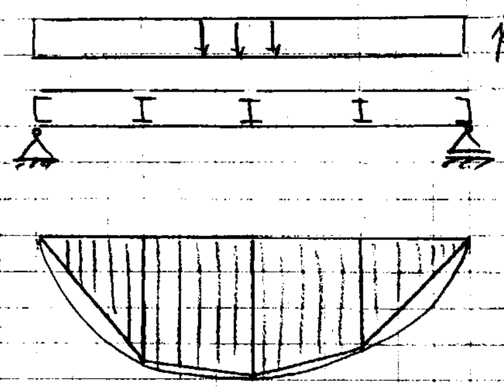
max M_p добијемо када p делује по целој дужини греде.

$$\max M_p = \frac{p}{2} \cdot x(l-x) = \frac{pl^2}{2}\,\omega_e.$$

$$\omega_e = \xi \cdot \xi'$$

ДИЈАГРАМ МОМЕНАТА = $\boxed{\max M_p}$

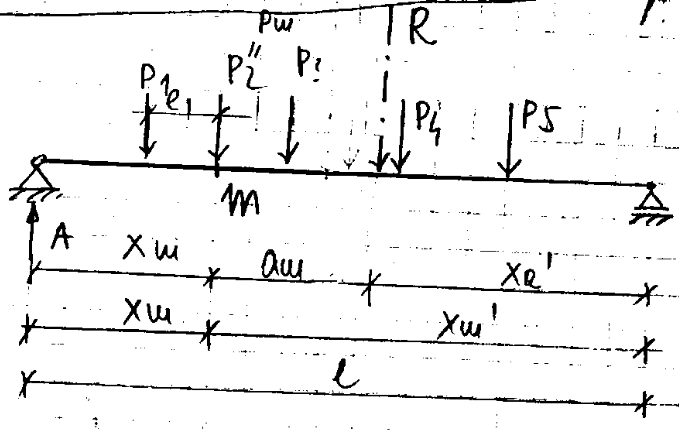
→ за покретно оптерећен носач



$\boxed{\max M_p}$

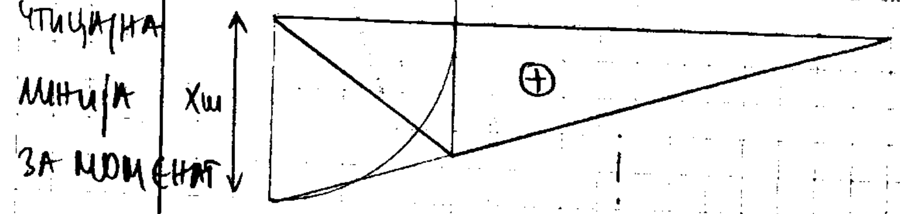
2) СИСТЕМ ВЕЗАНИХ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА

Утицајна линија момената је троугаоног облика па мора бити задовољен критеријум $\frac{R_L}{x} = \frac{R_D}{x'} = \frac{P}{l}$. Меродавну силу морамо ставити на теме утицајне линије. У зони опт. а мора да постоји зона у којој је меродавна сила P_1, на њу се наставља зона у којој је меродавна P_2, ... На делу на коме ~~делује~~ је P_n меродавна, дијаграм max M је дијаграм момената у пресеку у коме делује $P_ш$ када се ш.с. помера по носачу



