

- Диференцијалне једначине -

Једногласна облика $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ је диференцијално једногласно n -ог реда.

Φ -ја $y = \Psi(x)$ која задовољава једногласну је решење а њен график интегрална крива.

Ако је решење облика $\Phi(x, y) = 0$, то је имплицитан једногласник.

$y = \Phi(x, c_1, \dots, c_n)$ је општи имплицитан, $c_i \in \mathbb{R}$ (const)

За посебне вредности c_1, \dots, c_n се добија партикуларно решење.

За дату формулу кривих $y = \Phi(x, c_1, \dots, c_n)$ можемо поћи диференцијалну једногласну где је то решење.

Пример: Поћи диференцијалну једногласну формулу изражава:

$$y = c_1(x - c_2)^2 \quad (1)$$

$$y - c_1(x - c_2)^2 = 0 \quad / \frac{d}{dx}$$

$$y' - 2c_1(x - c_2) = 0 \quad / \frac{d}{dx}$$

$$y'' - 2c_1 = 0$$

$$c_1 = \frac{y''}{2}$$

$$y' - y''(x - c_2) = 0 \Rightarrow x - c_2 = \frac{y'}{y''} \Rightarrow c_2 = x - \frac{y'}{y''} \Rightarrow$$

$$c_1 \text{ и } c_2 \rightarrow (1)$$

\Downarrow

$$c_2 = \frac{y''x - y'}{y''}$$

$$y = \frac{y''}{2} \left(x - \left(x - \frac{y'}{y''} \right) \right) = \frac{y''}{2} \left(\frac{y'}{y''} \right)^2 \Rightarrow y = \frac{(y')^2}{2y''} \quad / \cdot 2y''$$

$$2yy'' = y'^2$$

- диференцијална једначина

2) Найдите дифференциальную уравнение семейства кривых

$$a) x^2 + y^2 = c^2$$

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0 \quad / \quad dx$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$\boxed{x + y \cdot y' = 0}$$

$$d) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \quad / \quad dx$$

$$y' = c_1 e^{2x} \cdot 2 + c_2 e^{-x} (-1)$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} \quad / \quad dx$$

$$y'' = 2c_1 e^{2x} \cdot 2 + c_2 e^{-x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

$$y' + y'' = 6c_1 e^{2x}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{y' + y''}{6e^{2x}}}$$

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{y' + y''}{6e^{2x}} \right) e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$y' = \frac{y' + y''}{3} - c_2 e^{-x}$$

$$c_2 e^{-x} = -y' + \frac{y' + y''}{3}$$

$$c_2 = \frac{-y' + \frac{y' + y''}{3}}{e^{-x}} \Rightarrow c_2 = \frac{-3y' + y' + y''}{e^{-x}} \Rightarrow c_2 = \frac{y'' - 2y'}{3e^{-x}}$$

$$y = \frac{y' + y''}{6e^{2x}} e^{2x} + \frac{y'' - 2y'}{3e^{-x}} e^{-x} \quad / \quad 6$$

$$6y = y' + y'' + 2y'' - 4y'$$

$$\boxed{6y + 3y' - 3y'' = 0} \quad / : 3 \Rightarrow \boxed{2y + y' - y'' = 0}$$

$$c) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad / dx$$

$$y' = C_1(-\sin 2x) \cdot 2 + C_2 \cos 2x \cdot 2$$

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \quad / dx$$

$$y'' = -2C_1 \cos 2x \cdot 2 + 2C_2(-\sin 2x) \cdot 2$$

$$y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x$$

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \quad / -2 \cos 2x$$

$$y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x \quad / \sin 2x$$

$$-2 \cos 2x y' = 4C_1 \sin 2x \cos 2x - 4C_2 \cos^2 2x$$

$$\sin 2x y'' = -4C_1 \sin 2x \cos 2x - 4C_2 \sin^2 2x$$

$$-2 \cos 2x y' + \sin 2x y'' = -4C_2$$

$$C_2 = \frac{2 \cos 2x y' - \sin 2x y''}{4}$$

$$-2 \cos 2x y' = 4C_1 \sin 2x \cos 2x - 2 \cos^2 2x x y + \sin 2x \cos^2 2x y''$$

$$C_1 = \frac{2 \cos^2 2x y' - y'' \sin 2x \cos 2x - 2 y'}{4 \sin 2x}$$

Ⓐ Дифференцирование уравнения первого рода:

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

ⓐ Метод разделения переменных

$$y' = f(x, y)$$

$$\textcircled{3} y' = \frac{2x}{3y^2+1} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$$

$$(3y^2+1)dy = 2x dx \quad / \int$$

$$\int (3y^2+1) dy = 2 \int x dx$$

$$\int 3y^2 dy + \int dy = 2 \int x dx$$

$$y^3 + y = x^2 + c$$

$$4) \quad xy'e^y - 2e^y + 2 = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} e^y - 2e^y + 2 = 0$$

$$2e^y - 2 = x \frac{dy}{dx} e^y \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy e^y}{2e^y - 2}$$

$$\ln|x| + c = \frac{1}{2} \int \frac{e^y}{e^y - 1} dy$$

$$\int \frac{e^y}{e^y - 1} dy = \left(e^y = t \Rightarrow dy = \frac{dt}{e^y} \right)$$

$$\int \frac{t}{t-1} \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t-1} = \int \frac{d(t-1)}{t-1} = \ln|t-1| =$$

$$= \ln|e^y - 1|$$

$$\ln|x| + c = \frac{1}{2} \ln|e^y - 1| \quad / \cdot 2$$

$$2 \ln|x| + 2c = \ln|e^y - 1|$$

$$\ln x^2 + \ln e^{2c} = \ln|e^y - 1| \quad / e$$

$$x^2 \cdot e^{2c} = |e^y - 1|$$

$$e^y = x^2 e^{2c} + 1 \quad / \ln$$

$$y = \ln|x^2 e^{2c} + 1|$$

$$y = \ln(x^2 e^{2c} + 1)$$

$$5) \quad y' - xy^2 = xy$$

$$\frac{dy}{dx} - xy^2 = xy$$

$$\frac{dy}{dx} = xy + xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y + y^2)$$

$$dy = x \cdot (y + y^2) dx \quad / \frac{1}{y+y^2}$$

$$\frac{dy}{y+y^2} = x dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{y+y^2} = \int x dx$$

$$\int \frac{dy}{y+y^2} = \int \frac{dy}{(y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{\frac{dy}{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1} = 2 \int \frac{d(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{x^2}{2} + c = \ln \left| \frac{\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1} \right|$$

$$\frac{x^2}{2} + c = \ln \left| \frac{y}{y+1} \right|$$

$$\ln e^{\frac{x^2}{2}} = \ln \left| \frac{y}{y+1} \right| \quad / e$$

$$\frac{y}{y+1} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = ye^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y - ye^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(1 - e^{\frac{x^2}{2}}) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{1 - e^{\frac{x^2}{2}}} + 1$$

$$\textcircled{6} \quad y' = \frac{2x}{3y^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$$

$$(3y^2+1)dy = 2x dx \quad / \int$$

$$3 \int y^2 dy + \int dy = 2 \int x dx$$

$$y^3 + y = x^2 + c$$

$$\textcircled{7} \quad y' = y \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \tan x$$

$$\tan x dx = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |y|$$

$$-\int \frac{d \cos x}{\cos x} = \ln |y|$$

$$- \ln |\cos x| = \ln |y| \quad / e$$

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

[2]

$$3y^2 y' + 16x = 2xy^3$$

$$3y^2 y' + 16x - 2xy^3 = 0$$

$$3y^2 y' + 2x(8 - y^3) = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2x(8 - y^3) = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = -2x \cdot (8 - y^3) \quad \in \text{привести}$$

$$3y^2 dy = 2x \cdot (8 - y^3) dx \quad \frac{1}{(8 - y^3)}$$

$$\frac{3y^2}{8 - y^3} dy = 2x dx \quad \int$$

$$\int \frac{3y^2}{8 - y^3} dy = 2 \int x dx$$

$$\int \frac{3y^2}{8 - y^3} dy = \int \frac{3y^2}{(2 - y)(4 + 2y + y^2)}$$

$$\frac{A}{2 - y} + \frac{By + C}{4 + 2y + y^2} = A \cdot (4 + 2y + y^2) + (By + C) \cdot (2 - y) = 3y^2$$

$$4A + 2Ay + Ay^2 + 2By - By^2 + 2C - Cy = (A + B)y^2 + (2A + 2B + C)y + (4A + 2C)$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 3 \\ 2A + C - 2B = 0 \\ 4A - 2C = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{A=1} \\ \boxed{B=2} \\ \boxed{C=2} \end{array}$$

$$\int \frac{dy}{y-2} + \int \frac{2y+2}{y^2+2y+4} dy = \int \frac{dy-2}{y-2} + 2 \int \frac{y+1}{y^2+2y+4} dy =$$

$$= \ln|y-2| + \int \frac{d(y^2+2y+4)}{y^2+2y+4} = \ln|y-2| + \ln|y^2+2y+4|$$

$$x^2 = \ln|y-2| + \ln|y^2+2y+4|$$

$$9) y' \sqrt{1-x^2} = 1+y^2$$

$$(-y+x^2) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{1-x^2} = 1+y^2 \quad / dx$$

$$dy \sqrt{1-x^2} = (1+y^2) dx \quad / dx$$

$$\frac{dy \sqrt{1-x^2}}{dx} = 1+y^2 \quad / \frac{1}{dy}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{1+y^2}{dy}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctg y = \arcsin x + C$$

$$B) \text{ Трешение типа } y' = f(ax+by+c)$$

$$\text{смена: } ax+by+c = u$$

$$10) y' = \cos(x+y)$$

$$x+y = u \quad / \text{ диф по } x$$

$$1+y' = u'$$

$$y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = \cos u$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \cos u$$

$$\frac{du}{dx} = \cos u + 1 \quad / \frac{1}{du}$$

$$\frac{1}{dx} = \frac{\cos u + 1}{du} \Rightarrow \frac{du}{\cos u + 1} = dx \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{\cos u + 1} = \int dx = \int \frac{du}{\cos u + 1} = x$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = x + C}$$

$$\int \frac{du}{\cos u + 1} = \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t, \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, du = \frac{2dt}{1+t^2} \right)$$

$$2 \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = 2 \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{2} = \int dt = t + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

$$41) \quad y' = (4x + y + 1)^2$$

$$u = 4x + y + 1 \quad / dx$$

$$u' = 4 + y'$$

$$y' = u' - 4$$

$$u' - 4 = u^2 \quad / u^2$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 4$$

$$\frac{du}{u^2 + 4} = dx \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = x$$

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = \int \frac{du}{4 \left(\left(\frac{u}{2} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} = x$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \arctan(4x + y + 1) = x}$$

© Хомогене дифференциалне једначине

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ смена } u(x) = \frac{y}{x}$$

Своди се на диференцијалну ј-ну са раздвојеним променљивим. **HA A**

$$42) \quad y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x} \quad \frac{y}{x} = u \rightarrow y = u \cdot x \quad / x$$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = u + \cos u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = u + \cos u$$

$$\frac{x}{dx} \cdot du = \cos u$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\cos u} \quad / \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\cos u} \quad \left. \begin{array}{l} \sin u = t \quad \cos u \, du = dt \\ du = \frac{dt}{\cos u} \end{array} \right\}$$

$$\ln x = \int \frac{dt}{\cos^2 u} = \int \frac{dt}{1 - \sin^2 u} =$$

$$= \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right| + C$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \frac{t}{x}}{1 - \sin \frac{t}{x}} \right| + C$$

$$\text{13} \quad y' = \frac{y}{x} (1 + \ln \frac{y}{x})$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \quad | x'$$

$$y' = u' \cdot x + u$$

$$u' \cdot x + u = u(1 + \ln u)$$

$$u' \cdot x + u = u + u \ln u$$

$$u' \cdot x = u \ln u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = u \ln u$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u \ln u} \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u \ln u}$$

$$\ln x = \int \frac{du}{u \ln u}$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} \quad \ln u = t \quad \frac{du}{u} = dt$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln \ln u + C = \ln \ln \frac{y}{x} + C$$

$$\ln |x| = \ln \ln \left| \frac{y}{x} \right| + C$$

$$\boxed{\ln \frac{y}{x} = x + C}$$

$$1) x=0 \text{ не решение}$$

$$2) u=0, \frac{y}{x}=0 \Rightarrow y=0 \notin Df$$

$$3) \ln u=0, \frac{y}{x}=1 \Rightarrow \boxed{y=x} - \text{Искомое решение}$$

$$\boxed{14} \quad y' = \frac{x+3y}{2x}$$

$$y' = \frac{x \cdot (1 + 3\frac{y}{x})}{2x}$$

$$y' = \frac{1 + 3\frac{y}{x}}{2}$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$$

$$u'x + u = \frac{1 + 3u}{2}$$

$$2u'x + 2u = 1 + 3u$$

$$2u'x - u - 1 = 0$$

$$2u'x - u - 1 = 0$$

$$2 \frac{du}{dx} x = u + 1$$

$$\frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$2 \int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$2 \int \frac{d(u+1)}{u+1} = \ln x + C$$

$$2 \ln|u+1| = \ln x + C$$

$$2 \ln|\frac{y}{x} + 1| = \ln x + C$$

$$\ln(\frac{y}{x} + 1)^2 = \ln x + C$$

$$e^{\ln(\frac{y}{x} + 1)^2} = e^{\ln x + C}$$

$$(\frac{y}{x} + 1)^2 = x + C - \text{общее решение}$$

$$1) x \neq 0$$

$$2) u \neq -1$$

$$15) y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{x \cdot (1 + \frac{y}{x})}{x \cdot (1 - \frac{y}{x})}$$

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \quad \frac{y}{x} = u \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u}{1-u} - \frac{u-u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \quad \int$$

$$\int \left(\frac{1-u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} + \int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2} \ln|u^2+1| + \arctan u$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y^2}{x^2} + 1 \right| + \arctan \frac{y}{x} = \ln x + C$$

① Загнати облик $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

смене $x = u + A$

$y = v + B$

$$16) y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$$

$x = u + A$

$y = v + B \quad / dx \Rightarrow y' = v'$

$$\frac{2 \cdot (u+A) - (v+B) + 1}{u+A - 2(v+B) + 1} = \frac{2u - v + (2A - B + 1)}{u - 2v + (A - 2B + 1)}$$

$$2A - B + 1 = 0$$

$$A - 2B + 1 = 0 \quad (2)$$

$$2A - B + 1 = 0$$

$$-2A + 4B - 2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B + 1 = 0 \\ 3B - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = \frac{1}{3} \\ 2A - \frac{1}{3} + 1 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$v' = \frac{2u - v}{u - 2v} \leftarrow \text{Подставим найденные значения параметров. } \odot$$

$$v' = \frac{2 - \frac{u}{t}}{1 - 2\frac{u}{t}}$$

$$\frac{v}{u} = t \Rightarrow v = t \cdot u \Rightarrow v' = t' \cdot u + t$$

$$t' \cdot u + t = \frac{2 - t}{1 - 2t}$$

$$\frac{dt}{du} \cdot u + t = \frac{2 - t}{1 - 2t}$$

$$\frac{dt}{du} \cdot u = \frac{2 - t}{1 - 2t} - \frac{t - 2t^2}{1 - 2t}$$

$$\frac{dt}{du} \cdot u = \frac{2 - t - t + 2t^2}{1 - 2t}$$

$$\frac{dt}{du} \cdot u = \frac{2t^2 - 2t + 2}{1 - 2t}$$

$$\frac{dt}{1 - 2t} = \frac{du}{2t^2 - 2t + 2} \quad \int$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1 - 2t}{t^2 - t + 1} = \ln u$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - t + 1}{t^2 - t + 1} = -\frac{1}{2} \ln |t^2 - t + 1| = \ln u$$

$$-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y}{x} + 1 \right) = \ln u$$

$$\left. \begin{aligned} u &= x + \frac{1}{3} \\ v &= y - \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}} \right)^2 - \frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}} + 1 \right) = \ln(x+\frac{1}{3}) \right] \text{ Альтернативное решение}$$

17) Решим дифференциальную уравнение:

$$(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$$

1) Сделаем на однородную дифференциальную уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

$$x = u + A$$

$$y = v + B \quad / dx$$

$$y' = v'$$

$$\frac{2 \cdot (u+A) + u + B + 1}{4 \cdot (u+A) + 2 \cdot (v+B) - 3} = \frac{2u + 2A + v + B + 1}{4u + 4A + 2v + 2B - 3} =$$

$$= \frac{2u + v + (2A + B + 1)}{4u + 2v + (4A + 2B - 3)}$$

$$2A + B + 1 = 0 \quad (-2)$$

$$-4A - 2B - 2 = 0$$

$$4A + 2B - 3 = 0 \quad (+)$$

$$4A + 2B - 3 = 0$$

Ноль!

$$y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

$-5=0 \Rightarrow$ Система не имеет решения

Ненале на этой плоскости!

$$y' = \frac{2x+y+1}{2(2x+y)-3}$$

$$\Rightarrow u = 2x + y \quad / dx$$

$$u' = 2 + y' \Rightarrow y' = u' - 2$$

$$u' - 2 = \frac{u+1}{2u-3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{2u-3} + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1+4u-6}{2u-3} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u-3}{u-3}$$

$$\frac{u-3}{5u-5} du = dx \quad \int$$

$$x+C = \frac{2}{5} \int \frac{u du}{u-1} - \frac{3}{5} \int \frac{du}{u-1}$$

...

$$x+C = \frac{2}{5}(u-1) + \frac{2}{5} \ln|u-1| - \frac{3}{5} \ln|u-1|$$

⑤ Линеарне диференцијалне једначине I реда:

$$\begin{aligned} y' + p(x) \cdot y &= q(x) \\ y &= e^{-\int p(x) dx} \cdot \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] \end{aligned}$$

18

$$y' - y \cdot \alpha \sin x = 2x \sin x \Rightarrow p(x) = -\alpha \sin x$$

$$q(x) = 2x \sin x$$

$$y = e^{\int \alpha \sin x dx} \cdot \left[C + \int 2x \sin x e^{\int \alpha \sin x dx} dx \right]$$

$$\int \alpha \sin x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

$$\int x \sin x e^{-\ln |\sin x| + C} dx = \int x \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \sin x \cdot [C + x^2] \Rightarrow y = C \sin x + x^2 \sin x$$

19

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y \ln y + y - x}{y}$$

$$x' = 2 \ln y + 1 - \frac{x}{y}$$

$$x' + \frac{1}{y} \cdot x = 2 \ln y + 1 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{y}$$

$$q(x) = 2 \ln y + 1$$

$$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \cdot [C + \int (k \ln y + 1) e^{\int \frac{1}{y} dy} dy]$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y$$

$$2 \int (\ln y + 1) \cdot y \, dy$$

$$2 \int y \ln y \, dy + 2 \int y \, dy$$

$$u = \ln y \Rightarrow du = \frac{dy}{y}$$

$$xv = y \, dy = v = \frac{y^2}{2}$$

$$\ln y \cdot \frac{y^2}{2} - \int \frac{y^2}{2} \cdot \frac{dy}{y} = \ln y \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \int y \, dy =$$

$$= \ln y \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{1}{4} y^2 + C \Rightarrow \ln y \cdot y^2 - \frac{1}{2} y^2$$

$$x = \frac{1}{y} \cdot [C + \ln y \cdot y^2]$$

Ⓔ - БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА -

✓

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha, \quad \alpha \neq (0, 1)$$

СМЕНА:

$$z = y^{1-\alpha} \rightarrow \text{СВОДИ СЕ НА ЛИНЕАРНУ}$$

$$\boxed{20} \quad y' = \frac{4}{x} \cdot y + x \sqrt{y}$$

$$y' - \frac{4}{x} y = x y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow y' = 2z \cdot z'$$

$$2z \cdot z' - \frac{4}{x} \cdot z^2 = xz \quad / : 2z$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2} \Rightarrow p(x) = \frac{2}{x}$$

$$q(x) = \frac{x}{2}$$

$$z = e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} \cdot [c + \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} dx]$$

$$z = x^2 \cdot [c + \frac{1}{2} \ln|x|]$$

$$y = x^4 \cdot (c + \frac{1}{2} \ln x)^2$$

$$\boxed{21} \quad 2xyy' - y^2 + x = 0 \quad / : 2xy$$

$$y' - \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} = 0$$

$$y' - \frac{1}{2x} \cdot y = -\frac{1}{2} \cdot y^{-1} \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$z = y^2 \rightarrow y = \sqrt{z} = y' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{2x} \cdot \sqrt{z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \quad / \cdot 2\sqrt{z}$$

$$z' - \frac{z}{x} = -1$$

$$z' - \frac{z}{x} = -1 \Rightarrow$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -1 \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = -1$$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot [c - \int e^{-\ln x} dx]$$

$$z = x \cdot [c - \int \frac{dx}{x}]$$

$$z = x \cdot [c - \ln|x|]$$

$$y^2 = x [c - \ln|x|]$$

$$\boxed{22} \quad y' = y \cdot \cos x + \frac{y^3}{\sin x}$$

$$y' - \cos x \cdot y = \frac{1}{\sin x} \cdot y^3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

$$z = y^2 \Rightarrow z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{z'}{2\sqrt{z}} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{2\sqrt{z}}$$

$$-\frac{z'}{2\sqrt{z^3}} = \alpha g x \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{z^3}}}{\sin x}$$

$$-\frac{z'}{2\sqrt{z^3}} = \alpha g x \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z^3} \sin x} \quad / \cdot 2\sqrt{z^3}$$

$$-z' = 2\alpha g x z + \frac{2}{\sin x}$$

$$z' = -2\alpha g x z - \frac{2}{\sin x}$$

$$z' + 2\alpha g x z = -\frac{2}{\sin x} \Rightarrow P(x) = 2\alpha g x$$

$$Q(x) = -\frac{2}{\sin x} \quad \text{и све исто}$$

$$\boxed{23} \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$$

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2 y' \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$z = y^{-1} \Rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} \dots$$

16.05.2003.

$$\textcircled{6} \text{ Рундштучеве једначине: } y' + p(x)y + q(x)y^2 = F(x) \quad \checkmark$$

ако је познато једно бариклупно решење y_1 ,

ако је смена: $y = y_1 + \frac{1}{z} \rightarrow$ своди се на линеарну \textcircled{E}

$$\boxed{24} \quad y' = y^2 - \frac{2}{x^2}; \quad y_1 = x^{\alpha}$$

$$y' + 0 \cdot y - 1 \cdot y^2 = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$$

$$P(x) = 0$$

$$Q(x) = -1$$

$$F(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$y_1' = y_1^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$(x^{\alpha})' = (x^{\alpha})^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\alpha \cdot x^{\alpha-1} = x^{2\alpha} - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$\alpha \cdot x^{\alpha+1} = x^{2\alpha+2} - 2$$

$$\alpha \cdot x^{\alpha+1} - x^{2\alpha+2} = -2$$

$$\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$y_1 = x^{\alpha} = x^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{x}}$$

Смена:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2} \quad / \cdot x^2 z^2$$

$$-z^2 - z' \cdot x^2 = \left(\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right) \cdot x^2 z^2 - 2z^2$$

$$-z^2 - z' \cdot x^2 = z^2 + 2xz + x^2 - 2z^2$$

$$-z'x^2 = 2xz + x^2 \quad / : (-x^2)$$

$$z' = -\frac{2z}{x} - 1$$

$$\boxed{z' + \frac{2}{x}z = -1} \rightarrow \textcircled{E}$$

$$p(x) = \frac{2}{x}$$

$$q(x) = -1$$

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \cdot [c - \int e^{\int \frac{2}{x} dx} dx] = \dots$$

$$z = \frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{c}{x^2} - \frac{x}{3}}}$$

$$\textcircled{25} \quad y' + y^2 - 3y \operatorname{tg} x = 1 - \operatorname{tg}^2 x, \quad y_1 = x \operatorname{tg} x$$

$$y_1' - 3y_1 \operatorname{tg} x + y_1^2 = 1 - \operatorname{tg}^2 x \quad \rightarrow \boxed{y_1' = \frac{x}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{x}{\cos^2 x} - 3x \operatorname{tg} x + x^2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \quad / \cdot \cos^2 x$$

$$x + x^2 \sin^2 x - 3x \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$x + (x^2 - 3x) \sin^2 x = 1 + 2 \sin^2 x$$

$$\boxed{x=1}$$

$$x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x_1=1} \quad \boxed{x_2=2} \Rightarrow \boxed{y_1 = \operatorname{tg} x}$$

$$\text{Смена: } y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{z}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2}}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} + \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{z}\right)^2 - 3 \cdot \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{z}\right) \operatorname{tg} x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} + \operatorname{tg}^2 x + \frac{2}{z} \operatorname{tg} x + \frac{1}{z^2} - 3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{3}{z} \operatorname{tg} x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{tgx}{z} - tg^2x + \frac{1}{\cos^2x} - 1 = 0 \quad / \cdot (-z^2)$$

$$z' - 1 + ztgx + z^2tg^2x - \frac{z^2}{\cos^2x} + z^2 = 0$$

$$z' - 1 + z \frac{\sin x}{\cos x} + z^2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{z^2}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x \cdot z^2}{\cos^2 x}$$

$$z' - 1 + \frac{z \sin x \cos x + z^2 \sin^2 x - z^2 + \cos^2 x \cdot z^2}{\cos^2 x}$$

$$z' - 1 + ztgx =$$

$$\boxed{z' + ztgx = 1} \quad \text{Лин. дво. једначина (1)}$$

$$P(x) = tgx$$

$$Q(x) = 1$$

$$z = e^{-\int tgx dx} \left[c + \int e^{\int tgx dx} dx \right]$$

$$z = e^{\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx} \left[c + \int e^{-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} dx} dx \right]$$

$$z = e^{\ln|\cos x|} \left[c + \int \frac{1}{\cos x} dx \right]$$

$$z = \cos x \left[c + \ln|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| \right]$$

$$y = tgx + \frac{1}{z} = tgx + \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Мора да се зна један партикуларан интеграл

$$\text{[26]} \quad y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2} \quad (1)$$

Одредити параметар a тако да $y_p = \frac{a}{x}$ буде партикуларни интеграл, а затим наћи општи интеграл.

$$y_p' = \frac{1}{2}y_p^2 + \frac{1}{2x^2} \quad , \quad y_p' = -\frac{a}{x^2}$$

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{1}{2x^2} (a^2 + 1)$$

$$y(1) = 0 \quad y(2) = x - x \ln x = 0$$

$$\frac{1}{2}a^2 + a + \frac{1}{2} = 0 \quad / \cdot 2$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$y_p = \frac{a}{x}, \quad y_p' = \frac{-a}{x^2} \Rightarrow \boxed{y_p = -\frac{1}{x}}, \quad \boxed{y_p' = \frac{1}{x^2}}$$

СМЕНА:

$$y = y_p + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x^2} - \frac{z'}{2}} \Rightarrow \text{НЕВОМО } y \text{ (1)}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{1}{2x^2} \quad / \cdot x^2 z^2$$

$$z^2 - 2'x^2 = \frac{1}{2} (z^2 - 2xz + x^2) + \frac{1}{2} z^2 \quad / \cdot 2$$

$$2z^2 - 2z'x^2 = z^2 - 2xz + x^2 + z^2 \quad / : (-2x^2)$$

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{2}$$

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2} \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$Q(x) = -\frac{1}{2}$$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[C - \frac{1}{2} \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right]$$

$$z = x \cdot \left[C - \frac{1}{2} \ln x \right]$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left[C - \frac{1}{2} \ln x \right]} \quad - \text{Опшће решење}$$

Ⓜ ЛАНГРАНЖОВА ДИФЕР. ЈЕДНАЧИНА

$$y = x \cdot \psi(y') + \psi(y'')$$

$$y' = p$$

$$\frac{dy}{dx} = p \rightarrow dy = p dx$$

$$dy = \psi(p) dx + x \cdot \psi'(p) dp + \psi''(p) dp$$

$$y = f(x, y')$$

$$\text{СМЕНА: } y' = p$$

27) $y = 2xy' + \ln y'$

смена: $y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$

$y = 2xp + \ln p \quad / d(u \text{ по } p \text{ и по } x)$

$dy = 2p dx + 2x dp + \frac{dp}{p}$

$p dx = 2p dx + 2x dp + \frac{dp}{p}$

$p dx + 2x dp + \frac{dp}{p} = 0 \quad / : dp$

$p \frac{dx}{dp} + 2x + \frac{1}{p} = 0 \quad / : p$

$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} + \frac{1}{p^2} = 0$

$x' + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{2}{p} \\ 2(x) = -\frac{1}{p^2} \end{cases} \text{ Интегрируем по } p \dots$

28) $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$

смена: $y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$

$y = p + \sqrt{1 - p^2} \quad / d$

$dy = dp - \frac{2p}{2\sqrt{1 - p^2}} dp$

$p dx = dp - \frac{2p}{2\sqrt{1 - p^2}} dp$

$p dx = \frac{2\sqrt{1 - p^2} - 2p}{2\sqrt{1 - p^2}} dp$

$\frac{dx}{dp} = \frac{2\sqrt{1 - p^2} - 2p}{2p\sqrt{1 - p^2}}$

$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} \quad / \cdot dp$

$dx = \frac{dp}{p} - \frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} \quad / \int$

$\begin{cases} x = \ln p - \arcsin p + C \\ y = p + \sqrt{1 - p^2} \end{cases}$

смысловое

① Клерова ж-на (одеуифичан случај Лангранжа)

$$y = xy' + \varphi(y')$$

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$dy = p dx + x dp + \varphi'(p) dp$$

$$(x + \varphi'(p)) dp = 0$$

Сингуларно: $x = -\varphi'(p)$

Решение: $y = -p \varphi'(p) + \varphi(p)$

Опште: $p = \text{const}$

Решение: $y = cx + \varphi(c)$

29) Наћи опште и сингуларно решение:

$$y = xy' + y'^2$$

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$y = xp + p^2 \quad | d$$

$$dy = \frac{p dx}{dy} + x dp + 2p dp$$

$$-x dp = 2p dp$$

$$\text{Сингуларно } \left\{ \begin{array}{l} x = -2p \\ y = -2p^2 + p^2 = -p^2 \end{array} \right.$$

Опште решение

$$p = \text{const} = c \Rightarrow \boxed{y = cx + c^2}$$

30) Наћи опште и сингуларно решение

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$y = px + \frac{1}{p} \quad | d$$

$$dy = x dp + \frac{p dx}{dy} - \frac{dp}{p^2}$$

$$dy = x dp - \frac{dp}{p^2}$$

Аналитическое решение $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} \\ y = \frac{1}{p^2} \cdot p + \frac{1}{p} = \frac{p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \end{cases}$

Общее решение $\boxed{y = xc + \frac{1}{c}}$

③ Это не дифференциальное уравнение первого рода $y'^2 + yy' - x^2 - xy = 0$

$$y'_{1/2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4 \cdot (-x^2 - xy)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4x^2 + 4xy}}{2} = \frac{-y \pm y + 2x}{2}$$

$$y'_1 = \frac{-y + y + 2x}{2} = x$$

$$\boxed{y'_2 = \frac{-y - y - 2x}{2} = -y - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = -y - x$$

① $\int dy = \int x dx \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$

② $\frac{dy}{dx} = -y - x \Rightarrow dy = (-y - x) dx \Rightarrow dy = -y dx - x dx \quad | : y$

$$\frac{dy}{y} = -dx - \frac{1}{y} x dx \quad \int \quad \text{НЕ ВАСЬ ТАКО!}$$

$$\ln y = -x - \frac{1}{y} \frac{x^2}{2} \quad | \cdot 2y$$

$$2y \ln y = -2xy - x^2$$

$$\ln y^{2y} = -x \cdot (2y + x) \quad | e$$

$$y^{2y} = e^{-x \cdot (2y + x)}$$

БОЛЬШЕ СПОСОБОВ:

$$y' + y = -x$$

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \Rightarrow p(x) = 1, q(x) = -x$$

$$y = e^{-\int dx} (e^{\int dx} (-x) dx) = \dots = \boxed{y = ce^{-x} - x + 1}$$

Ⓚ Дифференциалне јне првог реда може не садржити
једну са променљивих: ✓

$$f(x, y') = 0$$

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$f(x, y) = 0 \text{ опште решење}$$

$$x = \varphi(p) \text{ у карактеристичном облику}$$

31) $y'^3 + y' - x = 0$ (без y)

$$y' = p$$

$$p^3 + p - x = 0$$

$$x = p^3 + p \quad / d$$

$$dx = 3p^2 dp + dp$$

$$y = ?$$

$$y' = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$dy = p(3p^2 + 1) dp$$

$$dy = (3p^3 + p) dp \quad / \int$$

$$\int dy = \int (3p^3 + p) dp$$
$$y = 3 \frac{p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C$$

$$x = p^3 + p$$

32) $y'^2 e^y - y = 0$ (без x)

$$y' = p \quad \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p dx$$

$$p^2 e^y - y = 0 \text{ (без } x)$$

$$y = p^2 e^y \quad / d$$

$$dy = 2p e^y dp + p^2 e^y dp$$

$$dy = (2p e^y + p^2) dp$$

$$x = ?$$

$$p e^y (2 + p) dp = p dx \quad / \int$$

$$2e^y + \int 0 e^y = x$$

$$2e^y + p e^y - e^y = x$$

① Интегрируемая функция ТОВАЛНОГ ДИФЕРЕНЦИАЛА ✓
 $P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$u = u(x,y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\left. \begin{array}{l} du = 0 \\ u = C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{общий интеграл} \\ \text{дифференциальной уравн.} \\ \text{ТОВАЛНОГ ДИФЕРЕНЦИАЛА} \end{array}$$

общее решение

$$u(x,y) = 0$$

$$u(x,y) = \int P(x,y) dx + \int Q(x,y) dy$$

или общий интеграл $\tilde{u} = 0$ равен

$$\textcircled{33} \quad \underbrace{(x+y)}_P dx + \underbrace{(x+2y)}_Q dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad (\text{исполнен условие})$$

$$u = \int_{x_0}^x (x+y) dx + \int_{y_0}^y (x_0+2y) dy = \int_{x_0}^x x dx + \int_{x_0}^x y dx + \int_{y_0}^y x_0 dy + 2 \int_{y_0}^y y dy$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x + y x \Big|_{x_0}^x + x_0 y \Big|_{y_0}^y + 2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y_0}^y$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + yx - yx_0 + x_0y - x_0y_0 + 2 \frac{y^2}{2} - 2 \frac{y_0^2}{2}$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + \left(-\frac{x_0^2}{2} - x_0y_0 - y_0^2 \right)$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + y^2 + C} \quad - \text{общее решение}$$

Контроль:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2} + y + 0 + 0 = x + y = P \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + x + 2y + 0 = x + 2y = Q \quad \checkmark$$

$$[34] \quad \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

$$p(x) = \frac{2x}{y^3}, \quad Q(x) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2x \cdot \frac{3y^2}{y^6} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} =$$

$$u(x, y) = 2 \int_{x_0}^x \frac{x}{y^3} dx + \int_{y_0}^y \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy =$$

$$= -\frac{1}{y^4} \cdot 6x = -\frac{6x}{y^4}$$

$$= \frac{2}{y^3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x + \int_{y_0}^y \frac{1}{y^2} dy - 3x^2 \int_{y_0}^y \frac{1}{y^4} dy =$$

$$= \frac{2}{y^3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{y^3} \cdot \frac{x_0^2}{2} + \left(\frac{y^{-1}}{-1} \right) \Big|_{y_0}^y - 3x^2 \left(\frac{y^{-3}}{-3} \right) \Big|_{y_0}^y$$

$$= \frac{x^2}{y^3} - \frac{x_0^2}{y^3} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} + x_0^2 \frac{1}{y^3} - x_0^2 \frac{1}{y_0^3}$$

$$= \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} - x_0^2 \frac{1}{y_0^3}$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C \quad \text{общее решение}$$

$$[35] \quad (2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$$

$$p(x) = 2x^3 - xy^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2yx$$

$$Q(x) = 2y^3 - x^2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2yx$$

} условие

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x (2x^3 - xy^2) dx + \int_{y_0}^y (2y^3 - x_0^2y) dy =$$

$$= \int_{x_0}^x 2x^3 dx - \int_{x_0}^x xy^2 dx + 2 \int_{y_0}^y y^3 dy - \int_{y_0}^y x_0^2y dy =$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} \Big|_{x_0}^x - y^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^x + 2 \frac{y^4}{4} \Big|_{y_0}^y - x_0^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y_0}^y =$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{x_0^4}{2} - y^2 \frac{x^2}{2} + y^2 \frac{x_0^2}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{y_0^4}{2} - x_0^2 \frac{y^2}{2} + x_0^2 \frac{y_0^2}{2}$$

$$u(x, y) = \frac{x^4}{2} - \frac{y^2 x^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C \quad \text{общее решение}$$

35. Интеграциони фактор - интеграциони множилац

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0 \quad | \cdot \lambda(x,y)$$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ - није диференцијално једн. пошто то је диференцијално

$$\mu = \mu(x,y) = \lambda(x,y)$$

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y) dx + Q(x,y) \cdot \mu(x,y) dy = 0$$

$$P_1(x,y) dx + Q_1(x,y) dy = 0$$

$$\mu(x,y) = ?$$

36. Решити диференцијалну ј-ну због тога је $\lambda = \lambda(x)$
(хитан само од x)

$$\underbrace{(3x + 6xy + 3y^2)}_P dx + \underbrace{(2x^2 + 3xy)}_Q dy = 0 \quad | \cdot \lambda(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad - \text{проверити}$$

$$\underbrace{\lambda(3x + 6xy + 3y^2)}_{P_1} dx + \underbrace{\lambda(2x^2 + 3xy)}_{Q_1} dy = 0$$

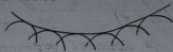
$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}, \quad \lambda = \lambda(x)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = 6\lambda x + 6\lambda y, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \lambda' \cdot (2x^2 + 3xy) + \lambda \cdot (4x + 3y)$$

$$\lambda(6x + 6y) = \lambda' \cdot (2x^2 + 3xy) + \lambda(4x + 3y)$$

$$\lambda \cdot (2x + 3y) = \lambda' \cdot (2x^2 + 3xy)$$

- Обвјезница -

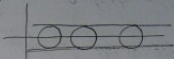


фамилија кривих

$$\phi(x, y, c) = 0$$

$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$ треба елиминисати из једн.

[37] Дато је породица крива $c=1$ са средиштем на x -оци, одреди обвјезницу



$$(x-c)^2 + y^2 = 1$$

$$\phi(x, y, c) = (x-c)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 2(x-c) = 0 \Rightarrow \boxed{x=c}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

$$\phi_x'^2 + \phi_y'^2 > 0$$

$$4(x-c)^2 + (2y)^2 > 0$$

$$4(x-c)^2 + 4y^2 > 0$$

$$= 0 \text{ за } M(c, 0)$$

[38] Дато је диферент. једн. $y' = 2\sqrt{y}$ одреди обвјезницу одгов. решења диференцијалне ј-не

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad | \int$$

$$\frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x$$

$$\boxed{\sqrt{y} = x + C} \text{ - опште решење}$$

$$y = (x+c)^2, \quad x+c > 0$$

$$\phi(x, y, c) = 0$$

$$y - (x+c)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = -2(x+c)$$

$$\phi'_x{}^2 + \phi'_y{}^2 = (-2(x+c))^2 + 1 \geq 1 > 0$$

- ТРАЈЕКТОРИЈА -

Дефиниција

Трајекторија је линија која све линије из даје фами-
лије $\phi(x, y, c) = 0$ сече под малим углом.

Ортогонална трајекторија је она која сече под правим
углом.

Хомогене диф. једначине I-г реда

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad y = ?$$

Обично решење је линеарна комбинација два линеарно независна решења:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad - \text{општо решење}$$

y_1, y_2 - линеарно независна линеарна решења

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$[40] \text{ Решити једначину: } y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \quad \text{и } y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = 1$$

Ако је једно линеарно решење: $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ онда је

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \left(-\cot x\right) =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}$$

$$y_2 = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

Лекција 11.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$$

$$[41] \quad y'' - \frac{y'}{x(\ln x - 1)} + \frac{1}{x(\ln x - 1)} y = 0 \quad , \quad y_1 = x$$

$$p(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)}, \quad q(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

$$y_2 = x \cdot \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}}}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} \quad (\ln x - 1 = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt) = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(\ln x - 1) + C$$

$$\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \int \frac{\ln x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + I_1$$

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \left(\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right)$$

$$-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$y_2 = -\ln x$$

$$y = c_1 x - c_2 \ln x$$

ВЕРНО!

ХОМОГЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА Ј-НА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТОМ

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ХАРАКТЕРИСТИЧНА ЈЕДНОСЛИНА:

$$r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Решења су карактеристичне вредности (корени)

α -решење једносине, $\alpha \in \mathbb{R}$ - је вишеструка нула

\Rightarrow њену одговарајућу решење $y_1 = e^{\alpha x}$

α -решење једносине вишеструко $y_2 = x \cdot e^{\alpha x}$

али $k \Rightarrow$

$$y_k = x^{(k-1)} \cdot e^{\alpha x}$$

$\alpha \pm \beta i$ - комплексна пара вишеструко 1

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

- II - вишеструко k

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$$x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

$$x e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$$x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

$$x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$$42) \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

Правило характеристичну ј-ну:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{3x}$$

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \Rightarrow y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} \text{ - опште решење}$$

$$43) \quad y''' - 13y'' + 12y' = 0$$

Характеристична једначина:

$$r^3 - 13r^2 + 12r = 0$$

$$r \cdot (r^2 - 13r + 12) = 0$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 12$$

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^0 = 1$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^x$$

$$y_3 = e^{r_3 x} = e^{12x} = e^{12x}$$

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{12x} \text{ - опште решење}$$

$$44) \quad y'' - 4y = 0$$

Характеристична једначина:

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r^2 = 4$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -2$$

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} \text{ - опште решење}$$

$$45) y'' - 6y' + 9y = 0$$

$r^2 - 6r + 9 = 0$ - характеристична ј-на

$$r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2}$$

$$r_{1,2} = 3 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 = 3} \quad \text{"внешнострукта", } \kappa = 2$$

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{3x}$$

$$y_2 = x e^{r_1 x} = x e^{3x}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}} \quad \text{- општи решење}$$

$$46) y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

Характеристично ј-но

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$(r+1)^3 = 0$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = -1 \Rightarrow r \text{ је внешнострукта, } \kappa = 3$$

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = x e^{-x}$$

$$y_3 = x^2 e^{-x}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}}$$

$$47) y'' + y = 0$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_1 = -1$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(r+1) \cdot (r^2 - r + 1) = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

$$r_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{не } -\frac{\sqrt{3}}{2} !)$$

$$y_1 = e^{ix} = e^{-x}$$

За пооплетено решева карактеристичните λ -не баве формуле:

$$\lambda + 1$$

$$y_1 = e^{ix} \cdot \cos 2x \Rightarrow y_2 = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$y_2 = e^{ix} \cdot \sin 2x \Rightarrow y_3 = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Синус се користи по неопходно \ominus тие је синуси у облик, тие се даде земаат во употреба само апсолутна вредности
з-тие де: по неопходно

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 e^{\frac{1}{2}x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\boxed{22} \quad y'' + 8y' + 16y = 0$$

Карактеристична λ -на: $r^2 + 8r + 16 = 0$
 $(r^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow (r^2 + 4) \cdot (r^2 + 4) = 0$

$$r^2 = -4 = r_{1,2} = \pm \sqrt{-4} = \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2 \cdot i = \begin{cases} 0 + 2i \\ 0 - 2i \end{cases}$$

$$r_1 = 0 + 2i, r_2 = 0 + 2i \rightarrow \text{внесетурност 2}$$

$$r_3 = 0 - 2i, r_4 = 0 - 2i \rightarrow -11 - 11 - 2$$

неопходно

$$y_1 = e^{0x} \cdot \cos 2x = e^{0x} \cdot \cos 2x = \cos 2x$$

$$y_2 = x e^{0x} \cdot \cos 2x = x \cdot e^{0x} \cdot \cos 2x = x \cdot \cos 2x$$

$$y_3 = e^{0x} \cdot \sin 2x = e^{0x} \cdot \sin 2x = \sin 2x$$

$$y_4 = x e^{0x} \cdot \sin 2x = x \cdot e^{0x} \cdot \sin 2x = x \cdot \sin 2x$$

Внесетурност: два
за неопходно \oplus

$$\left. \begin{array}{l} -11 - 11 - \\ -11 - 11 - \end{array} \right\} \ominus$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \sin 2x$$

19.05.2008.
Нехомогене ЛНФ једначине са константним коефицијентима

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Опште решење = решење ~~не~~ хомогене једначине +
једно ~~не~~ партикуларно решење нехомогене

$$y = y_h + y_p$$

Општије:

$$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

① $f(x) = e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$

а) α није карактеристична функција

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

б) α јесте карактеристична функција вишеструкост k

$$y_p = x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$$

② $f(x) = e^{\alpha x} \cdot [A_n(x) \cdot \cos \beta x + B_n(x) \cdot \sin \beta x]$

а) $\alpha + \beta i$ није карактеристична функција

$$y_p = e^{\alpha x} [Q_n(x) \cdot \cos \beta x + R_n(x) \cdot \sin \beta x]$$

- једна мора да
појави у \sin и
 \cos

б) Ако $\alpha + \beta i$ јесте карактеристична функција вишеструкост k

$$y_p = x^k \cdot e^{\alpha x} [Q_n(x) \cdot \cos \beta x + R_n(x) \cdot \sin \beta x]$$

④ $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$ $\alpha = 2, \beta = 0 \Rightarrow e^{2x}$
 $\Rightarrow f(x) = e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p = e^{2x} \cdot Q(x) = e^{2x} \cdot (Ax + B)$$

$$2y_p'' - y_p' - y_p = 4xe^{2x}$$

$$y_p = e^{2x} \cdot (Ax + B)$$

$$y_p' = 2e^{2x} \cdot (Ax+B) + Ae^{2x}$$

$$y_p' = e^{2x} \cdot (2Ax + 2B + A)$$

$$y_p'' = 2e^{2x} \cdot (2Ax + 2B + A) + e^{2x} \cdot (2A)$$

$$y_p'' = e^{2x} \cdot (4Ax + 4B + 2A + 2A)$$

$$y_p'' = e^{2x} \cdot (4Ax + 4B + 4A)$$

$$2 \cdot e^{2x} \cdot (4Ax + 4B + 4A) - e^{2x} \cdot (2Ax + 2B + A) - e^{2x} \cdot (Ax + B) - 4x e^{2x}$$

$$8Ax + 8B + 8A - 2Ax - 2B - A - Ax - B - 4x = 0$$

$$5Ax + 5B + 7A = 4x$$

$$\left. \begin{array}{l} 5A = 4 \\ 5B + 7A = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = \frac{4}{5} \\ 5B + 7 \cdot \frac{4}{5} = 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{4}{5} \\ B = -\frac{28}{25} \end{array} \right.$$

$$y_p = e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right)$$

$$y = y_p + y_h = e^{2x} \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right) + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad - \text{общее решение}$$

$$\text{[50]} \quad y'' - 2y' + y = x^3 e^x \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 0$$

$$t^4 - 2t^3 + t^2 = 0$$

$$t^2 \cdot (t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$t_{1,2} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^x, y_4 = x e^x$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x$$

$$e^{2x} P(x) = x^3 \Rightarrow \lambda = 0 - \text{если порождающую функцию ввести нулевой, } \lambda = 2$$

$$y_p = x^k \cdot e^{2x} \cdot Q_3(x) = x^2 \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3$$

$$y_p = x^2 \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

$$y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2$$

$$y_p' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx$$

$$y_p'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D$$

$$y_p''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C$$

$$y_p^{(4)} = 120Ax + 24B$$

$$120Ax + 24B - 120Ax^2 - 48Bx - 12C + 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D = x^3$$

$$20Ax^3 + x^2(12B - 120A) + x(120A - 48B + 6C) + (2D - 12C) = x^3$$

$$20A = 1$$

$$12B - 120A = 0$$

$$120A - 48B + 6C = 0$$

$$2D - 12C = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{20} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = 3 \\ D = 12 \end{array} \right.$$

$$y_p = x^2 \cdot \left(\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 12 \right)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\text{[5]} \quad y'' + 9y = \cos 2x \rightarrow \alpha + i\beta = 0 + 2i$$

$$y'' + 9y = 0$$

$$t^2 + 9 = 0 \Rightarrow t^2 = -9 \Rightarrow t = \pm \sqrt{-9} = \pm \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i$$

$$t_1 = 3i, t_2 = -3i$$

$$t_1 = 0 + 3i, t_2 = 0 - 3i$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \Rightarrow y_1 = \cos 3x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \Rightarrow y_2 = \sin 3x$$

$$y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \text{homogeneous}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$$

$$f(x) = \cos 2x \Rightarrow \alpha = 0, P_n(x) = \cos 2x$$

$$y_p = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$$

$$\boxed{P_n(x) = 1}$$

$$\cos 3x = \cos 2x$$

$$\boxed{\beta = 2}$$

$$\Rightarrow y_p = [A \cos 2x + B \sin 2x]$$

$$y_p' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$y_p'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

$$y_p'' + 9y = \cos 2x$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 9A \cos 2x + 9B \sin 2x = \cos 2x$$

$$5A \cos 2x + 5B \sin 2x = \cos 2x$$

$$5A = 1 \quad ? \quad \boxed{A = \frac{1}{5}}$$

$$5B = 0 \quad \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{5} \cos 2x} \quad - \text{вариант 1}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5} \cos 2x + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x} \quad - \text{общее решение}$$

$$\boxed{52} \quad y'' + y = x \sin x \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad (i)$$

$$y'' + y = 0$$

$$t^2 + 1 = 0$$

$$t^2 = -1 \Rightarrow t = \pm \sqrt{-1}$$

$$t_1 = i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = i$$

$$t_2 = -i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = -i$$

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \sin x$$

$$\boxed{y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$$

$$f(x) = x \sin x \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}, P_n(x) = x \sin x$$

$$y_p = x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$$

$k=1, \alpha=0, \beta=1$

$$y_p = x \cdot [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x]$$

$$y_p = (Ax^2+Bx) \cos x + (Cx^2+Dx) \sin x$$

$$y_p' = (2Ax+B) \cos x - (Ax^2+Bx) \sin x + (2Cx+D) \sin x + (Cx^2+Dx) \cos x$$

$$y_p' = 2Ax \cos x + B \cos x - Ax^2 \sin x - Bx \sin x + 2Cx \sin x + D \sin x + Cx^2 \cos x + Dx \cos x$$

$$y_p'' = 2A \cos x - 2Ax \sin x - B \sin x - 2Ax \sin x - Ax^2 \cos x - B \sin x - Bx \cos x + 2C \sin x + 2Cx \cos x + D \cos x + 2Cx \cos x - Cx^2 \sin x + D \cos x - Dx \sin x$$

$$y_p'' + y_p = x \sin x$$

$$\begin{aligned} & 2A \cos x - 2Ax \sin x - B \sin x - 2Ax \sin x - Ax^2 \cos x - B \sin x - Bx \cos x + \\ & + 2C \sin x + 2Cx \cos x + D \cos x + 2Cx \cos x - Cx^2 \sin x + D \cos x - Dx \sin x + \\ & + Ax^2 \cos x + Bx \cos x + Cx^2 \sin x + Dx \sin x \end{aligned}$$

$$(2A+2D) \cos x + (-2B) \sin x + (-4A) x \sin x + 4C x \cos x = x \sin x$$

$$\left. \begin{aligned} -4A &= 1 \\ 2A+2D &= 0 \\ -2B &= 0 \\ 4C &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{B = 0}$$

$$\boxed{C = 0}$$

$$\boxed{D = \frac{1}{4}}$$

$$y_p = x \cdot \left[-\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} \sin x \right]$$

$$y = -\frac{1}{4} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

МЕТОД ВАРИЈАЦИЈА КОНСТАНТИ

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0 \quad \text{— хомогена једначина}$$

y_1, \dots, y_n — линеарно независна партикуларна решења

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = f(x) \quad \text{— нехомогена}$$

$$y = c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n$$

$$\boxed{5.1} \quad y'' + y' = \sin x + \frac{1}{\sin x}$$

$$y'' + y' = 0$$

$$t^2 + t = 0$$

$$t \cdot (t+1) = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = -1$$

$$y_1 = 1, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x$$

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

$$\boxed{y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x}$$

$$1) \quad C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0$$

$$2) \quad C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0$$

$$3) \quad C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = \sin x + \frac{1}{\sin x}$$

$$1) \quad C_1'(x) + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$$

$$2) \quad -C_2'(x) \sin x + C_3'(x) \cos x = 0 \quad / \cdot \sin x$$

$$3) \quad -C_2'(x) \cos x - C_3'(x) \sin x = \sin x + \frac{1}{\sin x} \quad / \cdot \cos x$$

$$1) \quad C_1'(x) + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$$

$$2) \quad -C_2'(x) \sin^2 x + C_3'(x) \sin x \cos x = 0$$

$$3) \quad -C_2'(x) \cos^2 x - C_3'(x) \sin x \cos x = \sin x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Bigg] +$$

$$1) \quad C_1'(x) + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0$$

$$2) \quad -C_2'(x) \sin^2 x + C_3'(x) \sin x \cos x = 0$$

$$3) \quad -C_2'(x) (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$-C_2'(x) = \sin x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2'(x) = -\sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$C_2(x) = -\int \sin x \cos x dx - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$C_2(x) = -\int \sin x d \sin x - \int \frac{d \sin x}{\sin x} = -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\sin x|$$

$$C_2(x) = -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\sin x|$$

$$2) -(-\sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x}) \sin x + C_3'(x) \cdot \cos x = 0$$

$$\sin^2 x \cdot \cos x + \cos x + C_3'(x) \cdot \cos x = 0$$

$$C_3'(x) = \frac{-\sin^2 x \cos x - \cos x}{\cos x}$$

$$C_3'(x) = -\sin^2 x - 1$$

$$C_3(x) = -\int \sin^2 x dx - \int dx$$

$$C_3(x) = -\frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx - x$$

$$= -\frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - x$$

$$= -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2x d 2x - x$$

$$= -\frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$C_3(x) = -\frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$1) C_1'(x) + (-\sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x}) \cdot \cos x + (-\sin^2 x - 1) \sin x = 0$$

$$C_1'(x) - \sin x \cos^2 x - \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin^3 x - \sin x = 0$$

$$C_1'(x) = \frac{\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \sin^2 x}{\sin x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x} (\cos^2 x + \sin^2 x) + \frac{1}{\sin x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x}$$

$$G(x) = \int \sin x \, dx + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\cos x + \int \frac{d(\cos x)}{\sin^2 x} = -\cos x + \ln|\tan \frac{x}{2}|$$

$$y = G_1(x) y_1 + G_2(x) y_2 + G_3(x) y_3$$

$$y = (-\cos x + \ln|\tan \frac{x}{2}|) + (-\frac{\sin^2 x}{2} - \ln|\sin x|) \cos x + (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x)$$

54) $xy' + y' = x^2$ Pevnikovo jednováňový, tpe je $y_1 = \ln x, y_2 = 1$

$$y_h = G \ln x + C_2$$

$$1) G_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$$

$$2) G_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = x^2$$

$$1) G_1'(x) \cdot \ln x + C_2'(x) = 0$$

$$2) G_1'(x) \cdot \frac{1}{x} = x^2$$

$$G_1'(x) = x^3$$

$$G_1(x) = \int x^3 \Rightarrow G_1(x) = \frac{x^4}{4} + D_1$$

$$x^3 \cdot \ln x + C_2'(x) = 0$$

$$C_2'(x) = -x^3 \ln x \, dx$$

$$C_2(x) = -\int x^3 \ln x \, dx \quad \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right)$$

$$-\frac{x^4}{4} \cdot \ln x + \int x^3 = -\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16}$$

$$C_2(x) = -\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} + D_2$$

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + D_1\right) \ln x + \left(-\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16}\right) + D_2$$

$$(ax+b)^n \cdot y^{(n)} + A y^{(n-1)}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫШЕГО РЕДА

1) У-НЕ ОБЛИКА $y'' = f(x)$

55) $y'' = \cos x + e^{-x}$

$$y' = \int \cos x dx + \int e^{-x} dx$$

$$= \sin x - e^{-x} + C_1$$

$$y = \int \sin x dx - \int e^{-x} dx + \int C_1 dx =$$

$$= -\cos x + e^{-x} + C_1 x + C_2$$

$$y = -\cos x + e^{-x} + C_1 x + C_2$$

II) У-НЕ ОБЛИКА $F(x, y', y'') = 0$

СМЕНА $z = y' \Rightarrow F(x, z, z') = 0$ - ДИФ. У-НЕ I Р.

56) $xy'' + y' + x = 0$

СМЕНА $y' = z, y'' = z'$

$$xz' + z + x = 0 \quad / : x$$

$$z' + \frac{z}{x} + 1 = 0$$

$$z' + \frac{1}{x}z = -1 \Rightarrow p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = -1$$

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x}} \cdot [C - \int e^{\int \frac{dx}{x}} dx]$$

$$z = e^{-\ln x} [C - \int e^{\ln x} dx]$$

$$z = \frac{1}{x} \cdot [C - \frac{x^2}{2}] = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$$

$$y' = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$$

$$y = \int \frac{C dx}{x} - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$y = C \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} + C_1 - \text{ОБРАТНОЕ ПЕРВЕНЕ}$$

$$57 \quad y' + \frac{1}{4} y'^2 = x y'$$

$$y' = z$$

$$z + \frac{1}{4} z'^2 = x z'$$

$$z = -\frac{1}{4} z'^2 + x z'$$

$$z = x z' - \frac{1}{4} z'^2 \quad - \text{Клерова 1-ва}$$

$$z' = p \Rightarrow dz = p dx$$

$$z = x p - \frac{1}{4} p^2 \quad / \alpha$$

$$dz = \frac{p dx + x dp - \frac{1}{2} p dp}{dz}$$

$$-x dp = -\frac{1}{2} p dp$$

система
похожих

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} p \\ y = \int z \Rightarrow y = \frac{p^3}{12} \end{cases}$$

$$y = \int x p - \frac{1}{4} p^2 dp$$

$$y = \int \frac{1}{2} p^2 dp - \frac{1}{4} \int p^2 dp$$

$$\frac{1}{2} \frac{p^3}{3} - \frac{1}{4} \frac{p^3}{3} = \frac{p^3}{6} - \frac{p^3}{12} = \frac{p^3}{12}$$

Окончательное решение

$$p = \text{const} = c \Rightarrow y = cx - \frac{1}{4} c^2$$

58 y -НЕ ОБЛИКА $F(y, y', y'') = 0$

система $y' = p, F(y, p, \frac{dp}{dy}) = 0 \Rightarrow$ Диф. жд I рода

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$58 \quad y y'' + y'^2 = y^4$$

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

$$y \cdot p \frac{dp}{dy} + p^2 = y^4$$

53) Решить дифференциальную уравнение

$$xy' + y' = x^2$$

$$xy'' + y' = 0$$

$$y' = p \quad y'' = p'$$

$$xp' + p = 0$$

$$p' + \frac{1}{x}p = 0$$

$$p = e^{-\int \frac{dx}{x}} [C + \int e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot 0]$$

$$p = \frac{1}{x} \cdot C$$

$$y' = \frac{C}{x} \Rightarrow y = C \int \frac{dx}{x} = C \ln x + D_1 \quad \boxed{y = C_1 \ln x + C_2 = y}$$

$$y_1 = \ln x$$

- УРАЖЕН ЛАБЕ: 54

$$y_2 = 1$$

ОЗЕРОВА ДИФЕР. ЈЕДНАЧИНА

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1(ax+b) y' + A_0 y = f(x)$$

$$\text{СМЕНА: } (ax+b) = e^t$$

$$60) (3x-7)^3 y''' + 6(3x-7)^2 y'' - 12(3x-7) y' + 22y = x^7$$

$$\text{СМЕНА: } 3x-7 = e^t \Rightarrow 3dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3e^{-t}$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y_t' \cdot 3e^{-t}}$$

$$y'' = \frac{d}{dt} (y') \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (y_t' \cdot 3e^{-t}) \cdot 3e^{-t} = (y_{tt}'' \cdot 3e^{-t} - 3e^{-t} y_t') \cdot 3e^{-t} =$$

$$y'' = 9y_{tt}'' e^{-2t} - 9y_t' e^{-2t} = 9e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t')$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') \frac{dt}{dx}$$

$$y''' = \frac{d}{dt}(9e^{-2t}(y_t'' - y_t')) \frac{dt}{dx}$$

$$y''' = (-18e^{-2t} \cdot (y_t'' - y_t') + 9e^{-2t} \cdot (y_t''' - y_t'')) \cdot 3e^{-t}$$

$$y''' = -54e^{-3t} \cdot (y_t'' - y_t') + 27e^{-3t} (y_t''' - y_t'')$$

$$= 27e^{-3t} (-2y_t'' + 2y_t' + y_t''' - y_t'')$$

$$y''' = 27e^{-3t} (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t')$$

Вставляем:

$$e^{3t} \cdot (27e^{-3t}) \cdot (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t') + 6e^{2t} \cdot 9e^{-2t} (y_t'' - y_t') - 12e^t \cdot (y_t' \cdot 3e^{-t}) + 22y = x^7$$

$$27y_t''' - 81y_t'' + 54y_t' + 54y_t'' - 54y_t' - 36y_t' + 22y = x^7$$

$$27y_t''' - 27y_t'' - 36y_t' + 22y = x^7$$

$$27t^3 - 27t^2 - 36t + 22 = x^7$$

$$27t^3 - 27t^2 - 36t + 22 = 0$$

?

$$\text{61)} \quad x^2 y'' + xy' + y = 1 \quad *$$

$$\text{смена: } x = e^t \quad dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot e^{-t}) \frac{dt}{dx} = (y''_t \cdot e^{-t} - y'_t e^{-t}) \cdot e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t) + e^t (y'_t \cdot e^{-t}) + y = 1$$

$$y''_t + y = 1 \quad - \text{характерист. урав.}$$

$$t^2 = -1$$

$$t_1 = i, \quad t_2 = -i$$

$$y_1 = \cos t$$

$$y_2 = \sin t$$

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t = \boxed{C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x} \quad - \text{Хомогенно решение}$$

$$x = e^t \quad // \quad \ln$$

$$\ln x = t$$

$$\text{Общее решение} = y_h + y_p$$

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$$

$$\text{Ког нас је } f(x) = 1 \Rightarrow \alpha = 0, \quad P(x) = 1$$

$$y_p = 1$$

$$\boxed{y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + 1}$$

$$\text{62)} \quad (3x+2)^2 y'' + 7y = 0$$

$$\text{смена: } 3x+2 = e^t \Rightarrow 3dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot 3e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(y') \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(y'_t \cdot 3e^{-t}) 3e^{-t} = (y''_t \cdot 3e^{-t} - 3e^{-t} y'_t) \cdot 3e^{-t}$$

$$y \cdot 9e^{-2t} (y'' - y')$$

$$e^{2t} \cdot 9e^{-2t} (y'' - y') + 7y = 0$$

$$9y'' - 9y' + 7y = 0$$

$$9t^2 - 9t + 7 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 252}}{18} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{-71}}{18} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{19}i}{18} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{6}i \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{19}}{6}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{6}i \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{19}}{6}$$

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{19}}{6}t$$

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{19}}{6}t$$

$$y_h = C_1 e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{19}}{6}t + C_2 e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{19}}{6}t$$

$$3x+2 = e^t / \ln$$

$$\ln(3x+2) = t$$

$$y_h = C_1 e^{\frac{1}{2} \ln(3x+2)} \cos \frac{\sqrt{19}}{6} \ln(3x+2) + C_2 e^{\frac{1}{2} \ln(3x+2)} \sin \frac{\sqrt{19}}{6} \ln(3x+2)$$

$$y_p = 0$$

no more nonzero!