$X_R' = l - X_ш - a_ш$

$A = \frac{R \cdot X_R'}{l}$



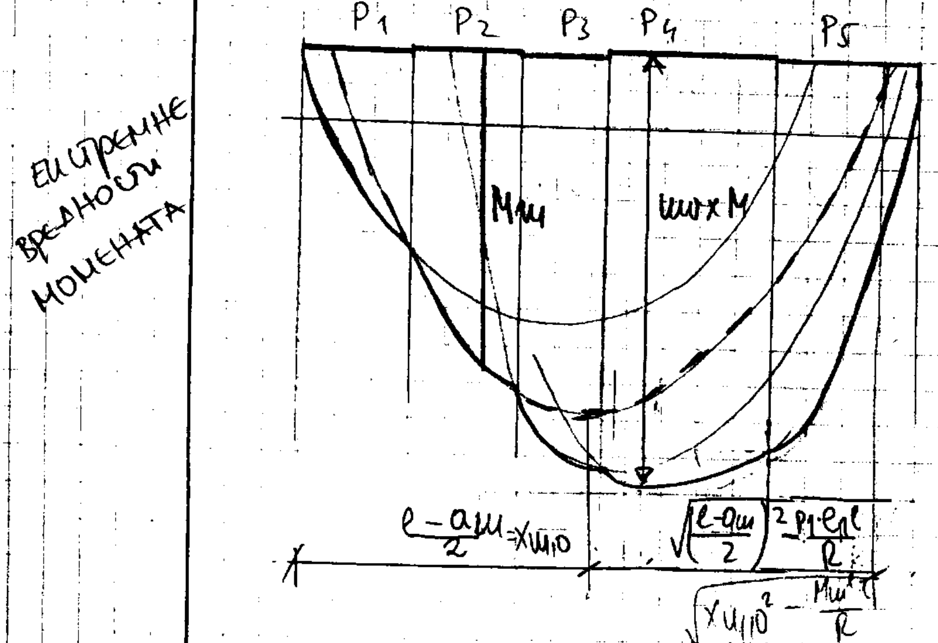
$$M_m = \frac{R\cdot X_R'}{l} X_ш - M_ш^l \qquad \left(\frac{R\cdot X_R'}{l} = A\right)$$

$M_ш^l$ – ~~статички момент~~ сила лево од $P_ш$ ($P_1 - P_{ш-1}$) у односу на m.

$$M_m = \frac{R}{l}\underbrace{(l-a_ш)}_{const}X_ш - \frac{R}{l}X_ш^2 - \underbrace{M_ш^l}_{const} \quad \begin{pmatrix} R, l, a_ш \\ M_ш^l = const \end{pmatrix}$$

$$M_ш = a\cdot X_ш - b\cdot X_ш^2 - C$$

$M_ш$ се параболично мења у зависности од $X_ш$



максимум ф-је: $\frac{dM_ш}{dX_ш} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{R}{l}(l-a_ш) - \frac{R}{l}\cdot X_ш \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow X_{ш,0} = \frac{l-a_ш}{2}$$

Одстојање R од "b" ($= X_R'$) је једнако одстојању ш од a ($X_{ш,0}$).

$$X_R' = l - \frac{l-a_ш}{2} - a_ш = \frac{l-a_ш}{2} = X_{ш,0}$$

критеријум: Максимални моменти се јављају у пресеку испод силе $P_ш$ када средина греде половљава одстојање

Ош између резултанте и те силе

$$\max M_m = \frac{R}{\ell}\left(\frac{\ell - a_m}{2}\right)^2 - M_m^{\ell}$$

Парабола сече апсцису у x_{m1} и x_{m2} ⇒

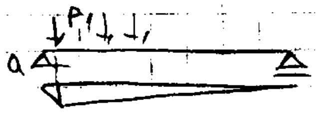
$$x_{m1}, x_{m2} = x_{m0} \mp \sqrt{x_{m0}^2 - \frac{M_m^{\ell}\cdot \ell}{R}}$$

Да би сила P била меродавна растојање a од меродавне силе једнако је растојању b од R ⇒ Средина греде полови растојање између R и P_m.

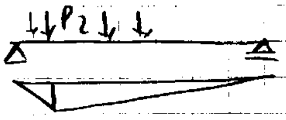
(КРИТЕРИЈУМ)

На делу на коме је P_m меродавна, парабола представља дијаграм max M сваког пресека греде услед датог сис. конц. сила.

Дијаграм се састоји од онолико парабола колико имамо сила.