24.05.2003

$$[63] (3x+2)^2 \cdot y'' - 3(3x+2)y' + 4y = 0$$

$$3x+2 = e^t \Rightarrow a=3, b=2$$

$$t = \ln(3x+2)$$

$$y' = y'_t \cdot (3e^{-t})$$

$$y'' = 9e^{-2t} (y''_t - y'_t)$$

$$e^{2t} \cdot 9e^{-2t} (y''_t - y'_t) - 3 \cdot e^t \cdot y'_t \cdot (3e^{-t}) + 4y = 0$$

$$9y''_t - 9y'_t - 9y'_t + 4y = 0$$

$$9y''_t - 18y'_t + 4y = 0$$

$$\text{CASE 1: } ax+b=e^t$$

$$y' = y'_t \cdot (a \cdot e^{-t})$$

$$y'' = a^2 e^{-2t} (y''_t - y'_t)$$

$$y''' = a^3 e^{-3t} (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

$$9t^2 - 18t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 144}}{18} = \frac{18 \pm 6\sqrt{5}}{18} \Rightarrow t_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{3}, t_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$$

$$y_1 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{3}t}$$

$$y_2 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{3}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{3}t} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{3}t} = C_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{3} \ln(3x+2)} + C_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{3} \ln(3x+2)} =$$

$$= \boxed{C_1 (3x+2)^{\frac{3+\sqrt{5}}{3}} + C_2 (3x+2)^{\frac{3-\sqrt{5}}{3}}}$$

64) $x^2 (2x+3)^2 \cdot y'' - 4(2x+3) \cdot y' + 8y = \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}$
 $2x+3 = e^t \Rightarrow t = \ln(2x+3)$

$$a=2$$

$$y' = y_t' \cdot (2e^{-t})$$

$$y'' = 4e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot 4e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t') - 4e^t \cdot y_t' \cdot (2e^{-t}) + 8y = \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}$$

$$4y_{tt}'' - 4y_t' - 8y_t' + 8y = \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}$$

$$4y_{tt}'' - 12y_t' + 8y = \frac{1}{4x^2 + 12x + 10} \quad | :4$$

$$y_{tt}'' - 3y_t' + 2y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4x^2 + 12x + 10} \quad - \text{Методом вариации}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow \frac{3 \pm 1}{2} \quad t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$y_1 = e^t \wedge y_2 = e^{2t}$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \quad - \text{Константа}$$

$$1) C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$$

$$2) C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}$$

$$1) G_1'(x) \cdot e^t + G_2'(x) e^{2t} = 0$$

$$2) G_1'(x) \cdot e^t + 2G_2'(x) e^{2t} = \frac{1}{4} \frac{1}{(2x+3)^2 + 1}$$

$$1) G_1'(x) \cdot e^t + G_2'(x) e^{2t} = 0$$

$$2) G_1'(x) \cdot e^t + 2G_2'(x) e^{2t} = \frac{1}{4} \frac{1}{e^{2t} + 1}$$

$$1) G_1'(x) \cdot e^t + G_2'(x) \cdot e^{2t} = 0$$

$$2) G_2'(x) \cdot e^{2t} - 2G_2'(x) e^{2t} = -\frac{1}{4} \frac{1}{e^{2t} + 1}$$

$$1) G_1'(x) \cdot e^t + G_2'(x) \cdot e^{2t} = 0$$

$$-G_2'(x) e^{2t} = -\frac{1}{4} \frac{1}{e^{2t} + 1}$$

$$G_2'(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(e^{2t} + 1) e^{2t}}$$

$$G_2(x) = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(e^{2t} + e^{2t})} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{e^{2t} \cdot (e^{2t} + 1)} dt \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{A}{e^{2t}} + \frac{B}{e^{2t} + 1} \right) dt$$

$$A \cdot e^{2t} + A + B e^{2t} = 1$$

$$e^{2t} \cdot (A+B) + A = 1$$

$$A+B=0 \quad A=1$$

$$A=1 \quad B=-1$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{e^{2t}} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{e^{2t} + 1}$$

$$I_1 = \frac{1}{4} \int e^{-2t} dt = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int e^{-2t} \cdot d(-2t) = -\frac{1}{8} e^{-2t}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{e^{2t} + 1} \quad \left(\begin{array}{l} e^{2t} + 1 = p \\ (e^{2t} + 1)' = dp \\ dt = \frac{dp}{2e^{2t}} \Rightarrow dp = \frac{dp}{2(p-1)} \\ e^{2t} = p-1 \end{array} \right)$$

$$G_2 = -\frac{1}{8} e^{-2t} - \frac{1}{8} \ln e^{2t} + \frac{1}{8} \ln(e^{2t} + 1)$$

$$G_2 = -\frac{1}{8} (e^{-2t} + 2t - \ln(e^{2t} + 1))$$

16) Решите гур 1-уу у элвэгдсэн эг тэгшитгэлээр $a \in$

$$x^2 y'' - 4xy' + ay = x$$

$$x = e^t \Rightarrow a = 1$$

$$y' = y_t' e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t') - 4e^t y_t' e^{-t} = x$$

$$y_{tt}' - y_t' - 4y_t' + ay = x$$

$$y_{tt}' - 5y_t' + ay = e^t$$

$$t^2 - 5t + a = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4a}}{2}$$

1) $D > 0$

$$25 - 4a > 0$$

$$25 > 4a$$

$$a < \frac{25}{4}$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{D}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{\frac{5+\sqrt{D}}{2}t}, y_2 = e^{\frac{5-\sqrt{D}}{2}t}$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{\frac{5+\sqrt{D}}{2}t} + C_2 \cdot e^{\frac{5-\sqrt{D}}{2}t}, \quad \boxed{t = \ln x}$$

2) $D = 0$

$$t_{1,2} = \frac{5}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$$

$$y_1 = e^{\frac{5}{2}t}, y_2 = e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\frac{5}{2}t} + C_2 e^{-\frac{5}{2}t}$$

3) $D < 0$

$$t_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}i \Rightarrow t_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}i, t_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}i$$

$$y_1 = e^{\frac{5}{2}t} \cos \frac{\sqrt{D}}{2}t, y_2 = e^{\frac{5}{2}t} \sin \frac{\sqrt{D}}{2}t$$

$$y_h = q \cdot e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t} \cos \frac{\sqrt{5}}{2}t + q \cdot e^{\frac{\sqrt{5}}{2}t} \sin \frac{\sqrt{5}}{2}t$$

Попытка найти решение:

$D > 0$

$$f(x) = e^{\lambda x} \cdot p_n(x) \Rightarrow \lambda = 1 \quad p_n(x) = 1$$

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = e^t$$

$$y_p = e^t \cdot A$$

$$y_p' = A e^t$$

$$y_p'' = A e^t$$

$$A e^t - 5A e^t + 4A e^t = e^t$$

$$-4A + 4A = 1$$

$$A \cdot (-4 + 4) = 1$$

$$A = \frac{1}{2 - 4}$$

$$y_p = \frac{e^t}{2 - 4}$$

$$y = y_h + y_p = q \cdot e^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}t} + q \cdot e^{\frac{5-\sqrt{5}}{2}t} + \frac{e^t}{2-4}$$

$D = 0$

$$y_p = \frac{e^t}{2 - 4}$$

$$D = 0$$

$$25 - 4a = 0$$

$$25 = 4a \Rightarrow a = \frac{25}{4}$$

$$y_p = \frac{4}{9} e^t$$

$$y = q e^{\frac{5}{2}t} + q e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{4}{9} e^t$$

$D < 0$

$$f(x) = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

$$y_p = e^{\frac{5}{2}t} \cdot [A \cdot \cos \frac{\sqrt{5}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{5}}{2}t]$$

ПНТАТИ!

$$\boxed{66} \quad x^2 y'' - (2a-1)xy' + 4y = x^2 \ln x$$

$$x = e^t \Rightarrow a = 1$$

$$y' = y_t' e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t') - (2a-1)e^t y_t' e^{-t} = e^{2t} \ln e^t$$

$$y_{tt}'' - y_t' - (2a-1)y_t' + 4y = t e^{2t}$$

$$\boxed{y_{tt}'' - 2a y_t' + 4y = t e^{2t}}$$

$$t^2 - 2at + 4 = 0$$

$$\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 16}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$$

$$t_1 = a + \sqrt{a^2 - 4}$$

$$t_2 = a - \sqrt{a^2 - 4}$$

$$1) \underline{D > 0}$$

$$a^2 - 4 > 0$$

$$a^2 > 4$$

$$\boxed{a > 2}$$

$$\boxed{a < -2}$$

$$t_{1,2} = a \pm \sqrt{D} \Rightarrow t_1 = a + \sqrt{D}, t_2 = a - \sqrt{D}$$

$$y_1 = e^{(a+\sqrt{D})t}$$

$$y_2 = e^{(a-\sqrt{D})t}$$

$$y_h = C_1 e^{(2+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{5})t}$$

$$f(x) = t e^{2x}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot p(x)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2$$

$$p(x) = t$$

$$Q(x) = At + B$$

$$y_p = e^{\alpha x} \cdot Q(x)$$

$$y_p = e^{2x} \cdot (At + B)$$

$$y_p' = 2e^{2x} \cdot (At + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x} \cdot (2At + 2B + A)$$

$$y_p'' = 2e^{2x} \cdot (2At + 2B + A) + e^{2x} \cdot 2A = 2e^{2x} \cdot (2At + 2B + 2A)$$

$$y_p'' - 2\alpha y_p' + 4y_p = t e^{2x}$$

$$2e^{2x} \cdot (2At + 2B + 2A) - 2\alpha e^{2x} \cdot (2At + 2B + A) + 4e^{2x} (At + B) = t e^{2x}$$

$$4At + 4B + 4A - 4\alpha At - 4\alpha B - 2\alpha A + 4At + 4B = t$$

$$(4A - 4\alpha A + 4A)t + (4B + 4A - 4\alpha B - 2\alpha A + 4B) = t$$

$$8A - 4\alpha A = 1$$

$$4A \cdot (2 - \alpha) = 1$$

$$4A = \frac{1}{2 - \alpha}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{8 - 4\alpha}$$

$$8B + 4A - 4\alpha B - 2\alpha A = 0$$

$$8B + \frac{1}{2 - \alpha} - 4\alpha B - \frac{2\alpha}{8 - 4\alpha} = 0$$

$$y_p = e^{2x} \cdot \left(\frac{t}{4(2 - \alpha)} + \frac{1}{8(2 - \alpha)} \right)$$

$$8B - 4\alpha B = \frac{\alpha}{4 - 2\alpha} - \frac{1}{2 - \alpha}$$

$$4B \cdot (2 - \alpha) = \frac{\alpha - 2}{4 - 2\alpha}$$

$$B = \frac{1}{8(2 - \alpha)}$$

$$y = C_1 e^{(2+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(2-\sqrt{5})t} + e^{2x} \cdot \left(\frac{t}{4(2 - \alpha)} + \frac{1}{8(2 - \alpha)} \right)$$

$$D=0$$

$$t_{\text{lin}} = 0$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, a = -2$$

$$t_1 = 2, t_2 = -2$$

$$y_1 = e^{2t}, y_2 = e^{-2t}$$

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y_p = -e^{2t} \left(\frac{t}{16} + \frac{1}{32} \right) \quad \text{3a } \boxed{a = -2}$$

$$y_p \text{ - Hufe gefunden.} \rightarrow \text{3a } a = 2$$

$$\boxed{D < 0}$$

$$t_{1/2} = a \pm \sqrt{D}i \Rightarrow t_1 = a + \sqrt{D}i, t_2 = a - \sqrt{D}i$$

$$y_1 = e^{at} \cdot \cos \sqrt{D}t$$

$$y_2 = e^{at} \cdot \sin \sqrt{D}t$$

$$y_h = c_1 e^{at} \cos \sqrt{D}t + c_2 e^{at} \sin \sqrt{D}t$$

$$y_p = ??$$

- ГРАНИЧНИ ПРОБЛЕМИ -

[a, b]

$$A_1 \cdot y(a) + A_2 \cdot y'(a) = A$$

$$B_1 \cdot y(b) + B_2 \cdot y'(b) = B$$

67 $y'' + 2y' + a^2 y = 0$, $a \in \mathbb{R}$

гранични услови су $y(0) = 0$

$$y(\pi) = 0$$

Характеристична једначина је:

$$t^2 + 2t + a^2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4a^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 - a^2}}{2}$$

$$t_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - a^2}$$

$$D = 1 - a^2$$

- Постоје три случаја:

1) $D > 0$

2) $D = 0$

3) $D < 0$

1) $D > 0$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = -1 + D \\ t_2 = -1 - D \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_1 = e^{(-1+D)x} \\ y_2 = e^{(-1-D)x} \end{array}$$

$$y_h = C_1 e^{(-1+D)x} + C_2 e^{(-1-D)x}$$

Проверимо издвојени даље граничне услове:

$$y(0) = C_1 \cdot e^{(-1+\sqrt{1-a^2}) \cdot 0} + C_2 \cdot e^{(-1-\sqrt{1-a^2}) \cdot 0}$$

$$y(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0$$

$$y(0) = C_1 + C_2$$

$$y(\pi) = C_1 \cdot e^{(-1+\sqrt{1-a^2}) \cdot \pi} + C_2 \cdot e^{(-1-\sqrt{1-a^2}) \cdot \pi}$$

Третьи уже р.

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \\ C_1 e^{(-1+\sqrt{1-a^2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-a^2})x} = 0 \end{cases}$$

$$C_1 e^{(-1+\sqrt{1-a^2})\pi} - C_1 e^{(-1-\sqrt{1-a^2})\pi} = 0$$

$$C_1 (e^{(-1+\sqrt{1-a^2})\pi} - e^{(-1-\sqrt{1-a^2})\pi}) = 0$$

$$C_1 = 0 \quad \wedge \quad e^{(-1+\sqrt{1-a^2})\pi} = e^{(-1-\sqrt{1-a^2})\pi} \text{ — это ложно — это неверно}$$

$$C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y_h = 0}$$

$$2) \underline{D=0} \quad (a \neq \pm 1) \quad r_{1,2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$r_1 = r_2 = -1 \quad (\text{Внекорневой } n=2)$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = x \cdot e^{-x} \end{cases} \quad \boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}}$$

— Возвращаемся к уравнению:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 \\ y(\pi) = C_1 e^{-\pi} + C_2 \cdot \pi \cdot e^{-\pi} \end{cases}$$

Задаю две функции со две неизвестные:

$$1) \quad C_1 = 0$$

$$2) \quad C_1 e^{-\pi} + C_2 \cdot \pi \cdot e^{-\pi} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \quad \boxed{y = 0}$$

$$3) \underline{D < 0}$$

$$4 \cdot (1 - a^2) < 0 \Rightarrow 1 < a^2 \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$$

$$D < 0; \quad a > 1 \vee a < -1$$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (1 - a^2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - a^2} \cdot i$$

$$\begin{cases} r_1 = -1 + \sqrt{1 - a^2} \cdot i \\ r_2 = -1 - \sqrt{1 - a^2} \cdot i \end{cases} \quad \text{Внекорневой } 2$$

$$y_1 = e^{-x} \cdot \cos \sqrt{1-a^2} \cdot x$$

$$y_2 = e^{-x} \cdot \sin \sqrt{1-a^2} \cdot x$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \cos(\sqrt{1-a^2} \cdot x) + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x \cdot \sqrt{1-a^2})$$

Ако изложимо граничне услове добићемо две једначине

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

$$1) C_1 \cdot e^{-0} \cdot \cos 0 + C_2 \cdot e^{-0} \cdot \sin 0 = 0$$

$$2) C_1 \cdot e^{-\pi} \cdot \cos(\sqrt{1-a^2} \cdot \pi) + C_2 \cdot e^{-\pi} \cdot \sin(\sqrt{1-a^2} \cdot \pi) = 0$$

$$1) C_1 = 0$$

$$2) C_2 \cdot e^{-\pi} \cdot \sin(\sqrt{1-a^2} \cdot \pi) = 0$$

Пошто је две решења:

I) $C_2 = 0$ - тривијално решење и оно нас не занима

II) $\sin(\sqrt{a^2-1} \cdot \pi) = 0 \Rightarrow$ јер је $\sin k\pi = 0$

$$\sqrt{a^2-1} = k\pi$$

$$a^2 - 1 = k^2$$

$$a^2 = k^2 + 1$$

$$a = \sqrt{k^2 + 1}$$

$$y_h = C \cdot e^{-x} \cdot \sin(\sqrt{a^2-1} \cdot x)$$

$$y_h = C_2 e^{-x} \cdot \sin kx$$

ИСПИТНИ ЗАДАЦИ: 20.09.2001.

168) Решити гранични однок проблем:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - \lambda y = 0 \rightarrow \text{Озлерова } \mathcal{E}\text{-на}$$

гранични услови су: $y(1) = 0$

смена: $x = e^t \Rightarrow a = 1$ $y(e) = 0$

$$y' = y'_t e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_t - y'_t) + e^t \cdot e^{-t} y'_t - \lambda y = 0$$

$$y''_t - \lambda y = 0$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - \lambda = 0$$

$$r^2 = \lambda \rightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Рассмотрим случаи:

$$\begin{aligned} \lambda &> 0 \\ \lambda &= 0 \\ \lambda &< 0 \end{aligned}$$

1) $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\lambda} \\ r_2 &= -\sqrt{\lambda} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} y_1 &= e^{\sqrt{\lambda}x} \\ y_2 &= e^{-\sqrt{\lambda}x} \end{aligned} \right.$$

взяв
сумму

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}} \Rightarrow \boxed{y = C_1 \cdot x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 \cdot x^{-\sqrt{\lambda}}}$$

Учитывая граничные условия

$$y(1) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y(e) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$-C_2 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$C_2(-e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{никаких решений нет!}$$

$$\boxed{y = 0}$$

2) $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_2 &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\text{высшей степени } n+2 \\ &t = \ln x \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= t \cdot e^{0 \cdot t} = t \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\boxed{y = C_1 + t C_2} \\ &\Rightarrow \boxed{y = C_1 + \ln x \cdot C_2} \end{aligned} \right.$$

Учитывая граничные условия:

$$y(1) = C_1 + \ln 1 \cdot C_2 = C_1$$

$$y(e) = C_1 + \ln e \cdot C_2 = C_1 + C_2 = 0$$

$$1) C_1 = 0$$

$$2) C_1 + C_2 = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} &C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{-\lambda} = \sqrt{\lambda} i \\ \eta_2 &= -\sqrt{-\lambda} = -\sqrt{\lambda} i \end{aligned} \right\} \kappa = 1$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{\eta_1 t} \cos(\sqrt{\lambda} t) = \cos(\sqrt{\lambda} t) \\ y_2 &= e^{\eta_2 t} \sin(\sqrt{\lambda} t) = \sin(\sqrt{\lambda} t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} t)$$

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

Укупним граничним условима:

$$y(1) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(e) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln e) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln e)$$

$$y(e) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{I) } C_1 &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \text{тривијално решење које нас не занима} \\ \text{II) } \sin \sqrt{\lambda} &= 0 \quad \sin \kappa \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\sin \sqrt{\lambda} = \sin \kappa \pi$$

$$\sqrt{\lambda} = \kappa \pi$$

$$\boxed{\lambda = \kappa^2 \pi^2}$$

По је самостално решење једначине:

$$y = C_1 \cos^2(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

$$y_k = C_1 \sin(\kappa \pi \ln x)$$

Испитни: 17.07.2002.

63) Наћи опште решење диф. ј-не: $x^4 \cdot y'' + 2x^3 y' - 4y = e^{\frac{1}{x}}$

$$\text{Омена: } t = \frac{1}{x}$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$\alpha = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -t^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot (-t^2)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dt} (y'_t \cdot (-t^2)) \cdot \frac{dt}{dx} = (-y''_t t^2 - 2t y'_t) \cdot (-t^2) = t^4 y''_t + 2t^3 y'_t$$

Решаю по све замене у функцию 1-ую:

$$x^4 \cdot y'' + 2x^3 y' - 4y = e^{\frac{2}{x}}$$

$$\frac{1}{t^4} \cdot (t^3 \cdot y_t'' + 2t^3 \cdot y_t') + 2 \cdot \frac{1}{t^3} \cdot (y_t' \cdot (-t^2)) - 4y = e^{2x} t$$

$$y_t'' + \frac{2}{t} y_t' - \frac{2}{t^3} y_t' + 2 - 4y = e^{2x} t$$

$$y_t'' - 4y = e^{2x} t$$

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \wedge r = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^{2t} \\ y_2 = e^{-2t} \end{array} \right\} \boxed{y_h = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-2t}}$$

$$\text{Решим } 1\text{-ю } xy'' - y' + \lambda x^3 y = 0$$

предположим, что решение: $x = \sqrt{t}$

а второе решение найдем методом:

$$y(0) = y(\sqrt{t}) = 0$$

$$x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2$$

$$dt = 2x dx$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot 2x \Rightarrow \boxed{y' = y'_t \cdot 2x} \Rightarrow \boxed{y' = y'_t \cdot 2\sqrt{t}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy'}{dt} \cdot \left(y'_t \cdot 2x \right) = \frac{dy'}{dt} \cdot (y'_t \cdot 2x) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot (y'_t \cdot 2\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} =$$

$$= (y''_t \cdot 2\sqrt{t} + y'_t \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}) \cdot 2\sqrt{t} = \boxed{y''_t \cdot 4t + 2y'_t}$$

Второе и первое

$$\sqrt{t} \cdot (y''_t \cdot 4t + 2y'_t) - y'_t \cdot 2\sqrt{t} + \lambda \cdot \sqrt{t} \cdot y = 0$$

$$\sqrt{t} \cdot (y''_t \cdot 4t + 2y'_t - 2y'_t + \lambda y \cdot t) = 0 \quad / : \sqrt{t}$$

$$4ty''_t + \lambda y t = 0 \quad / : t$$

$$4y''_t + \lambda y = 0 \quad / : 4$$

$$y''_t + \frac{\lambda}{4} y = 0$$

Параметризуем 1-ю же:

$$r^2 + \frac{\lambda}{4} = 0$$

$$\boxed{r = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{4}}}$$

Получим корни характеристического уравнения

I) $\lambda > 0$, II) $\lambda = 0$, III) $\lambda < 0$

$$\text{I) } \lambda > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}i \quad \wedge \quad r_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}i$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot t\right) \\ y_2 &= \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot t\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot t\right) \\ y &= C_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot x^2\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot x^2\right) \end{aligned}$$

$$y = C_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} x^2) + C_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} x^2) \quad *$$

$$y(1) = C_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda})$$

$$y(\sqrt{2}) = C_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot 2) + C_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \cdot 2)$$

$$\begin{cases} C_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}) = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

- Za da zadovoljimo uslove biti iskupeni potrebno je izabrati broj koji λ je koji to bude.