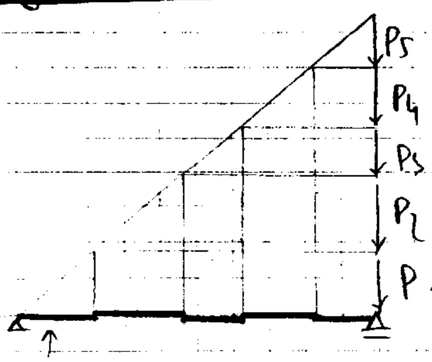


за пресек близу a ⇒ P_1 меродавна



за овај пресек P_2

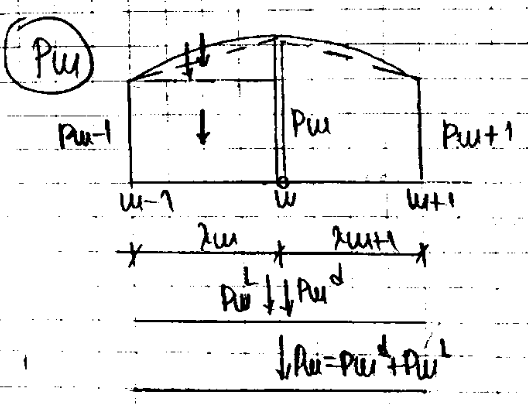
Зоне у којима делују силе зависе од њихових интензитета.



Пошто је да ће се овај max моменат јавити испод силе која је најближа резултанти.

$\frac{R}{\ell}\cdot P_1$

$\frac{R}{\ell}P_1 = tg\alpha \cdot$ дужина = сила



$$P_w^L = \frac{P_{w-1}\cdot\lambda_w}{2} + \frac{(P_w - P_{w-1})\lambda_w}{3} + \frac{\lambda_w}{3}\cdot\frac{2P_w - P_{w-1} - P_{w+1}}{8}$$

$$P_w^L = \frac{\lambda_w}{24}\left(10P_w + 3P_{w-1} - P_{w+1}\right)$$

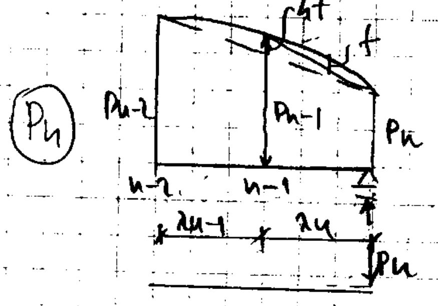
$$P_w^L = \frac{P_{w+1}\cdot\lambda_{w+1}}{2} +$$

$$P_w^d = \frac{P_{w+1}\cdot\lambda_{w+1}}{2} + \frac{(P_w - P_{w+1})\cdot\lambda_{w+1}}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\lambda_{w+1}}{3}\left(\frac{2P_w - P_{w-1} - P_{w+1}}{8}\right)$$

$$P_w^d = \frac{\lambda_w}{24}\left(10P_w + 3P_{w+1} - P_{w-1}\right) \qquad \boxed{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda}$$

$$P_w = P_w^d + P_w^L = 2\frac{\lambda_w}{24}\left(20P_w + 2P_{w+1} + 2P_{w-1}\right)$$

$$\mathbf{P_w = \frac{\lambda}{12}\left(10P_w + P_{w-1} + P_{w+1}\right)}$$



$$\Sigma M_n = 0 \quad P_n = \frac{P_n\cdot\lambda_n}{2} + \frac{(P_{n-1} - P_n)}{6}\lambda_n + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda_n\cdot\frac{2P_{n-1} - P_n - P_{n-2}}{8}$$

$$\mathbf{P_n = \frac{\lambda_n}{24}\left(7P_n + 6P_{n-1} - P_{n-2}\right)}$$

3) усвојити промену линеарног оптерећења.

$$P_0 = \frac{\lambda_0}{6}\left(2P_0^d + P_1^L\right)$$

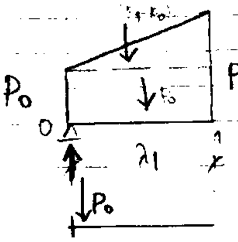
$$P_w = \frac{\lambda_w}{6}\left(P_{w-1}^d + 2P_w^L\right) + \frac{\lambda_{w+1}}{6}\left(2P_w^d + P_{w+1}^L\right)$$

$$P_n = \frac{\lambda_n}{6}\left(P_{n-1}^d + 2P_n^L\right)$$

1) оптерећење се мења линеарно од чвора до чвора.

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda}$$

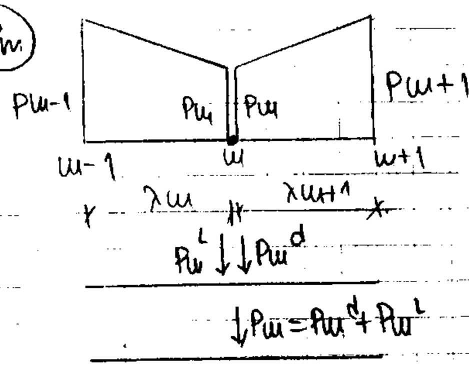
(P_0)



$$\sum M_0^d = 0: \quad \frac{p_0 \cdot \lambda_1}{2} + \frac{(p_1 - p_0)\lambda}{6} = \frac{2p_0 + p_1}{6} \cdot \lambda_1$$

$$P_0 = \frac{\lambda_1}{6}(2p_0 + p_1)$$

(P_m)



$$\sum M_m^l = 0 \quad P_m^l = \frac{p_m \cdot \lambda_m}{2} + \frac{(p_{m-1} - p_m)\lambda_m}{6}$$

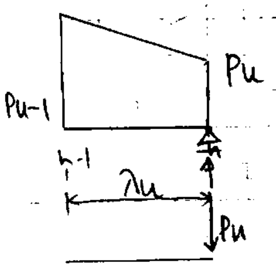
$$P_m^l = \frac{\lambda_m}{6}(2p_m + p_{m-1})$$

$$\sum M_m^D = 0 \quad P_m^d = \frac{p_m \cdot \lambda_{m+1}}{2} + \frac{(p_{m+1} - p_m)}{6} \cdot \lambda_{m+1}$$

$$P_m^d = \frac{\lambda_{m+1}}{6}(2p_m + p_{m+1})$$

$$P_m = \frac{\lambda_m}{6}(p_{m-1} + 2p_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{6}(2p_m + p_{m+1})$$

(P_n)

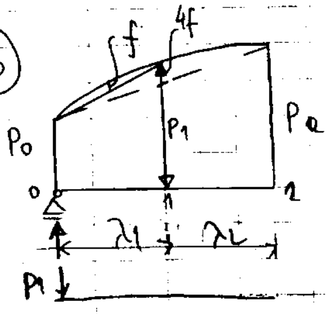


$$\sum M_n^l = 0 \quad P_n = \frac{p_n \cdot \lambda_n}{2} + \frac{(p_{n-1} - p_n) \cdot \lambda_n}{6}$$

$$P_n = \frac{\lambda_n}{6}(2 \cdot p_n + p_{n-1})$$

2) оптерећење се мења параболично од чвора до чвора.

(P_0)



$$P_0 = \frac{p_0 \cdot \lambda_1}{2} + \frac{(p_1 - p_0)\lambda_1}{6} + \frac{2}{3} \cdot f \cdot \lambda_1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_0 = \frac{p_0 \lambda_1}{2} + \frac{(p_1 - p_0)\lambda_1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \lambda_1 \cdot \frac{2p_1 - p_0 - p_2}{8}$$