To će biti ako je iskupan uslov

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} & \sin \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \\ \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{postoji nekobivno rešenje}$$

$$\cos \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \cos \sqrt{\lambda} \sin \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\sin k\pi = 0$$

$$\sin(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}) = \sin k\pi$$

$$\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} = k\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = 2k\pi$$

$$\lambda_k = 4k^2\pi^2$$

Ogledno smo dobili uslov y (*) dobijemo iskupeno rešenje

$$y_k = C_1 \cos(\frac{1}{2} \cdot 2k\pi \cdot x^2) + C_2 \sin(\frac{1}{2} \cdot 2k\pi \cdot x^2)$$

$$y_k = C_1 \cos(k\pi x^2) + C_2 \sin(k\pi x^2)$$

II) $\lambda = 0$

$$y_1 = 0, y_2 = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = x^2 \Rightarrow y = C_1 + C_2 x^2$$

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 \\ y(\sqrt{2}) = C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$\lambda < 0$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}, r_2 = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

$$y_1 = e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t}; y_2 = e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t}$$

$$y = C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}t}$$

$$y = C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x^2} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x^2} \quad (2)$$

$$y(1) = C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} = 0$$

$$y(5) = C_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} - C_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} & e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \\ e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} & e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{никога нема да има решение!}$$

$$1) \Rightarrow \text{Пошто је } e^x \neq 0 \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}$$

можемо заклучити да не постои такво $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ јединствено решење! $\Rightarrow y = 0$

$$\text{II} \cos x \cdot y'' + \sin x \cdot y' + 4 \cos^2 x y = \cos^3 x \cdot \sin(2 \sin x) \quad \text{сменом: } t = \sin x$$

$$t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t$$

$$dt = \cos x dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \cos x \arcsin t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{1-t^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \cos x \Rightarrow y'_t = y'_t \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} (y'_t \cdot \sqrt{1-t^2}) \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$y'' = (y'_t \cdot \sqrt{1-t^2} - y'_t \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}) \cdot \sqrt{1-t^2}$$

$$y'' = y'_t \cdot (1-t^2) - y'_t \cdot t$$

$$\sqrt{1-t^2} \cdot (y'_t \cdot (1-t^2) - y'_t \cdot t) + t \cdot y'_t \cdot \sqrt{1-t^2} + 4 \cdot (1-t^2) y = (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2t$$

$$\sqrt{1-t^2} \cdot (1-t^2) \cdot y'_t - t \cdot y'_t \cdot \sqrt{1-t^2} + t \cdot y'_t \cdot \sqrt{1-t^2} + 4 \cdot (1-t^2) y = (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2t$$

$$y'_t - 4y = (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2t$$

$$r^2 - 4 = 0 - \text{каракт. једн.}$$

$$r^2 = 4$$

$$r_1 = 2, r_2 = -2$$

$$y_1 = e^{2t}, y_2 = e^{-2t} \rightarrow y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \Rightarrow \boxed{y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}}$$

$$y_p = ?$$

$$f(x) = (1-t^2) \sin 2t$$

$$f(x) = e^{at} \cdot [A \cos bt + B \sin bt] \quad \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ b=2 \\ A \cos t = A t^2 + B t + C \\ B \sin t = D t^2 + E t + F \end{array} \right.$$

$$y_p = (At^2 + Bt + C) \cdot \cos 2t + (Dt^2 + Et + F) \cdot \sin 2t$$

$$y_p' = \dots, y_p'' = \dots \rightarrow \text{заменимо } y_p'' - 4y_p = (1-t^2) \sin 2t$$

$$\text{добујемо } A, B, C, D, E \text{ и } F \text{ и заменимо } y_p$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

05.09.1991.

[72] Hobu odrediti rešenje diferencij. jed. $x \cdot (x+1) y'' + (x+2) y' - y = (1+x^2)e^x$ ako je poznato da odgovarajuća homogena linearna jed. $y'' + 2y' - y = 0$ ima jedno lišeno ličeno rešenje oblika $y_1 = x^r$, gde je r realan broj.

$$x \cdot (x+1) y'' + (x+2) y' - y = (1+x^2)e^x$$

$$y_1 = x^r, (r = \text{const}), y_1' = r \cdot x^{r-1}, y_1'' = r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2}$$

$$x \cdot (x+1) y_1'' + (x+2) y_1' - y_1 = 0$$

$$(x^2+x) \cdot (r^2-r) \cdot x^{r-2} + (x+2) \cdot r \cdot x^{r-1} - x^r = 0$$

$$(r^2-r) \cdot (x^r + x^{r+1}) + r \cdot (x^r + 2x^{r+1}) - x^r = 0$$

$$\underline{r^2 x^r + r^2 x^{r+1} - r x^r - r x^{r+1} + r x^r + 2r x^{r+1} - x^r = 0}$$

$$x^r \cdot (r^2 - r + r - 1) + x^{r+1} \cdot (r^2 - r + 2r) = 0$$

$$x^r \cdot (r^2 - 1) + x^{r+1} \cdot (r^2 + r) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 = 0 \wedge r^2 + r = 0$$

$$r^2 = 1$$

$$r \cdot (r+1) = 0$$

$$r = 1 \wedge \boxed{r = -1}$$

$$r = 0 \wedge \boxed{r = -1}$$

$\Rightarrow r = -1$ jer zadovoljava obe j-h.

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{x}}$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0 \quad /: x \cdot (x+1)$$

$$y'' + \frac{x+2}{x(x+1)} y' - \frac{1}{x(x+1)} y = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}, \quad Q(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$y_2 = \frac{1}{x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{x+2}{x(x+1)} dx}}{\frac{1}{x^2}} dx$$

$$\int \frac{x+2}{x(x+1)} dx =$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$x+2 = A \cdot (x+1) + Bx$$

$$x+2 = Ax + A + Bx = (A+B)x + A \Rightarrow$$

$$A+B=1$$

$$\Rightarrow 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = 2 \ln|x| - \ln|x+1| = \ln \frac{x^2}{x+1}$$

$$\boxed{A=2}, \quad \boxed{B=-1}$$

$$y_2 = \frac{1}{x} \cdot \int \frac{\frac{x^2}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{x} \cdot \int |x+1| dx = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) = \boxed{y_2 = \frac{1}{2}(x+2)}. \quad \text{Отуда}$$

може се ухватити $\boxed{y_2 = x+2}$

Паралелно решење хомогеног диф. јне:

$$y'' + \frac{x+2}{x(x+1)} y' - \frac{1}{x(x+1)} y = \frac{(1+x^2)e^x}{x(x+1)} \Rightarrow f(x) = \frac{(1+x^2)e^x}{x(x+1)}, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x+2 \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{vmatrix} = \Rightarrow$$

атрону се Лагранжовим методом варијације $\Rightarrow W = \frac{2(x+1)}{x^2}$

константа, према којој је:

$$y_p = -y_1 \int \frac{f(x)}{W} y_2 dx + y_2 \int \frac{f(x)}{W} y_1 dx = -\frac{1}{2x} \int \frac{x(1+x^2)(x+2)}{(x+1)^2} e^x dx + \frac{1}{2} (x+2) \int \frac{1+x^2}{(x+1)^2} e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} \int \left[x^2 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] e^x dx + \frac{1}{2} (x+2) \int \left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} \int x^2 e^x dx + \frac{1}{2} (x+2) \int e^x dx + \left(-\frac{1}{x} - x-2 \right) \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x} (x^2 - 2x + 2) + \frac{1}{2} (x+2) e^x + \left(-\frac{1}{x} - x-2 \right) \int \left[\frac{e^x dx}{x+1} + \int e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right) \right] = \dots =$$

$$y_p = e^x \left(1 - \frac{2}{x} \right).$$

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 (x+2) + e^x \left(1 - \frac{2}{x} \right)}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ Я-ПО

73

1) $y' - x + z = 0$

 $y(x), z(x)$ - НЕИЗВЕСТНЫЕ
Ф-Е

$$x^2 z' + 2y = x^2 \ln x$$

$$z = -y' + x \quad / \text{дифференцируем}$$

$$z' = -y'' + 1$$

$$x^2(-y'' + 1) + 2y = x^2 \ln x$$

$$-x^2 y'' + 2y = x^2 \ln x - x^2 \quad \text{— Опробуем}$$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t} \quad t = \ln x$$

$$y' = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t)$$

$$-e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t) + 2y = x^2 \ln x - x^2$$

2)
$$-y''_t + y'_t + 2y = x^2 \ln x - x^2 \Rightarrow -y''_t + y'_t + 2y = e^{2t} \cdot t - e^{2t}$$

$$-z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{2t}, y_2 = e^{-t}$$

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \Rightarrow y_h = C_1 e^{2 \ln x} + C_2 e^{-\ln x}$$

$$y_h = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x}$$

$$y_p = ?$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^{2t} \cdot (t-1) \\ f(x) &= e^{2t} \cdot p(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{d=2}, p(t) = t-1$$

$$q(t) = At + B$$

$$y_p = t^k \cdot e^{2t} \cdot q(t)$$

$$y_p = t \cdot e^{2t} \cdot (At + B)$$

$$y_p = e^{2t} \cdot (At^2 + Bt)$$

$$\Rightarrow -y_p'' + y_p' + 2y_p = e^{2t} \cdot (t-1)$$

$$y_p' = 2e^{2t} \cdot (At^2 + Bt) + e^{2t} \cdot (2At + B) = e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + B)$$

$$y_p'' = 2e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + B) + e^{2t} \cdot (4At + 2B + 2A) =$$

$$= e^{2t} (4At^2 + 4Bt + 4At + 2B + 4A + 2B + 2A)$$

$$= e^{2t} (4At^2 + 4Bt + 6At + 4A + 4B)$$

$$-e^{3t} \cdot (4At^2 + 4Bt + 8At + 2A + 4B) + e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + 8) + e^{3t} (At^2 + Bt) = e^{2t} \cdot (t-1)$$

$$-4At^2 - 4Bt - 8At - 2A - 4B + 2At^2 + 2Bt + 2At + 8 + At^2 + Bt = (t-1)$$

$$-At^2 - 8t - 6At - 2A - 3B = t - 1$$

$$-At^2 + (-8-6A)t + (-2A-3B) = t-1$$

$$-At^2 = 0 \Rightarrow B = -1-6A$$

$$\begin{cases} -8-6A = 1 \\ -2A-3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A+3+18A = -1 \\ 16A = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$y_p = e^{2t} \cdot \left(-\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{9}t\right)$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} + x^2 \ln x \left(-\frac{\ln x}{6} + \frac{1}{9}\right)$$

$$(1) x' = 2x + 4z \quad x(t) \quad - \quad (1)$$

$$y' = 2y + x \quad y(t) \quad - \quad (2)$$

$$z' = y - z + e^{3t} \quad z(t) \quad - \quad (3)$$

$$(1) z = \frac{x'}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow z' = \frac{x''}{4} - \frac{x'}{2} \rightarrow \text{yes! } y \quad (3)$$

$$(2) \frac{x''}{4} - \frac{x'}{2} = y - \frac{x'}{4} + \frac{x}{2} + e^{3t}, \quad y = ?$$

$$-y = -\frac{x'}{4} + \frac{x'}{2} - \frac{x'}{4} + \frac{x}{2} + e^{3t}$$

$$y = \frac{x'}{4} - \frac{x'}{4} - \frac{x}{2} - e^{3t}$$

$$y' = \frac{x''}{4} - \frac{x''}{4} - \frac{x'}{2} - 3e^{3t} \rightarrow \text{yes! } y \quad (2)$$

$$(3) \frac{x''}{4} - \frac{x''}{4} - \frac{x'}{2} - 3e^{3t} = \frac{x''}{4} - \frac{x'}{2} = x - 2e^{3t} + x$$

$$\frac{x''}{4} - \frac{3x'}{4} = e^{3t}$$

$$\frac{1}{4} x'' - \frac{3}{4} x' = e^{3t} \quad / \cdot 4$$

$$x'' - 3x' = 4e^{3t}$$

$$r^2 - 3r = 0 \Rightarrow r^2 \cdot (r-3) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0, r_3 = 3$$

$$y_1 = 1, y_2 = t, y_3 = e^{3t}$$

$$x_h = C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t}$$

$$f(x) = 4e^{3x}$$

$$f(x) = e^{\lambda t} \cdot R(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 3 \rightarrow R(t) = 4 \rightarrow Q(t) = A \\ \text{ЗНАЧЕ КАРАКТЕРИСТИЧНА КУБА. ЗЕР ЗЕ} \end{array} \right\} \lambda = 3 \quad (Y(A) = 0)$$

$$x_p = t e^{3t} \cdot A \Rightarrow x_p = e^{3t} \cdot A t$$

$$x_p'' - 3x_p' = 4e^{3t} \quad (*)$$

$$x_p' = A \cdot e^{3t} + 3At e^{3t} \Rightarrow x_p' = e^{3t} \cdot (3At + A)$$

$$x_p'' = 3e^{3t} \cdot (3At + A) + e^{3t} \cdot (3A) \Rightarrow x_p'' = e^{3t} \cdot (9At + 6A)$$

$$x_p''' = 3e^{3t} \cdot (9At + 6A) + e^{3t} \cdot (9A) \Rightarrow x_p''' = e^{3t} \cdot (27At + 27A)$$

$$e^{3t} \cdot (27At + 27A) - 3e^{3t} \cdot (9At + 6A) = 4e^{3t}$$

$$27At + 27A - 27At - 18A = 4$$

$$9A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{9}$$

$$x_p = \frac{4}{9} t \cdot e^{3t}$$

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t} + \frac{4}{9} t \cdot e^{3t}$$

$$z = \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2}$$

$$x' = C_2 + 3C_3 e^{3t} + \frac{4}{9} e^{3t} + \frac{4}{3} t e^{3t}$$

$$x' = C_2 + e^{3t} \cdot (3C_3 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} t)$$

$$z = \frac{C_2}{t} + \frac{e^{3t}}{t} \cdot (3C_3 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3} t) - \frac{C_1}{t^2} - \frac{C_2}{t} - \frac{C_3 e^{3t}}{t} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} t \cdot e^{3t}$$

$$z = \frac{1}{t} C_2 + \frac{3}{t} C_3 e^{3t} + \frac{4}{t} e^{3t} + \frac{4}{3} t \cdot e^{3t} - \frac{1}{t^2} C_1 - \frac{1}{t} C_2 - \frac{1}{t} C_3 e^{3t} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} t \cdot e^{3t}$$

$$z = -\frac{1}{t^2} C_1 + (-\frac{1}{t} + \frac{4}{3} t) C_2 + \frac{4}{t} C_3 e^{3t} + \frac{4}{3} t \cdot e^{3t} + \frac{4}{3} e^{3t}$$

$$y = \frac{x''}{t} - \frac{x'}{t^2} - \frac{x}{t^3} - e^{3t} \dots$$

$$\boxed{25} \quad x^2 \cdot y' = z + \frac{x^2}{2} \quad y(x), z(x) \quad - (1)$$

$$z' = \lambda y + x y' \quad - (2)$$

$$(1) \quad z = x^2 \cdot y' - \frac{x^2}{2} \Rightarrow z' = 2x \cdot y' + x^2 \cdot y'' - x \rightarrow (2)$$

$$(2) \quad 2x \cdot y' + x^2 \cdot y'' - x = \lambda y + x y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 y'' + x y' - \lambda y = x} \rightarrow \text{ОЗНАЧЕВА } \lambda = 11$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$a=1 \Rightarrow$$

$$y' - y t \cdot e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y'' - y')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y'' - y') + e^{-t} \cdot e^{-t} \cdot y' - \lambda y = x$$

$$y'' - \lambda y = e^t$$

$$r^2 - \lambda = 0 \quad - \text{Характеристический уравнение}$$

$$r^2 = \lambda \Rightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$$

Построим три случая:

$$\text{I) } \lambda > 0 \quad \text{II) } \lambda = 0 \quad \text{III) } \lambda < 0$$

$$\text{I) } \lambda > 0$$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$y_1 = e^{\sqrt{\lambda}t}, y_2 = e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t} \Rightarrow y_h = C_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot \ln x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot \ln x} = C_1 x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$y_h = C_1 x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{II) } \lambda = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0 \Rightarrow \text{Важность: } K=2$$

$$y_1 = 1, y_2 = t$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 t \Rightarrow y_h = C_1 + C_2 \ln x$$

$$\text{III) } \lambda < 0$$

$$r_1 = \sqrt{\lambda} \cdot i, r_2 = -\sqrt{\lambda} \cdot i \Rightarrow \alpha = 0, \delta = \sqrt{\lambda}$$

$$y_1 = \cos \sqrt{\lambda} t, y_2 = \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$y_h = C_1 \cos \sqrt{\lambda} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = e^t \\ f(x) = e^{\alpha t} \cdot P(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I) } \lambda = 1 \\ \text{II) } \lambda \neq 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \alpha \neq 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} P(t) = 1 \\ P(t) = t \end{array} \quad Q(t) = A$$

$$\text{3A } \lambda = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r_1 = 1, r_2 = -1 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \alpha\text{-характеристична} \\ \text{функція вивестр. КФД}$$

$$y_p = t \cdot e^t \cdot A$$

$$y_p'' - y_p = e^t$$

$$y_p' = A e^t + A t e^t \Rightarrow e^t \cdot (A t + A)$$

$$y_p'' = e^t \cdot (A t + A) + e^t \cdot A \Rightarrow e^t \cdot (A t + 2A)$$

$$e^t \cdot (A t + 2A) - e^t A t = e^t$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2} t e^t \Rightarrow y_p = \frac{1}{2} \ln x \cdot e^{\ln x} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2} x \ln x$$

$$\text{3B } \lambda = 1, y_h = ?$$

$$r_1 = 1, r_2 = -1$$

$$y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$$

$$y_h = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{\ln x^{-1}} \Rightarrow y_h = C_1 x + C_2 x^{-1}$$

$$y = C_1 x + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2} x \ln x$$

$$z = x^2 y' - \frac{x^2}{2}$$

$$y' = C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}$$

$$z = x^2 \cdot (C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}) - \frac{x^2}{2}$$

$$z = x^2 \cdot (C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})$$

$$z = C_1 x^2 - C_2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x$$

$$\text{3A } \lambda = 1$$

$$\text{3B } \lambda \neq 1$$

$$y_p = e^t \cdot A; y_p' = e^t \cdot A, y_p'' = e^t \cdot A$$

$$y_p'' - \lambda y_p = e^t$$

$$e^t A - \lambda e^t A = e^t \Rightarrow$$

$$A - \lambda A = 1$$

$$1 \cdot (1 - \lambda) = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{1 - \lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{e^t}{1 - \lambda}$$

$$y = C_1 x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 x^{-\sqrt{\lambda}} + \frac{e^t}{1 - \lambda}$$

$$\underline{\underline{\text{за } \lambda > 0 \wedge \lambda \neq 1}}$$

$$z = \dots$$

$$\text{за } \lambda = 0$$

$$y_p = e^t \cdot A \Rightarrow y_p = \frac{e^t}{1 - \lambda}$$

$$y = C_1 + C_2 \ln x + \frac{e^t}{1 - \lambda}$$

$$z = \dots$$

$$\text{за } \lambda < 0$$

$$\lambda_1 = 0 + \sqrt{\lambda} i ; \lambda_2 = 0 - \sqrt{\lambda} i$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 +, \beta = 1 \xrightarrow{(*)} \text{имеем характер нуля}$$

$$y_p = e^t [A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t]$$

$$\leftarrow \text{вспоминаем то, что получилось}$$

$$y_p'' - \lambda y_p = e^t \dots$$

$$y_p' = e^t \cdot (A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t) + e^t \cdot (-B \sin \sqrt{\lambda} t \cdot \sqrt{\lambda} + A \cos \sqrt{\lambda} t \cdot \sqrt{\lambda})$$

$$y_p' = e^t \cdot (-\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} t + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda} t)$$

$$y_p'' = e^t \cdot (-\sqrt{\lambda} A \cos \sqrt{\lambda} t + \sqrt{\lambda} B \sin \sqrt{\lambda} t) + e^t \cdot (-\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} t \cdot \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda} t \cdot \sqrt{\lambda})$$

$$y_p'' = e^t \cdot (-\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} t + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda} t - \lambda A \cos \sqrt{\lambda} t - \lambda B \sin \sqrt{\lambda} t)$$

$$-\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} t + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda} t - \lambda A \cos \sqrt{\lambda} t - \lambda B \sin \sqrt{\lambda} t - \lambda A \cos \sqrt{\lambda} t - \lambda B \sin \sqrt{\lambda} t = 1$$

$$-\sqrt{\lambda} A - \lambda B - \lambda B = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} A - 2\lambda B = 0$$

$$\boxed{76} \quad x' = 3z - x + e^{at} \quad (1) \quad x(t), y(t), z(t).$$

$$y' = y + 3z - 2x + t \quad (2) \quad \text{Решить } y \text{ в зависимости от } t \text{ и } z.$$

$$\underline{z' = -y + 2z + x + e^t} \quad (3) \quad \text{методом.}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad z &= \frac{x'}{3} + \frac{x}{3} - \frac{e^{at}}{3} \\ z' &= \frac{x''}{3} + \frac{x'}{3} - \frac{ae^{at}}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow (3)$$

$$(1) \quad \frac{x''}{3} + \frac{x'}{3} - \frac{ae^{at}}{3} = -y + \frac{2x'}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2e^{at}}{3} + x + e^t$$

$$y = -\frac{x''}{3} - \frac{x'}{3} + \frac{ae^{at}}{3} + \frac{2x'}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2e^{at}}{3} + x + e^t$$

$$y = -\frac{x''}{3} + \frac{x'}{3} + \frac{ae^{at}}{3} - \frac{2e^{at}}{3} + \frac{5x}{3} + e^t$$

$$y' = -\frac{x'''}{3} + \frac{x''}{3} + \frac{a^2e^{at}}{3} - \frac{2ae^{at}}{3} + \frac{5x'}{3} + e^t$$

$$(2) \quad -\frac{x'''}{3} + \frac{x''}{3} + \frac{5x'}{3} + \frac{a^2e^{at}}{3} - \frac{2ae^{at}}{3} + e^t = -\frac{x''}{3} + \frac{x'}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{ae^{at}}{3} - \frac{2e^{at}}{3} + e^t + x' + x - e^{at} - 2x + t \quad / \cdot 3$$

$$-x''' + x'' + 5x' + a^2e^{at} - 2ae^{at} + 3e^t + x'' - x' - 5x - ae^{at} + 2e^{at} - 3e^t - 3x' - 3x + 3e^{at} + 6x - 3t = 0$$

$$-x''' - 2x'' + x' - 2x + e^{at} \cdot (a^2 - 3a + 5) - 3t = 0$$

$$\boxed{x''' - 2x'' - x' + 2x = e^{at} \cdot (a^2 - 3a + 5) - 3t}$$

Характеристическая нулю:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

$$r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = -1$$

$$x_1 = e^{2t}, x_2 = e^t, x_3 = e^{-t}$$

$$\boxed{x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t}}$$

Составим частное решение:

- Построим два слагаемых для частного решения:

$$x^1 - 2x'' - x' + 2x = \frac{-3t}{1} + \frac{e^{at} \cdot (a^2 - 3a + 5)}{1}$$

$$x'' - 2x' - x' + 2x = -3t$$

$$f(x) = -3t$$

$$f(x) = e^{\alpha t} \cdot p(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0, p(t) = -3t \Rightarrow Q(t) = At + B \\ \rightarrow \text{нуже КАРОКТ. НУЖА} \end{array} \right\}$$

$$x_p = At + B$$

$$x_p'' - 2x_p' - x_p' + 2x_p = -3t$$

$$x_p' = A, x_p'' = 0; x_p''' = 0$$

$$A + 2At + 2B = -3t$$

$$2At + (A + 2B) = -3t$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A = -3 \\ A + 2B = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = -\frac{3}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{array}$$

$$x_p = -\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t} - \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$$

$$y = \dots, z = \dots$$

$$x'' - 2x' - x' + 2x = e^{\alpha t} \cdot (t^2 - 3t + 5)$$

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot (t^2 - 3t + 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = e^{\alpha t} \cdot p(t) \\ \alpha = a \end{array} \right\} Q(t) = A$$

$$a \neq (r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = -1)$$

$$x_p = e^{\alpha t} A$$

$$x_p'' - 2x_p' - x_p' + 2x_p = e^{\alpha t} \cdot (t^2 - 3t + 5)$$

$$x_p' = A \alpha e^{\alpha t}$$

$$x_p'' = A \alpha^2 e^{\alpha t}$$

$$x_p''' = A \alpha^3 e^{\alpha t}$$

$$A \alpha^3 e^{\alpha t} - 2A \alpha^2 e^{\alpha t} - A \alpha e^{\alpha t} + 2A e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (t^2 - 3t + 5)$$

$$A \alpha^3 - 2A \alpha^2 - A \alpha + 2A = (t^2 - 3t + 5)$$

$$A \cdot (t^2 - 2t^2 - t + 2) = t^2 - 3t + 5$$

$$A = \frac{t^2 - 3t + 5}{t^2 - 2t^2 - t + 2}$$

$$x_p = \frac{t^2 - 3t + 5}{t^2 - 2t^2 - t + 2} \Rightarrow x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + \frac{t^2 - 3t + 5}{t^2 - 2t^2 - t + 2}, y, z = \dots$$

$$2) \alpha = 2, \alpha = 1, \alpha = -1 \Rightarrow \text{ДОВИЖАМО:}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow \text{КАРАКТЕРИСТИЧНА ПУТА : } \kappa = 1$$

$$x_p = t \cdot e^{\alpha t} \cdot A$$

$$x_p''' - 2x_p'' - x_p' + 2x_p = e^{\alpha t} \cdot (0^2 - 3\alpha + 5)$$

$$x_p' = A e^{\alpha t} + A \alpha t \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow x_p' = e^{\alpha t} \cdot (A \alpha t + A)$$

$$x_p'' = \alpha e^{\alpha t} \cdot (A \alpha t + A) + e^{\alpha t} \cdot A \alpha \Rightarrow x_p'' = e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^2 t + 2A \alpha)$$

$$x_p''' = \alpha e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^2 t + 2A \alpha) + e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^2) \Rightarrow x_p''' = e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^3 t + 3A \alpha^2)$$

$$e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^3 t + 3A \alpha^2) - 2e^{\alpha t} \cdot (A \alpha^2 t + 2A \alpha) - e^{\alpha t} \cdot (A \alpha t + A) - e^{\alpha t} \cdot A t = e^{\alpha t} \cdot (0^2 - 3\alpha + 5)$$

$$A \alpha^3 t + 3A \alpha^2 - 2A \alpha^2 t - 4A \alpha - A \alpha t - A + A t - 0^2 - 3\alpha + 5$$

$$(A \alpha^3 - 2A \alpha^2 - A \alpha + A) t + (3A \alpha^2 - 4A \alpha - A) = 0^2 - 3\alpha + 5$$

$$A \alpha^3 - 2A \alpha^2 - A \alpha + A = 0$$

$$3A \alpha^2 - 4A \alpha - A = 0^2 - 3\alpha + 5$$

$$A = \frac{0^2 - 3\alpha + 5}{3\alpha^2 - 4\alpha + 1}$$

$$x_p = \frac{0^2 - 3\alpha + 5}{3\alpha^2 - 4\alpha + 1} \cdot t \cdot e^{\alpha t}$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + \frac{0^2 - 3\alpha + 5}{3\alpha^2 - 4\alpha + 1} \cdot t \cdot e^{\alpha t}$$

$$y = \dots, z = \dots$$

- НОРМАЛНИ СИСТЕМИ -

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}$$

77) Решите систему:

$$\frac{dx}{x^2 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}$$

$$\frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2 z}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln y + C = \ln z$$

$$\ln y - \ln z = -C$$

$$\ln \frac{y}{z} = -C \Rightarrow \frac{y}{z} = e^{-C} \Rightarrow \frac{y}{z} = e^C \Rightarrow$$

$$y = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\sigma y}{2y^3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2 + 3xy^2}{2y^3} = \frac{x^2}{2y^3} + \frac{3xy^2}{2y^3} = \frac{x^2}{2y^3} + \frac{3x}{2y}$$

$$x' - \frac{3x}{2y} = \frac{x^2}{2y^3}$$

$$x' - \frac{3}{2y} \cdot x = \frac{1}{2y^3} \cdot x^2 - \text{БЕРНУЛИЈЕВА ј-НА!}$$

$$\boxed{2=2}, \boxed{t=\frac{1}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow x' = -\frac{t'}{t^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2y} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2y^3} \cdot \frac{1}{t^2} \quad | \cdot (-t^2)$$

$$t' + \frac{3}{2y} \cdot t = -\frac{1}{2y^3} \rightarrow \text{ЛИНЕАРНА ДИФ ј-НА!}$$

$$p(y) = \frac{3}{2y}, \quad q(y) = -\frac{1}{2y^3}$$

$$t = e^{-\int \frac{3}{2y} dy} \cdot \left[c - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^3} \cdot e^{\int \frac{3}{2y} dy} dy \right]$$

$$t = e^{-\frac{3}{2} \ln y} \cdot \left[c - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^3} \cdot e^{\frac{3}{2} \ln y} dy \right] = e^{\ln y^{-\frac{3}{2}}} \cdot \left[c - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\ln y^{\frac{3}{2}}} dy \right] \Rightarrow$$

$$= y^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(c - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} dy \right) = y^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(c - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \right) = y^{-\frac{3}{2}} \cdot [c_2 + y^{-\frac{1}{2}}]$$

$$t = \frac{c_2}{\sqrt{y^3}} + \frac{1}{y^2}$$

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\frac{c_2}{\sqrt{y^3}} + \frac{1}{y^2}}} \quad \text{КРАЈ!}$$

Ако је:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \dots = \frac{u_n}{v_n} = t$$

Онда важи:

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n} = t$$

78) $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = t$ (не мора бити ΔT) - 30.05.2002.

1) Истекао га $y: d_1 = d_2 = d_3 = 1$

$$\frac{dx+dy+dz}{(y-z)+(z-x)+(x-y)} = t$$

$$\frac{dx+dy+dz}{y-z+z-x+x-y} = t \Rightarrow \text{Због израз био диференцијал мора и бројилац бити нула!}$$

$$dx+dy+dz=0 \Rightarrow \text{Збир диференцијала је увек једнак нули.}$$

$$d(x+y+z)=0$$

$$\boxed{x+y+z=C_1} \text{ - Јер је диференцијал збира једнак нули, ако је збир нека константа.}$$

2) $\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y)} = t$

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{2xy - 2xz + 2yz - 2xy + 2xz - 2yz} = t$$

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{0} = t$$

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$$

$$d(x^2) + d(y^2) + d(z^2) = 0$$

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = C_2}$$

79) $\frac{dx}{y-2z} = \frac{dy}{3z-x} = \frac{dz}{2x-3y}$

1) $d_1 \cdot (y-2z) + d_2 \cdot (3z-x) + d_3 \cdot (2x-3y) = 0$

$$3(y-2z) + 2(3z-x) + 1(2x-3y) = 0$$

$$\frac{3dx + 2dy + dz}{3y-6z+6z-2x+2x-3y} = t$$

$$3dx + 2dy + dz = 0$$

$$d(3x + 2y + z) = 0$$

$$\boxed{3x + 2y + z = C_1}$$

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)} = t$$

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{2xy - 4xz + yz - xy + 4xz - 6yz} = t$$

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = C_2}$$

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\frac{dx + dy + dz}{xy - xz + yz - xy + xz - yz} = t$$

$$dx + dy + dz = 0$$

$$\boxed{x + y + z = C_1}$$

$$\frac{\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz}{y-z + z-x + x-y} = t$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$d(\ln x) + d(\ln y) + d(\ln z) = 0$$

$$d(\ln x + \ln y + \ln z) = 0$$

$$d(\ln(x \cdot y \cdot z)) = 0$$

$$\ln(x \cdot y \cdot z) = C \quad / e$$

$$x \cdot y \cdot z = e^C = C_2$$

$$\boxed{x \cdot y \cdot z = C_2}$$

ИСПИТНИ: 20.06.2001. год.

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{y(z^2-x^2)} = \frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz}{y^2-z^2 + z^2-x^2 + x^2-y^2} = t$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$d(\ln x) + d(\ln y) + d(\ln z) = 0$$

$$d(\ln x + \ln y + \ln z) = 0$$

$$d(\ln(x \cdot y \cdot z)) = 0$$

$$\ln(x \cdot y \cdot z) = C \quad / e$$

$$x \cdot y \cdot z = e^C = C_1$$

$$\boxed{x \cdot y \cdot z = C_1}$$

$$2) \frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{2x^2(y^2 - z^2) + 2y^2(z^2 - x^2) + 2z^2(x^2 - y^2)} = t$$

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 2xy^2x^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2} = t$$

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$$

$$d(x^2) + d(y^2) + d(z^2) = 0$$

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = C_2}$$

КВАЗИЛИНЕАРНЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$f_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = f_3(x, y, z)$$

$$\frac{dx}{f_1(x, y, z)} = \frac{dy}{f_2(x, y, z)} = \frac{dz}{f_3(x, y, z)}$$

82 Решити парцијалну једначину:

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2 \quad (*)$$

$$\text{КРИВА: } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - yz = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{y^2 \frac{\partial z}{\partial x}}_{f_1} + \underbrace{yz \frac{\partial z}{\partial y}}_{f_2} = \underbrace{-z^2}_{f_3}$$

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2}$$

- Ово су једнакви две једначине. Нека је прва:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-z^2} \quad | \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dz}{z^2} \Rightarrow \ln y + C = - \ln z$$

$$\ln y + \ln z = -C$$

$$\ln(yz) = -C \quad | e$$

$$yz = e^{-C} = C_1$$

$$\boxed{yz = C_1}$$

Друга једначина дикт:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = y' dx$$

$$dy = y' dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} + C_2 = y' x \Rightarrow C_2 = y' x - \frac{y^3}{3} \Rightarrow$$

$$C_2 = xy' - \frac{y^3}{3}$$

$$F(Q_1, C_2) = 0$$

$$F(y', xy' - \frac{y^3}{3}) = 0$$

Први део задатка је да нађемо решења ј-не * (C₁, C₂)

$$y' = y \quad \text{КРИВА:} \quad \begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y \\ x - y' = 1 \Rightarrow x = y' + 1 \end{cases}$$

ОБЈАВМО ЧЕТРИ ЈЕДНАЧИНЕ:

$$\left. \begin{array}{l} y' = y \\ xy' - \frac{y^3}{3} = C_2 \\ x = y \\ y' + 1 = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1) z = \frac{y}{x} \\ 2) xy' - \frac{y^3}{3} = C_2 \\ 3) x = y \\ 4) y' + 1 = y \end{array} \quad 2) (y'+1)^2 \cdot \frac{y}{y'+1} - \frac{(y'+1)^3}{3} = C_2$$

$$(y'+1) \cdot y - \frac{(y'+1)^3}{3} = C_2 \quad / \cdot 3$$

$$3y^2 + 3y - (1 + 2y' + y'^2 + y' + 2y'^2 + y'^3) = 3C_2$$

$$3y^2 + 3y - 1 - 2y' - y'^2 - y' - 2y'^2 - y'^3 = 3C_2$$

$$-(1 + y'^3) = 3C_2$$

$$1 + y'^3 = -3C_2$$

$$1 + y'^3 = -3xy' + y^3$$

Решити партиципалну једначину:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

$$\text{КРИВА:} \quad \begin{cases} x + y = 2z \\ xz = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xz+y} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad / \int$$

$$\ln x = \ln z \Rightarrow \ln x + C = \ln z \Rightarrow \ln x - \ln z = -C \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{z}\right) = -C \Rightarrow \frac{x}{z} = e^{-C}$$

$$\frac{x}{z} = e^{-C} \Rightarrow \boxed{\frac{z}{x} = y} \Rightarrow z = y \cdot x$$

$$D) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{x^2+y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{Qx^2+y}$$

$$(Qx^2+y)dx = xdy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qx^2+y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot Q + \frac{y}{x}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = Qx \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{x}, q(x) = Qx$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot [C + \int Qx \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx] = x \cdot [C_2 + \int Qx \cdot e^{\ln x^{-1}} dx] =$$

$$= x \cdot (C_2 + Qx) \Rightarrow$$

$$y = x \cdot (C_2 + z) \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{y}{x} - z} ; \boxed{Q = \frac{z}{x}}$$

Опште решење: $F(\frac{z}{x}, \frac{y}{x} - z) = 0$

- Добијамо четири једначине:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{z}{x} = C_1 \\ 2) \frac{y}{x} - z = C_2 \\ 3) x + y = 2z \\ 4) x - z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1) z = \frac{1}{x} \rightarrow (1) \\ 2) \frac{1}{x} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = C_1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{C_1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{C_1}}} \\ 3) \boxed{z = \sqrt{C_1}} \\ 4) \frac{1}{\sqrt{C_1}} + y = 2\sqrt{C_1} \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{C_1} - \frac{1}{\sqrt{C_1}}} \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\frac{2C_1-1}{\sqrt{C_1}}}{\frac{1}{\sqrt{C_1}}} - \sqrt{C_1} = C_2 \Rightarrow \boxed{2C_1 - 1 - \sqrt{C_1} = C_2}$$

$$\boxed{2 \cdot \frac{z}{x} - 1 - \sqrt{\frac{z}{x}} = \frac{y}{x} - z}$$

↓ 17.04.2002. - Испитни

84) $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$ (*)
 крива: $\begin{cases} y = -2 \\ z = x - x^2 \end{cases}$ Сређити ову имитралну површ
 парцирне диф ј-не (*) која содржи
 криву.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}$$

$$1) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x + C = \ln y \Rightarrow \ln(\frac{x}{y}) = -C \mid e$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = e^{-C} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = C_1} \Rightarrow \underline{y = C_1 \cdot x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - x^2 - G^2 \cdot x^2}$$

$$(z - x^2 - G^2 \cdot x^2) \cdot dx = x dz$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - x^2 - G^2 \cdot x^2}{x}$$

$$z' = \frac{z}{x} - x - G^2 x$$

$$z' - \frac{1}{x}z = -x(1+G^2) \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{x}; q(x) = -x(1+G^2)$$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot [C_2 - \int x(1+G^2) \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx] =$$

$$= x \cdot [C_2 - \int (1+G^2) dx] = x \cdot (C_2 - x - G^2 x)$$

$$z = C_2 x - x^2 - G^2 x^2$$

$$z = C_2 x - x^2 \cdot (1+G^2) \Rightarrow C_2 = \frac{z}{x} + x \cdot (1+G^2)$$

$$\boxed{C_2 = \frac{z}{x} + x + \frac{y^2}{x}}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ ЖЕ: $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} + x + \frac{y^2}{x}\right) = 0$

Добивамо четири Ж-НЕ:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{y}{x} = G \\ 2) \frac{z}{x} + x + \frac{y^2}{x} = C_2 \\ 3) y = -2 \\ 4) z = x - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X = \frac{y}{G} \Rightarrow \boxed{X = -\frac{2}{G}} \quad \boxed{y = -2} \\ z = -\frac{2}{G} - \frac{4}{G^2} \Rightarrow \\ \boxed{z = -\frac{2G+4}{G^2}} \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{2G+4}{G^2} - \frac{2}{G} - \frac{4}{G} = C_2$$

$$\frac{G+2}{G} - \frac{2}{G} - 2G = C_2$$

$$\boxed{1-2G = C_2}$$

$$1-2\frac{y}{x} = \frac{z}{x} + x + \frac{y^2}{x} \quad / \cdot x$$

$$\boxed{x-2y = z + x^2 + y^2}$$

05.02.2004

85 Найти частные решения гур. ф-ке $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}} \quad - \text{Метод вариации!}$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \quad - \text{характ. ф-ция}$$

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow \boxed{r_1 = -2}, \boxed{r_2 = -3}$$

$$y_1 = e^{-2x}; \quad y_2 = e^{-3x}$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x} \quad - \text{ХОМОГЕННОЕ РЕШЕНИЕ}$$

$$1) C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0$$

$$2) C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$y_1' = -2e^{-2x}$$

$$y_2' = -3e^{-3x}$$

$$1) C_1'(x) \cdot e^{-2x} + C_2'(x) \cdot e^{-3x} = 0$$

$$2) C_1'(x) \cdot (-2e^{-2x}) + C_2'(x) \cdot (-3e^{-3x}) = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$1) C_1'(x) \cdot e^{-2x} + C_2'(x) \cdot e^{-3x} = 0 \quad / \cdot 2$$

$$2) -2C_1'(x) \cdot e^{-2x} - 3C_2'(x) \cdot e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$1) 2C_1'(x) \cdot e^{-2x} + 2C_2'(x) \cdot e^{-3x} = 0$$

$$2) -2C_1'(x) \cdot e^{-2x} - 3C_2'(x) \cdot e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$-C_2'(x) \cdot e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}} \Rightarrow -C_2'(x) = \frac{\frac{1}{1+e^{2x}}}{e^{-3x}} \Rightarrow$$

$$-C_2'(x) = \frac{1}{e^{-3x} \cdot (1+e^{2x})} \Rightarrow \boxed{C_2'(x) = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}}$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx \quad \left(\begin{array}{l} 1+e^{2x} = t \Rightarrow e^{2x} = t-1 \quad / \cdot 1/2 \\ 2x = \ln(t-1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(t-1) \end{array} \right)$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{t-1}}$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{\frac{3}{2} \ln(t-1)}}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{t-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{\frac{3}{2} \ln(t-1)}}{t(t-1)} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{(t-1)^{\frac{3}{2}}}{t(t-1)} dt = -\frac{1}{2} \int t^{-1} \cdot (t-1)^{\frac{1}{2}} dt \quad \left(\begin{array}{ccc} m=-1 & a=-1 & p=\frac{1}{2} \\ b=1 & n=1 & \end{array} \right)$$

$$\text{СМЕНА: } p = \sqrt{-1+t} \Rightarrow p^2 = -1+t \Rightarrow t = p^2 + 1 \Rightarrow dt = 2p dp$$

$$C_2(p) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{p^2+1} \cdot p \cdot 2p dp = -\int \frac{p^2}{p^2+1} dp = -\int \frac{p^2+1-1}{p^2+1} dp =$$

$$= -\int dp + \int \frac{dp}{p^2+1} = -p + \arctg p + C$$

$$C_2(t) = -\sqrt{-1+t} + \arctg \sqrt{-1+t}$$

$$C_2(x) = -\sqrt{-1+1+e^{2x}} + \arctg \sqrt{-1+1+e^{2x}}$$

$$C_2(x) = -e^x + \arctg e^x$$

$$G'(x) \cdot e^{-2x} - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \cdot e^{-2x} = 0$$

$$G'(x) \cdot e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$G'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$G(x) = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \rightarrow \text{НА ИСТУ НАЧИН РАДУМО ОВАЈ ИНТЕГРАЛ И НАЈЕМО}$$

$$\boxed{G(x)}$$

Опште решење је:

$$y = G(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$$

$$y = G(x) \cdot e^{-2x} + (-e^x + \arctg e^x) \cdot e^{-2x}$$

20.09.2001 ✓
 Наћи опште решење диф. ј-не $x^2 y'' + x y' - \lambda y = 0$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Решити задатим граничним условима $x^2 y'' + x y' - \lambda y = 0$; $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

$$x^2 y'' + x y' - \lambda y = 0$$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}, a=1$$

$$y' = y_t' \cdot e^{-t}$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t') + e^t \cdot e^{-t} \cdot y_t' - \lambda y = 0$$

$$y_{tt}' - \lambda y = 0$$

$$r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = \lambda \Rightarrow r_{1/2} = \pm \sqrt{\lambda}$$

Постоје три случаја:

II) $\lambda > 0$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}, r_2 = -\sqrt{\lambda}$$

$$y_1 = e^{\sqrt{\lambda}t}, y_2 = e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot x^{\sqrt{\lambda}} + C_2 \cdot x^{-\sqrt{\lambda}}$$

- хомогено и опште решење

III) $\lambda = 0$

$$\Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0, k = 2$$

$$y_1 = 1, y_2 = t$$

$$y_h = C_1 + C_2 t$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 \ln x$$

- хомогено и опште решење

IV) $\lambda < 0$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} = \pm \sqrt{(-1)} = \pm i \cdot \sqrt{1} \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$y_1 = \cos \sqrt{\lambda} t, y_2 = \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$y_h = C_1 \cos \sqrt{\lambda} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda} t$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \ln |x| + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \ln |x|$$