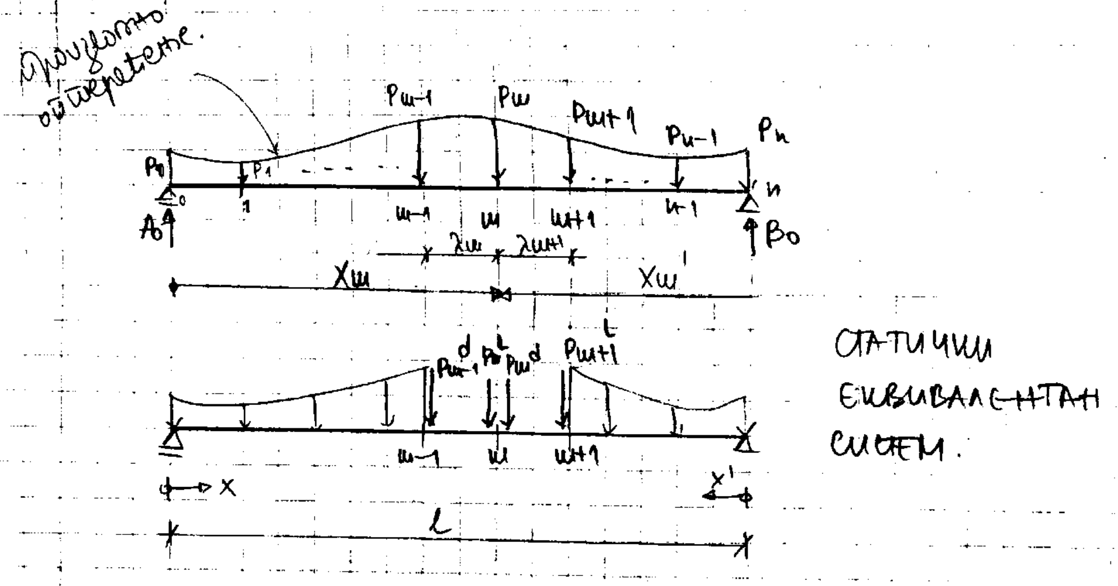
$$P_0 = \frac{\lambda_1}{24}(7p_0 + 6p_1 - p_2)$$

$$\frac{p_0 + p_2}{2} = p_1 - 4f$$

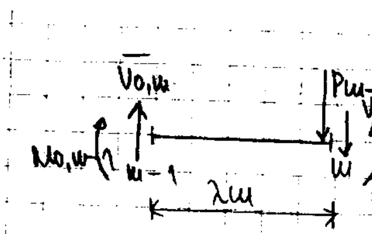
$$4f = \frac{-p_0 - p_2 + 2p_1}{2}$$

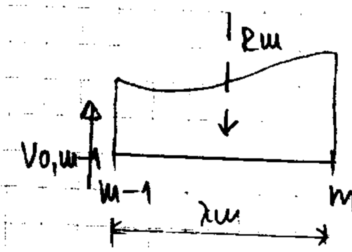
$$f = \frac{-p_0 + 2p_1 - p_2}{8}$$

3) ОПТЕР. СТАЊЕ ЗАДАТО ВРЕДНОСТИМА У НИЗУ ДИСКРЕТНИХ ТАЧАКА.



Расподељено оптерећење замењујемо статички еквивалентним сис. концентрисаних сила. Силе одређујемо из услова да моменти савијања у чворовима од задатог оптерећења буду једнаки моментима услед сила P_m. Трансверзалне силе не одговарају стварном, већ тзв. замењујућем оптерећењу. Служе нам за срачунавање момената. Стварне V одређујемо из услова равнотеже вертикалних сила за сегментну ламелу, узимајући у обзир резултантно оптер. R_m.



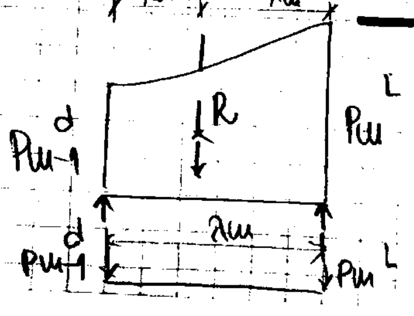


$V_{0,m}$ до чвор. јер се мења од чвора до чвора.