- хомогено и опште решење

Гранични проблем:

I) $\lambda > 0$: $y(1) = 0, y(e) = 0, y_h = C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}$

$$y(1) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y(e) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$1) C_1 + C_2 = 0$$

$$2) C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} \neq 0, \text{ па може да се } C_1 = 0 \wedge C_2 = 0 \Rightarrow \text{Постоји само тривијално решење } y = 0$$

II) $\lambda = 0$: $y_h = C_1 + C_2 \ln x, y(1) = 0, y(e) = 0$

$$y(1) = C_1 = 0$$

$$y(e) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Једини решења су } C_1 = 0, C_2 = 0$$

$$\text{тривијално решење } y = 0$$

III) $\lambda < 0$: $y_h = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \ln |x| + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \ln |x|, y(1) = 0, y(e) = 0$

$$y(1) = C_1 = 0$$

$$y(e) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} 1) a = 0 \\ 2) a \cos \sqrt{\lambda} + c_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{aligned} \right\} c_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

Жако ширинимо нешквиролно решења: $c_2 \neq 0$

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad \sin k\pi = 0$$

$$\sin \sqrt{\lambda} = \sin k\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = k\pi$$

$$-\lambda = k^2 \pi^2$$

$$\boxed{\lambda_n = -k^2 \pi^2} \text{ - сопствене вредности,}$$

а сопствене ф-је су:

$$\boxed{y_n = C_n \sin k\pi \cdot \cos(x)} \text{, за } \lambda < 0$$

06.07.2001

II

37) Показати да се сменом $\sin x = e^t$ диференцу ј-ма

$$\sin^2 x \cdot y'' + \tan x \cdot y' - \cos^2 x \cdot y = \cos^2 x \ln(\sin x)$$

своди на диференцијалну једначину са постојаним коефицијентима и одредити немо опште решење.

$$\sin^2 x \cdot y'' + \tan x \cdot y' - \cos^2 x \cdot y = \cos^2 x \ln(\sin x)$$

$$\sin x = e^t$$

$$x = \arcsin e^t$$

$$\sin x = e^t \quad | \ln$$

$$\ln \sin x = t \Rightarrow dt = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y'_t \cdot \frac{\cos \arcsin e^t}{e^t} \Rightarrow \boxed{y' = y'_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(y'_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t} \right) \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t}$$

$$= \left(y''_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t} + y'_t \cdot \frac{-\frac{2e^{2t}}{2\sqrt{1-e^{2t}}} \cdot e^t \cdot \sqrt{1-e^{2t}} \cdot e^t}{e^{2t}} \right) \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t}$$

$$= \left(y''_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t} - y'_t \cdot \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} - y'_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t} \right) \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t}$$

$$\boxed{y'' = y''_t \cdot \frac{1-e^{2t}}{e^{2t}} - y'_t - y'_t \cdot \frac{1-e^{2t}}{e^{2t}}} \quad - y'_t - y'_t \cdot \left(\frac{1}{e^{2t}} - \frac{e^{2t}}{e^{2t}} \right) = - y'_t - y'_t \cdot \left(\frac{1}{e^{2t}} - \frac{e^{2t}}{e^{2t}} \right) = - y'_t - y'_t \cdot \left(\frac{1}{e^{2t}} - \frac{e^{2t}}{e^{2t}} \right)$$

$$(1-e^{2t}) y''_t - e^{2t} y'_t - y'_t + e^{2t} y'_t + \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}} \cdot y'_t \cdot \frac{\sqrt{1-e^{2t}}}{e^t} = y(1-e^{2t}) = (1-e^{2t}) y$$

$$\boxed{y''_t - y = t}$$

$$y'' - y = t$$

$$r^2 - 1 = 0 \text{ - каракт. једн.}$$

$$r^2 = 1 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$$

$$y_1 = e^t; y_2 = e^{-t}$$

$$y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-t}, t = \ln \sin x$$

$$y = C_1 \cdot e^{\ln \sin x} + C_2 \cdot e^{\ln \sin x^{-1}}$$

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \sin^{-1} x \text{ - хомогено решење}$$

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= t \\ f(t) &= e^{At} \cdot P(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{користе карактеристичну нулу} \\ &\lambda = 0, Q(t) = At + B \end{aligned}$$

$$y_p = At + B$$

$$y_p' - y_p = t$$

$$y_p' = A, y_p'' = 0$$

$$0 \cdot At + B = t$$

$$-A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y_p = -t \Rightarrow y_p = -\ln \sin x \text{ - партикуларно решење}$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \sin^{-1} x - \ln \sin x \text{ - опште решење}$$

14.07.2000 II

28. Наћи решење система диф ј-но

$$y' + z = 1$$

$$x^2 z' + 2y = x^2 \ln x$$

које задовољава услове $y(1) = 0$ и $z(1) = 0$.

$$(1) y' + z = 1$$

\Rightarrow Област дефинисаности:

$$(2) x^2 z' + 2y = x^2 \ln x$$

$D_f \in (0, +\infty)$ за x

$$(1) z = 1 - y' \Rightarrow z' = -y''$$

$$\rightarrow (2) x^2 \cdot y'' + 2y = x^2 \ln x \text{ - Озлер}$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$y' = e^{-t} \cdot y_t'$$

$$y' = e^{-2t} \cdot (y_{tt}'' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_{tt}'' - y_t') + 2y = e^{2t} \cdot t$$

$$-y_{tt}'' + y_t' + 2y = e^{2t} \cdot t \quad (*)$$

$$r^2 + r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Rightarrow$$

$$r_1 = 2; \quad r_2 = -1$$

$$y_1 = e^{2t}; \quad y_2 = e^{-t}$$

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \Rightarrow y_h = C_1 x^2 + C_2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{2t} \cdot t \\ y_2 &= e^{2t} \cdot Q(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\nearrow \text{КАРАКТЕРИСТИЧНА ИЗЛА (=Y_k), k=1} \\ &\boxed{\lambda=2}; \quad Q(t) = At + B \end{aligned}$$

$$= t \cdot e^{2t} \cdot (At + B)$$

$$= e^{2t} \cdot (At^2 + Bt)$$

$$= 2e^{2t} \cdot (At^2 + Bt) + e^{2t} \cdot (2At + B) \Rightarrow y_p' = e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + B)$$

$$= 2e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + B) + e^{2t} \cdot (4At + 2B + 2A)$$

$$y_p'' = e^{2t} \cdot (4At^2 + 4Bt + 8At + 4B + 2A)$$

$$(4At^2 + 4Bt + 8At + 4B + 2A) + e^{2t} \cdot (2At^2 + 2Bt + 2At + B) + 2e^{2t} \cdot (At^2 + Bt) = e^{2t} \cdot t$$

$$-4Bt - 8At - 4B - 2A + 2At^2 + 2Bt + 2At + B + 2At^2 + 2Bt = t$$

$$= 1 \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{1}{6} \\ B &= \frac{1}{9} \end{aligned} \right.$$

$$3B = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3} - 3B &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$e^{2t} \cdot (-\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{9}t) \Rightarrow y_p = x^2 \cdot (-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x)$$

$$C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot (-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x) \quad - \text{ОРИГНАЛ ПОВЕДЕНИЕ}$$

$$z(x) = 1 - y' \quad ; \quad y = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot \frac{1}{x^2} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x\right)$$

$$y' = 2C_1 x - C_2 \cdot \frac{1}{x^3} + 2x \cdot \left(-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$z(x) = 1 - 2C_1 x + C_2 \cdot \frac{1}{x^3} - 2x \cdot \left(-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x\right) - \frac{1}{3} \ln x \cdot x + \frac{1}{9} x$$

Услову:

$$y(1) = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ 1 - 2C_1 + C_2 + \frac{1}{9} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_2 &= -C_1 \\ 1 - 2C_1 - C_1 + \frac{1}{9} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -3C_1 &= -\frac{10}{9} \\ C_1 &= -\frac{10}{27} \\ C_2 &= \frac{10}{27} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{10}{27} \cdot x^2 - \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^2} + x^2 \ln x \left(-\frac{1}{6} \ln x + \frac{1}{9}\right)$$

$$z = 1 + \frac{20}{27} x + \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \left(-\frac{1}{6} \ln^2 x + \frac{1}{9} \ln x\right) - \frac{1}{3} \ln x \cdot x + \frac{1}{9} x$$

03.10.2000

Решить граничную задачу:

$$x^2 y'' + (1 - 2\lambda)x y' + 2\lambda^2 y = 0$$

$$y'(1) + \lambda y(1) = 0$$

$$e^x y'(e^x) + \lambda y(e^x) = 0$$

где λ — реальный параметр.

$$x^2 y'' + (1 - 2\lambda)x y' + 2\lambda^2 y = 0$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x, \quad x \in D_f = (0, +\infty)$$

$$y' = e^{-t} \cdot y_t'$$

$$y'' = e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_{tt}' - y_t') + (1 - 2\lambda) \cdot e^t \cdot e^{-t} \cdot y_t' + 2\lambda^2 y = 0$$

$$y_{tt}' - 2\lambda y_t' + 2\lambda^2 y = 0$$

$$r^2 - 2\lambda r + 2\lambda^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda^2}}{2} = \frac{2\lambda \pm 2\sqrt{-\lambda^2}}{2} \Rightarrow \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 \cdot (-1)} \Rightarrow$$

$$r_1 = \lambda + \lambda i$$

$$r_2 = \lambda - \lambda i$$

Услови:

$$x=1 \Rightarrow t=\ln 1 \Rightarrow t=0$$

$$y'(1) + \lambda y(1) = 0$$

$$y'(0) \cdot e^{-0} + \lambda y(0) = 0$$

$$y'(0) + \lambda y(0) = 0$$

$$x=e^{\pi} \Rightarrow t=\ln e^{\pi} \Rightarrow t=\pi$$

$$e^{\pi} \cdot y'(e^{\pi}) + \lambda y(e^{\pi}) = 0$$

$$e^{\pi} \cdot e^{\pi} \cdot y'(\pi) + \lambda y(\pi) = 0$$

$$y'(\pi) + \lambda y(\pi) = 0$$

I) $\lambda = 0$

$$r_1 = 0; r_2 = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = t$$

$$y = C_1 + C_2 \cdot t \Rightarrow y' = C_2$$

$$\text{Услови: } \left. \begin{aligned} y'(0) + \lambda y(0) &= 0 \\ y'(\pi) + \lambda y(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_2 + 0 &= 0 \\ C_2 + 0 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow C_2 = 0$$

$\lambda_0 = 0$ - собственное решение

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= C_0 \\ y_0(x) &= C_0 \end{aligned} \right\} \text{собственное решение}$$

$y_0 = 1$ - собственная функция

II) $\lambda \neq 0$

$$r_1 = \lambda + \lambda i; r_2 = \lambda - \lambda i \Rightarrow \alpha = \lambda; \beta = \lambda$$

$$y_1 = e^{\lambda t} \cdot \cos \lambda t; y_2 = e^{\lambda t} \cdot \sin \lambda t$$

$$y = C_1 e^{\lambda t} \cdot \cos \lambda t + C_2 e^{\lambda t} \cdot \sin \lambda t \quad (*)$$

$$y = e^{\lambda t} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t)$$

$$y' = \lambda e^{\lambda t} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) + e^{\lambda t} \cdot (-C_1 \sin \lambda t \cdot \lambda + C_2 \cos \lambda t \cdot \lambda)$$

$$y' = e^{\lambda t} [\lambda (C_1 + C_2) \cos \lambda t + (C_2 - C_1) \lambda \sin \lambda t]$$

Услови:

$$\left. \begin{aligned} y'(0) + \lambda y(0) &= 0 \\ y'(\pi) + \lambda y(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda (C_1 + C_2) + \lambda C_1 &= 0 \\ e^{\lambda \pi} [\lambda (C_1 + C_2) \cos \lambda \pi + (C_2 - C_1) \lambda \sin \lambda \pi] + \lambda e^{\lambda \pi} (C_1 \cos \lambda \pi + C_2 \sin \lambda \pi) &= 0 \end{aligned}$$

$$2\lambda C_1 + \lambda C_2 = 0 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 0$$

$$e^{\lambda \pi} [\lambda (2C_1 + C_2) \cos \lambda \pi + \lambda (2C_2 - C_1) \sin \lambda \pi] = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 \cos 2\pi - \sin 2\pi & \cos 2\pi + 2 \sin 2\pi \end{vmatrix} = 2 \cos 2\pi + 4 \sin 2\pi - 2 \cos 2\pi + \sin 2\pi = 5 \sin 2\pi = 0$$

$$\sin 2\lambda = 0 \quad \sin \lambda \cos \lambda = 0$$

$$\sin 2\lambda = \sin \lambda \cos \lambda$$

$$\boxed{\lambda_k = k}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} - \text{СОПСТВЕНА ВРЕДНОСТ}$$

$C_2 = -2C_1$ - Како што заменимо y \oplus добивамо:

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} \cdot [C_1 \cos \lambda_k t - 2C_1 \sin \lambda_k t]$$

$$\boxed{y_k(t) = e^{\lambda_k t} \cdot C_k \cdot (\cos \lambda_k t - 2 \sin \lambda_k t)}$$

$$\boxed{y_k(x) = x^k \cdot C_k [\cos(k \ln x) - 2 \sin(k \ln x)]}; \quad C_k \in \mathbb{R} - \text{СОПСТВЕНА РЕШЕЊА}$$

$$\boxed{y_k(x) = x^k (\cos(k \ln x) - 2 \sin(k \ln x))} - \text{СОПСТВЕНЕ Ф-ЈЕ (без } C_k)$$

30.08.2000.

-31.05.2003-

☐ Напишете решење система диференцијалних

$$xy' = y - z$$

$$xz' = y + \lambda z$$

y зависности од вредности реалног параметра λ , где су $y = y(x)$ и $z = z(x)$ непознате ф-је аргумената x .

$$\begin{cases} (1) \quad xy' = y - z \\ (2) \quad xz' = y + \lambda z \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = y - xy' \Rightarrow z' = y' - y' - xy'' \Rightarrow \boxed{z' = -xy''} \\ -x^2 y'' = y + \lambda y - 2xy' \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -x^2 y'' + 2xy' - (1+\lambda)y = 0 \quad (*)$$

$$\boxed{x^2 y'' - 2xy' + (1+\lambda)y = 0} - \text{ОДЛЕР}$$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$y' = e^{-t} \cdot y_t' \quad ; \quad y'' = e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t')$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y_{tt}'' - y_t') - 2e^t \cdot e^{-t} \cdot y_t' + (1+\lambda)y = 0$$

$$y_{tt}'' - y_t' - 2y_t' + (1+\lambda)y = 0$$

$$y_{tt}'' - (1+\lambda)y_t' + (1+\lambda)y = 0$$

$$r^2 - (1+\lambda)r + (1+\lambda) = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{1+\lambda \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4(1+\lambda)}}{2} = \frac{1+\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2} = \frac{1+\lambda \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$$

$$\ddot{z} = y - x y'$$

$$= C_1 |x|^\eta + C_2 |x|^\eta - x \cdot C_1 \cdot \eta |x|^{\eta-1} - C_2 \cdot \eta |x|^{\eta-1}, \quad x > 0$$

$$= C_1 |x|^\eta + C_2 |x|^\eta - C_1 \eta |x|^{\eta-1} - C_2 \eta |x|^{\eta-1}, \quad x > 0 \rightarrow x = |x|$$

$$= C_1 (1 - \eta) \cdot |x|^\eta + C_2 (1 - \eta) \cdot |x|^\eta, \quad x < 0 \rightarrow x = -|x|$$

Односно:

$$= C_1 (1 - \eta) \cdot x^\eta + C_2 (1 - \eta) \cdot x^\eta, \quad x > 0$$

$$= -C_1 (1 - \eta) x^\eta - C_2 (1 - \eta) \cdot x^\eta, \quad x < 0$$

$$-1 < \lambda < 3$$

$$r_{1/2} = \frac{4\lambda \sqrt{(1-\lambda)(3-\lambda)}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1+\lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{(1+\lambda)(3-\lambda)}}{2} \Rightarrow \alpha \pm i\beta$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

$$y = e^{\alpha x} \cdot [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$$

$$y = |x|^\alpha \cdot [C_1 \cos(\beta \ln |x|) + C_2 \sin(\beta \ln |x|)]$$

$$y' = \pm \alpha |x|^{\alpha-1} \cdot [C_1 \cos(\beta \ln |x|) + C_2 \sin(\beta \ln |x|)] + \beta \frac{1 \cdot |x|^\alpha}{x} \cdot [-C_1 \sin(\beta \ln |x|) + C_2 \cos(\beta \ln |x|)]$$

$$\ddot{z} = y - x y' = |x|^\alpha \cdot \{ [C_1 (1 - \alpha) - C_2 \beta] \cos(\beta \ln |x|) + [C_2 (1 - \alpha) + C_1 \beta] \sin(\beta \ln |x|) \}$$

- KPAJ -

- 31.05. 2003. -

E. Jovanović

$$r_1 = \frac{1+\lambda + \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1+\lambda - \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$$

$$x) \lambda = -1$$

$$r_1 = 0; r_2 = 0, \quad \kappa = 2$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = t$$

$$y_k = C_1 + C_2 t \Rightarrow \boxed{y = C_1 + C_2 \ln x} \quad - \text{ОПИТЕ РЕШЕНИЕ} = \text{ХОДЯЩЕГО}$$

$$z = y - x \cdot y', \quad y' = C_2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$z = C_1 + C_2 \ln x - x \cdot C_2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boxed{z = C_1 + C_2 (\ln x - 1)}$$

$$II) \lambda = 3$$

$$r_1 = 2; r_2 = 2, \quad \kappa = 2, \quad t = \ln|x|$$

$$y_1 = e^{2t}, \quad y_2 = t \cdot e^{2t}$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 t \cdot e^{2t} \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln|x| \Rightarrow$$

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 \ln|x|) \cdot x^2}$$

$$y' = C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 + (C_1 + C_2 \ln|x|) \cdot 2x = C_2 x + 2C_1 x + 2C_2 x \ln|x|$$

$$y' = (2C_1 + C_2)x + 2C_2 x \ln|x|$$

$$z = (C_1 + C_2 \ln|x|) x^2 - x \cdot ((2C_1 + C_2)x + 2C_2 x \ln|x|)$$

$$= C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln|x| - 2C_1 x^2 - C_2 x^2 - 2C_2 x^2 \ln|x|$$

$$= -C_1 x^2 - C_2 x^2 - C_2 x^2 \ln|x|$$

$$z = [(-C_1 - C_2) - C_2 \ln|x|] \cdot x^2$$

$$\lambda < -1 \vee \lambda > 3 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$r_1 = \frac{1+\lambda + \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}, \quad r_2 = \frac{1+\lambda - \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$$

$$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t}$$

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad t = \ln|x|$$

$$\boxed{y = C_1 |x|^{r_1} + C_2 |x|^{r_2}}; \quad |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} C_1 r_1 |x|^{r_1-1} + C_2 r_2 |x|^{r_2-1}, & x > 0 \\ -C_1 r_1 |x|^{r_1-1} - C_2 r_2 |x|^{r_2-1}, & x < 0 \end{cases}$$

$$(|x|)' = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \textcircled{a}$$

39) Наћи опште решење система диф. ј-ва

$$t \cdot \dot{x} = -x + y + z$$

$$t \cdot \dot{y} = x - y + z$$

$$t \cdot \dot{z} = x + y + z$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad t \cdot \frac{dx}{dt} &= -x + y + z \\ (2) \quad t \cdot \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ (3) \quad t \cdot \frac{dz}{dt} &= x + y + z \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} + t \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \quad (\text{зубежимо смо (1) и (2)})$$

$$\rightarrow 2 \frac{dx}{dt} + t \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t} \cdot (x - y + z) + \frac{1}{t} (x + y + z) \quad | \cdot t$$

$$\rightarrow t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} = 2x + 2z \quad | \text{зубежимо. и (3)}$$

$$\rightarrow 2t \frac{d^2x}{dt^2} + t^2 \frac{d^3x}{dt^3} + 2 \frac{dx}{dt} + 2t \frac{d^2x}{dt^2} = 2 \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dz}{dt}$$

$$t^2 \frac{d^3x}{dt^3} + 4t \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t} \cdot (x + y + z) \quad | \cdot t$$

$$t^3 \frac{d^3x}{dt^3} + 4t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 2y + 2z$$

$$z = \frac{1}{2} \left(t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} - 2x \right)$$

$$y = t \frac{dx}{dt} + x - z = \frac{1}{2} \left(-t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4x \right)$$

$$t^3 \frac{d^3x}{dt^3} + 4t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2x = -t^3 \frac{d^3x}{dt^3} + 4x + t^2 \frac{d^3x}{dt^3} + 2t \frac{dx}{dt} - 2x$$

$$t^3 \frac{d^3x}{dt^3} + 4t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

$$t^3 x''' + 4t^2 x'' - 2t x' - 4x = 0 \quad - \text{Означ}$$

$$t = e^p \Rightarrow p = \ln t$$

$$x' = e^{-p} x_p', \quad x'' = e^{-2p} (x_{pp}'' - x_p'), \quad x''' = e^{-3p} (x_{ppp}''' - 3x_{pp}'' + 2x_p')$$

$$e^{3p} \cdot e^{-3p} (x_{ppp}''' - 3x_{pp}'' + 2x_p') + 4e^{2p} \cdot e^{-2p} (x_{pp}'' - x_p') - 2e^p \cdot e^{-p} x_p' - 4x = 0$$

$$x_{ppp}''' - 3x_{pp}'' + 2x_p' + 4x_{pp}'' - 4x_p' - 2x_p' - 4x = 0$$

$$x_{ppp}''' + x_{pp}'' - 4x_p' - 4x = 0$$

$$r^2 + r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow (r+1) \cdot (r-2) = 0$$

1	1	-4	-4
-1	1	0	0

$$(r+1)(r-2)(r+2) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = -2$$

$$y_1 = e^{-p}; y_2 = e^{2p}; y_3 = e^{-2p}$$

$$x = C_1 \cdot e^{-p} + C_2 e^{2p} + C_3 \cdot e^{-2p}$$

$$x = C_1 \cdot \frac{1}{t} + C_2 t^2 + C_3 \frac{1}{t^2}$$

$$y = \frac{1}{2}(-t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 4x)$$

$$\leftarrow \frac{dx}{dt} = -C_1 \frac{1}{t^2} + 2C_2 t - C_3 \frac{2}{t^3}$$

$$z = \frac{1}{2}(t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} - 2x)$$

$$\leftarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = C_1 \frac{2}{t^3} + 2C_2 + C_3 \frac{6}{t^4}$$

$$y = \frac{C_1}{t} + C_2 t^2 - \frac{C_3}{t^2}$$

$$z = -\frac{C_1}{t} + 2C_2 t^2$$

05.02.2003.