$$\overline{V}_{0,m+1} = \overline{V}_{0,m} - P_m$$

$$\boxed{M_{0,m} = M_{0,m-1} + \overline{V}_{0,m}\lambda_m}$$

$$\boxed{V_{0,m} = V_{0,m-1} - R_m}$$



$$\Sigma M_m = 0 \Rightarrow P_{m-1}^{d}\cdot\lambda_m = R_m\cdot\lambda_m'' \Rightarrow P_{m-1}^{d} = R_m\frac{\lambda_m''}{\lambda_m}$$

$$\Sigma M_{m-1} = 0: \; P_m^{L}\cdot\lambda_m = R_m\cdot\frac{\lambda_m'}{\lambda_m} \Rightarrow \boxed{P_m^{L} = R_m\frac{\lambda_m'}{\lambda_m}}$$

$$P_m = P_m^{L} + P_m^{D} \qquad P_0 = P_0^{d} \qquad P_n = P_n^{L}$$

$\Sigma M_u = 0$

$A_0 = R - \xi_R'$ $\quad B_0 = R - \xi_R$ $\quad (\Sigma M_i = 0)$

Ф-је T_f и W_f су бездимензионалне ф-је које зависе само од облика оптерећења, а не од интензитета и распона.

$$T_f = 1 - \frac{1}{A_0}\int_2^c p(x)\,dx = -1 + \frac{1}{B_0}\int_k^c p(x')\,dx' \Rightarrow \boxed{T_f' = -T_f(\xi')}$$

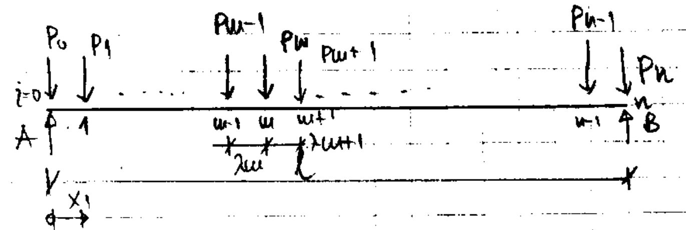
$$W_f = \xi - \frac{1}{A_0 l}\int_2^c p(x)(x_c - x)\,dx = \xi' - \frac{1}{B_0 l}\int_2^c p(x')\,(x_c' - x')\,dx'$$

$$\Rightarrow \boxed{W_f' = W_f(\xi')}$$

Ако су за једно оптерећење ф-је T_f и W_f, за симетрично оптерећење ће бити T_f' и W_f'.

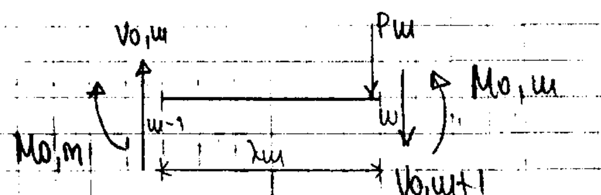
$$T_f = \frac{V_0}{A} \qquad W_f = \frac{M_0}{A \cdot l}$$

2) ОПТЕРЕЋЕЊЕ ЗАДАТО КАО СИС. КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА



$$A_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x_m' \qquad B_0 = \frac{1}{l}\sum_{m=0}^{n} P_m x_m = \sum_{m=0}^{n} P_m - A_0.$$

-издвојимо једну ламелу.



$M_0(m)$ - везано за чвор десно њему.

$T_{0,m}$ за ламелу (индекс десног чвора)

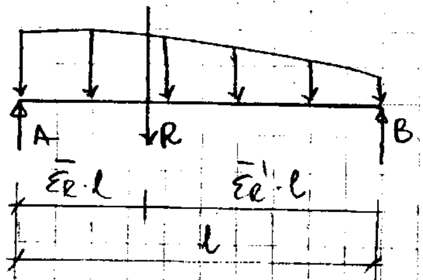
јер је сила const у једном делу.

$$\boxed{V_{0,m+1} = V_{0,m} - P_m} \qquad \boxed{M_{0,m} = M_{0,m-1} + V_{0,m} \cdot \lambda_m}$$

Силе у пресецима просте греде

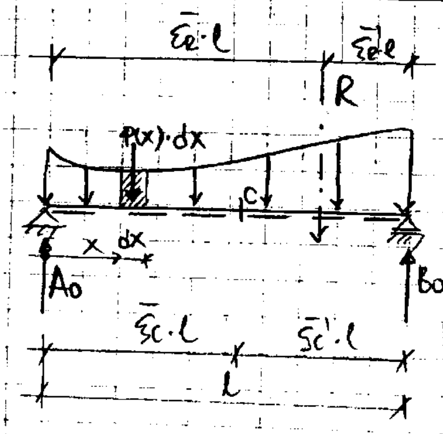
Статичке сила у пресеку се лако утврђују ако знамо статичке сила Ho, Vo и Mo.

Посматрамо просту греду оптерећену произвољним оптерећењем у правцу управном на осу штапа, и тражимо силе у пресеку.



$$R = \int_i^k p \cdot dx$$

1) ОПТЕРЕЋЕЊЕ ЗАДАТО АНАЛИТИЧКИ



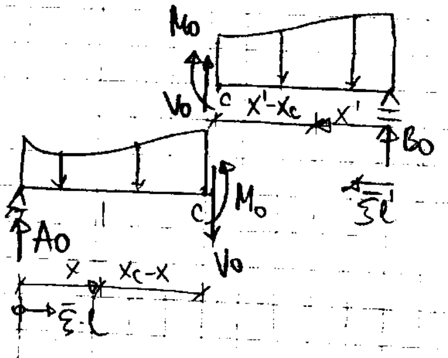
- ф-ја оптерећења нам је позната

$x_c = \bar{\xi}_c \cdot l \quad x_c' = \bar{\xi}_c' \cdot l \quad \xi + \xi' = 1$

A_0, B_0 - реакције просте греде

$$R = \int_i^k p(x)\,dx$$

леви део:



$$V_0 = A_0 - \int_i^c p(x)\,dx$$

$$= A_0 \left(1 - \frac{1}{A_0}\int_i^c p(x)\,dx\right) = A_0 T_f$$

$$\boxed{V_0 = A_0 \cdot T_f}$$

$$M_0 = A_0 \cdot \bar{\xi}_c \cdot l - \int_i^c p(x)(x_c - x)\,dx$$

$$= A_0 l \left(\xi_c - \frac{1}{A_0 l}\int_i^c p(x)(x_c - x)\,dx\right)$$

$$= A_0 \cdot l\,\omega_f$$

$$\boxed{M_0 = A_0 \cdot l\,\omega_f}$$

десни део:

$$V_0 = -B_0 + \int_k^c p(x')\cdot dx' = B_0\left[-1 + \frac{1}{B_0}\int_k^c p(x')\,dx'\right] = B_0 \cdot T_f'$$

$$M_0 = B_0 \bar{\xi}_c' \cdot l - \int_k^c p(x')\cdot(x_c' - x')\,dx' = B_0 \cdot l\left[\bar{\xi}_c' - \frac{1}{B_0 l}\int_k^c p(x')(x_c' - x')\,dx'\right]$$

$$= B_0 l\,\omega_f'$$

Оптерећење у виду спољашњих распоређених момената савијања m.

- Заменићемо га еквивалентним системом концентрисаних сила W_k^m. Под претпоставком да се моменти m од тачке до тачке мењају линеарно, изрази за силе W_k^m ће гласити:

$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_{1,L}}{2}$$

$$W_k^m = \frac{m_{k-1,d} + m_{k,L}}{2} - \frac{m_{k,d} + m_{k+1,L}}{2} \qquad k = 1, 2, \dots n-1$$

$$W_n^m = \frac{m_{n-1,d} + m_n}{2}$$

- Ако нема скокова, тј. оптерећење расподељеним моментима је ~~кон~~ непрекидно, тежине W_k^m су:

$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_1}{2} \qquad W_k^m = \frac{m_{k-1} - m_{k+1}}{2} \qquad k = 1, 2, \dots n-1$$

$$W_n^m = \frac{m_{k-1} + m_n}{2}$$