92) Показати да се диференцијална ј-на $y'' - y' + ay e^{2x} = e^{2x} \cos e^x$ своди на линеарну диф. ј-ну другог реда са константним коефицијентима. Због тога наћи опште решење дате диф. ј-не у зависности од параметра a .

$$y'' - y' + ay e^{2x} = e^{2x} \cos e^x$$

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{dx} = t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot t \Rightarrow \boxed{y' = y'_t \cdot t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(y'_t \cdot t) \cdot t = (y''_t t + y'_t) \cdot t \Rightarrow \boxed{y'' = y''_t t^2 + y'_t \cdot t}$$

$$t^2 y''_t + t y'_t - t y'_t + at^2 y = t^2 \cos t$$

$$t^2 y''_t + at^2 y = t^2 \cos t$$

$$\boxed{y''_t + ay = \cos t}$$

$$r^2 + a = 0 - \text{карактеристична ј-на}$$

$$r^2 = -a \Rightarrow r_1 = \sqrt{-a}, r_2 = -\sqrt{-a}$$

$$2) a < 0$$

$$r_1 = \sqrt{-a}, r_2 = -\sqrt{-a}, \kappa = 1$$

$$y_1 = e^{\sqrt{-a}t}, y_2 = e^{-\sqrt{-a}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{-a}t} + C_2 e^{-\sqrt{-a}t}$$

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{-a}e^x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}e^x}$$

Пошто t није решење карактеристичне јне, тривијално партикуларно решење ове нехомогене једначине у облику

$$y_p = A \cos t + B \sin t, \text{ где је } \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y_p'' + a y_p = \cos t$$

$$y_p' = -A \sin t + B \cos t$$

$$y_p'' = -A \cos t - B \sin t$$

$$-A \cos t - B \sin t - A a \sin t + B a \cos t = \cos t$$

$$(-A + B a) \cos t + (-B - A a) \sin t = \cos t$$

$$\begin{cases} -A + B a = 1 \\ -B - A a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A = 1 - B a \\ -B - (1 - B a) a = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = B a - 1}$$

$$\begin{cases} -B - (B a - 1) a = 0 \end{cases} \Rightarrow -B - B a^2 + a = 0$$

$$-B - B a^2 + a = 0$$

$$B \cdot (-1 - a^2) + a = 0$$

$$B \cdot (-1 - a^2) = -a \quad / : (-1 - a^2)$$

$$\boxed{B = \frac{a}{1 + a^2}} \Rightarrow A = \frac{a^2}{1 + a^2} - 1 = \frac{a^2 - 1 - a^2}{1 + a^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{1 + a^2}}$$

$$y_p = -\frac{1}{1 + a^2} \cos t + \frac{a}{1 + a^2} \sin t$$

$$y_p = \frac{1}{1 + a^2} (a \sin e^x - \cos e^x)$$

$$\boxed{y = C_1 e^{\sqrt{-a}e^x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}e^x} + \frac{1}{1 + a^2} (a \sin e^x - \cos e^x)} - \text{опште решење}$$

$$II) a=0$$

$$r_1=0, r_2=0$$

$$y_1=1, y_2=t$$

$$y_h = C_1 + C_2 \cdot t$$

$$y_h = C_1 + C_2 \cdot e^x$$

y_p - JE ISTO KAO KOD $a < 0$

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^x + \frac{1}{1+a^2} (a \cdot \sin e^x - \cos e^x) - \text{опште решење}$$

$$III) a > 0$$

$$r_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow r_1 = \sqrt{a} \cdot i ; r_2 = -\sqrt{a} \cdot i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \sqrt{a}$$

$$y_1 = \cos \sqrt{a} t ; y_2 = \sin \sqrt{a} t$$

$$y_h = C_1 \cos \sqrt{a} e^x + C_2 \sin \sqrt{a} e^x$$

$\alpha + \beta i$ - нуле карактерист. и
(зр $\beta = \beta$)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \cos t \\ f(x) &= e^{xt} \cdot [A \cdot \cos st + B \sin st] \end{aligned} \right\} \alpha = 0, \beta = 1, p(t) = 1, q(t) = A$$

$y_p = A \cdot \cos st + B \sin st \rightarrow$ ипо партикуларно решење као претходн. случај

$$y = C_1 \cos \sqrt{a} e^x + C_2 \sin \sqrt{a} e^x + \frac{1}{1+a^2} (a \cdot \sin e^x - \cos e^x) - \text{опште решење}$$

26.06.2002

93) Наћи опште решење дифер. ј-не $(x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 3x$ знајући да одговарајућа хомогена ј-на има партикуларни интеграл у облику полинома. $P_n(x) \in \mathbb{N}$

Из услова: једнотина $(x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ или једно партикуларно решење у облику полинома

$$y_1 = x^n ; y_1' = nx^{n-1} ; y_1'' = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots$$

$$(x^2+1)y_1'' + 2xy_1' - 2y_1 = 0$$

$$(x^2+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + 2x \cdot nx^{n-1} - 2x^n = 0$$

$$(n^2-n) \cdot (x^n + x^{n-2}) + 2nx^{n-1} - 2x^n = 0$$

$$x^n [$$

$$n^2 x^n + n^2 x^{n-2} - n x^n - n x^{n-2} + 2n x^n - 2x^n = 0$$

$$x^n \cdot (n^2 - n + 2n - 2) + x^{n-2} \cdot (n^2 - n + \dots) + x^{n-1} + \dots = 0$$

$$n^2 + n - 2 = 0 \wedge n(n-1) = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$n = -2 \wedge n = 1$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$n = 1$$

$$y_1 = x + a, \quad y_1' = 1, \quad y_1'' = 0$$

$$2x - 2x - 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$y_1 = x$$

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' - \frac{2}{x^2+1} y = 0$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1|$$

$$y_2 = x \cdot \int \frac{e^{(x^2+1)^{-1}}}{x^2} dx = x \cdot \int \frac{1}{\frac{x^2}{x^2+1}} dx = x \int \frac{dx}{x^2 \cdot (x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot (x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow 1 = (Ax+B) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot x^2$$

$$Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2 = 1$$

$$(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A=0 \Rightarrow C=0 \\ B=1 \Rightarrow D=-1 \end{array} \right\} \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - \arctan x$$

$$y_2 = -1 - x \arctan x \Rightarrow y_h = C_1 x + C_2 \cdot (1 + x \arctan x)$$

$$f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f(x)}{w} \cdot y_2 dx + y_2 \int \frac{f(x)}{w} \cdot y_1 dx$$

$$\text{Ige je: } f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \quad w = \begin{vmatrix} x & -1 - x \arctan x \\ 1 & \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \end{vmatrix}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p \quad - \text{ONITE PEWEKE}$$

29) Наћи опште решење диференц. ј-не

$$x \cdot y'' - (x+2) y' + y = x^2,$$

ако се зна да одговарајућа хомогена линеарно диф. ј-на има једно партикуларно решење у облику полинома:

$$x \cdot y'' - (x+2) y' + y = x^2 \quad | : x$$

$$y'' - (1 + \frac{2}{x}) y' + \frac{1}{x} y = x$$

$$\Rightarrow p(x) = -(1 + \frac{2}{x}), \quad q(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = x$$

Из услова \Rightarrow одговарајућа хомогена диф. ј-на: $x \cdot y'' - (x+2) y' + y = 0$ има једно партикуларно решење у облику полинома:

$$y = x^n + \dots, \quad y' = n \cdot x^{n-1} + \dots, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

$$x \cdot [n(n-1)x^{n-2} + \dots] - (x+2) \cdot [n \cdot x^{n-1} + \dots] + [x^n + \dots] = 0$$

$$x^n \cdot [-n+1] + x^{n-1} \cdot [n \cdot (n-1) - 2n + \dots] + \dots = 0$$

ОБЈАВЉЕНО

72-1

Дакле степен полинома је $n=1$. Из услова да $y_1 = x+0$

($y_1' = 1, y_1'' = 0$) буде решење одговарајуће хомогене диф. ј-не,

добива се $a=2$. Према томе $y_1 = x+2$ је једно партикул.

решење хомогене диф. ј-не.

$$-x-2+x+a=0 \Rightarrow a=2$$

Друго партикуларно решење (које је линеарно независно од првог) добијемо по формули:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx = (x+2) \cdot \int \frac{e^{\int (1+\frac{2}{x}) dx}}{(x+2)^2} dx \dots$$

$$y_2 = (x-2)e^x$$

$$y_h = C_1(x+2) + C_2(x-2)e^x$$

Партикуларно решење нехомогене диф. ј-не добија се по формули:

$$y_p = y_1 \int \frac{f(x)}{W} \cdot y_2 dx + y_2 \int \frac{f(x)}{W} \cdot y_1 dx, \quad \text{где је } W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x+2 & (x-2)e^x \\ 1 & (x-1)e^x \end{vmatrix} = x'e^x$$

$$\Rightarrow y_p = -(x+2) \int \frac{x-2}{x} dx + (x-2)e^x \int \frac{x+2}{x} e^{-x} dx =$$

$$= -(x+2)(x - \ln x^2) + (x-2)e^x(-e^{-x} + 2 \int \frac{e^{-x}}{x} dx)$$

$$y_p = -x^2 - 3x + 2 + (x-2)\ln x^2 + 2(x-2)e^x \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$y = y_h + y_p \quad - \text{опште решење}$$

05.07.1991. = 09.04.2003.

25. Одредити функцију y тако да се сменом $y = g(x) \cdot z$ ($z = z(x)$) је нова независна ф-ја диференцијална једначина:

$$xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = e^x$$

Овде на диференцијалну једначину y којој се не користи z , а самим тим и опште решење добијене и постане једначине.

Сменом: $y = g(x) \cdot z$ ($z = z(x)$), $y' = g'(x) \cdot z + g(x) \cdot z'$

$$y'' = g''(x) \cdot z + 2g'(x) \cdot z' + g(x) \cdot z'',$$

диференцијална ј-на: $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = e^x$ своди се на:

$$x \cdot g(x) z'' + 2 \cdot [xg'(x) + (x-1)g(x)] z' + [xg''(x) - 2(x-1)g'(x) + (x-2)g(x)] z = e^x.$$

Из тога да не постоји z' :

$$xg'(x) + (x-1)g(x) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

$a_n, (n \in \mathbb{N})$ - КОЕФИЦИЈЕНТ

РАВНОМЕРНА \equiv УНИФОРМНА

НЕАБСОЛУТНА \equiv УСЛОВНА

R - ПОЛУПРЕЧНИК КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

- ПОЛУПРЕЧНИК КОНВЕРГЕНЦИЈЕ МОЖЕ ДА СЕ РАЧУНА НА ДВА НАЧИНА:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

или

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$x \in (-R, R), [R, R), (R, R], [R, R]$$

- ИНТЕРВАЛ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

- РЕД АБСОЛУТНО КОНВЕРГИРА ЗА $|x-a| < R$ \leftarrow НА СВАКОМ ПОДИНТЕРВАЛУ РЕД УНИФОРМНО КОНВЕРГИРА

- РЕД АБСОЛУТНО ДИВЕРГИРА ЗА $|x-a| > R$

1) Испитати конвергенцију реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

- Прво треба извршити полуергенцију:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{e}$$

- Дакле добио је $R = \frac{1}{e}$ односно где конвергира:

$$x = \frac{1}{e} \wedge x = -\frac{1}{e} \quad (\text{јер, } |x| = R)$$

II) За $x = \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$$

Дакле општи члан низа је сада:

$$a_n = \frac{1}{e^n}, \quad \text{ПРИМЕНИМО КОШИЈА:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{РЕД ЈЕ КОНВЕРГЕНТАН!}$$

III) За $x = -\frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{(-1)^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (-1)^n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$$

ОПШТИ ЧЛАН НИЗА ЈЕ САДА:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{e^n}$$

ИСПИТУЈЕМО КОНВ. РЕДА:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n}$$

I) ИСПИТУЈЕМО ПРВО АПСОЛ. КОНВ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{e^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \text{ - КОНВЕРГИРА АПСОЛУТНО (ЗНАМО ИЗ ПРЕТХ. СЛ.)}$$

II) УСЛОВНА КОНВ.

1) НЕОПХОДНИ УСЛОВ. КВ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0 \text{ - ИСПУЊЕН УСЛОВ}$$

2) $f'(x) < 0$ (?)

$$f(x) = \frac{1}{e^x}, f'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow \text{РЕД УСЛОВНО КВ ПО ЛАЈБЛ}$$

□ ИСПИТАТИ КОНВЕРГЕНЦИЈУ РЕДА:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n, a > 1$$

- ПРВО ТРАЖИМО ПОЛУПРЕЧНИК КОНВЕРГЕНЦИЈЕ:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}, a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1) \cdot n! \cdot a^{2n+1}}{a^{(n^2+2n+1)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{(n^2+2n+1)}}{(n+1) \cdot a^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

ЗАКЉУЧАК:

РЕД РАВНОМЕРНО И АПСОЛУТНО КОНВЕРГИРА!

2) Испитати конвергенцију реда:

$$\sum_1^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n$$

$x-2 = x+1 \Rightarrow a = -1$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3^n + (-2)^n]{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3^n \cdot (1 + (-\frac{2}{3})^n)]{n}}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

По формули:

$$\left. \begin{array}{l} |x-a| < R \quad \text{апс. кв.} \\ |x-a| > R \quad \text{апс. див.} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{3А } |x+1| < \frac{1}{3} \quad \text{апс. кв.} \\ \text{3А } |x+1| > \frac{1}{3} \quad \text{апс. див.} \end{array}$$

Постоје две могућности:

I) $x+1 = \frac{1}{3}$; II) $x+1 = -\frac{1}{3}$

I) 3А $x+1 = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n = \sum_1^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_1^{\infty} \frac{2^n (1 + (-\frac{2}{3})^n)}{n} \cdot \frac{1}{3^n} =$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{ред дивергира!}$$

II) 3А $x+1 = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n = \sum_1^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_1^{\infty} \frac{2^n (1 + (-\frac{2}{3})^n)}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} =$$

$$= \sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

I) апс. кв:

$$\sum_1^{\infty} |(-1)^n \cdot \frac{1}{n}| = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{ред апсолутно не конвергира}$$

II) условна кв.

1) Неопходни усл. кв.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (\text{задовољен})$$

2) $f(x) < 0$, ?

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{из (1) и (2)} \Rightarrow \text{ред условно кв. по Лајбниц}$$

4) ДАТ ЈЕ СТЕПЕНИ РЕД

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p+n} (x-1)^n, \quad p > 0$$

где је p РЕАЛАН ПАРАМЕТАР. ИСПИТАТИ КОНВЕРГЕНЦИЈУ РЕДА, А
ЗАТИМ, ЗА $p=2$ НАЈИ НЕГОВУ СУМУ $S(x)$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad a_n = \frac{p^n}{n^p+n}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^n}{n^p+n}}{\frac{p^{n+1}}{(n+1)^p+(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p^n}{p \cdot n}}{\frac{p^{n+1}}{p \cdot (n^p+n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p+(n+1)}{p \cdot (n^p+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p [1 + \frac{1}{n}]^p + (n+1)}{p \cdot n (n^{p-1} + 1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1} (1 + \frac{1}{n})^p + (1 + \frac{1}{n})}{p \cdot (n^{p-1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1} + 1}{n^{p-1} p + 1} = \begin{cases} \frac{1}{p}, & p \geq 1 \\ \frac{1}{p}, & p < 1 \end{cases}$$

$$x-1 = x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p+n} x^n, \quad p > 0$$

$$x \in (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}) \Rightarrow x-1 \in (-\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$$

ПА ЈЕ ИНТЕРВАЛ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ СТЕПЕНОГ РЕДА (АБСОЛУТНА И
УНИФОРМНА):

$$x \in (-\frac{1}{p}+1, \frac{1}{p}+1)$$

ИСПИТАЈМО КОНВЕРГЕНЦИЈУ НА КРАЈЕВИМА ИНТЕРВАЛА:

ЗА $x = \frac{1}{p}$, ОДНОСНО $x = \frac{1}{p}+1$

ДОВИЗАМО ВРОЗНИ РЕД:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p+n} \cdot \frac{1}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+n} \begin{cases} \text{КОНВЕРГИРА ЗА } p > 1 \\ \text{ДИВЕРГИРА ЗА } p \leq 1 \end{cases} \quad (p > 0)$$

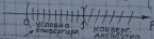
ЗА $x = -\frac{1}{p}$, ОДНОСНО $x = -\frac{1}{p}+1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p+n} \frac{(-1)^n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p+n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p+n}$$

I) ПРВО ИСПИТУЈЕМО АПС. КВ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n^p+n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{КОНВЕРГ. АПС. ЗА } p > 1 \\ \text{НЕ КОНВЕРГ. АПС. ЗА } p \leq 1 \end{cases}$$



II) УСЛОВНА КОНВЕРГЕНЦИЈА: (ЗА $0 < p \leq 1$)

1) НЕСП. ХЛ. КВ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p+n} = 0$ - ИСПУЏЕНО!

$$2) f(x) < 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^p + x}, \quad f'(x) = \frac{-px^{p-1} - 1}{(x^p + x)^2} = -\frac{px^{p-1} + 1}{(x^p + x)^2} < 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow из (1) и (2) \Rightarrow Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p + n}$ условно конверг. по Лазевицу за окр.

б) За $p=2$ нађимо суму $S(x)$:

Она постројен јер смо у претходној тачки показали да ред апсолутно равномерно конвергира за $p > 1$, а $2 > 1$

За $p=2$ ред поставе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n^2 + n} = S(x)$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n(n+1)}, \quad x = x-1$$

конвергира апсолутно и равномерно:

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$x \in \left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right], \text{ односно:}$$

$$x \in \left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{n(n+1)}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot x^{n-1} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} \cdot x^{n+1} \right) = f(x)$$

$$S'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \cdot 2x = \\ &= 2x \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n}_{\text{ГЕОМЕТРИЧ. РЕД}} = 2x \cdot \underbrace{\frac{1}{1-2x}}_{\text{СУМА ГЕОМЕТРИЧ. РЕДА}} = \frac{2x}{1-2x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{2x}{1-2x} dx = - \int_0^x \frac{1-2x-1}{1-2x} dx = - \int_0^x dx + \int_0^x \frac{dx}{1-2x} = -x \Big|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1-2x)}{1-2x} =$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln|1-2x|$$

$$S'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left[-x + \frac{1}{2} \ln|1-2x| \right] = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \ln|1-2x|$$

$$S(x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \ln|1-2t| \right) dt = - \int_0^x \frac{dt}{t} - \int_0^x \frac{\ln|1-2t|}{2t^2} dt = \dots$$

$$S(x) = \frac{1-2x}{2x} \ln|1-2x| \Big|_0^x = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x}{2x} \ln|1-2x| \right) = \frac{1-2x}{2x} \ln|1-2x| - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|1-2x|}{2x}$$

$$S(x) = \frac{1-2x}{2x} \cdot \ln|1-2x| - (-1) \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{1-2x}{2x} \ln|1-2x| + 1$$

5) Испитати конвергенцију степеног реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \cdot x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p}}{\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{(n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \cdot (n+1)^p}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}) \cdot n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1$$

$$[R=1] \Rightarrow x \in (1, 1)$$

Испитујемо кв на крајевима интервала:

$$\text{За } x=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \cdot 1$$

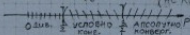
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} \begin{cases} \text{конвергира за } p-\frac{1}{2} > 1 \Rightarrow p > \frac{3}{2} \\ \text{дивергира за } p-\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow p < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{За } x=-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \cdot (-1)^n$$

I) Прво испитујемо апс. кв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{Апс. кв. за } p > \frac{3}{2} \\ \text{Не кв. апс. за } p < \frac{3}{2} \end{cases}$$



II) Условна конверг. за $p < \frac{3}{2}$

1) Неопходни услов конверг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} = 0 \text{ за } p > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{за } p < \frac{1}{2} \text{ ред дивергира}$$

2) $f(x) \downarrow$?

$$f(x) = \frac{\sqrt{n}}{n^p}, \quad f(x) = \frac{\frac{1}{2n} \cdot n^p \cdot \sqrt{n} \cdot p n^{p-1}}{n^{2p}} = \frac{\frac{1}{2} n^{p-\frac{1}{2}} \cdot p \cdot n^{p-\frac{1}{2}}}{n^{2p}} < 0 \Rightarrow$$

$f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow \Rightarrow$ из (1) и (2) ред условно кв. по Лейбниц

$$\text{за } \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$$

6) Испитати konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n^p \ln n} \cdot x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n^p \ln n} \cdot x^n \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot n^p \ln n} \cdot x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot n^p \ln n}}{\frac{1}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) \cdot (n+1)^p \ln(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) \cdot (n+1)^p \ln(n+1)}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot n^p \ln n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$$

Интервал konvergenције степеног реда је:

$$x \in (-1, 1)$$

Испитујемо konvergenciju на крајевима интервала:

$$\text{За } x=1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot n^p \ln n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}} \cdot \ln n} \quad \begin{matrix} \text{L'Hôpital} \\ \ln n > 1 \\ \frac{1}{n^2} < 1 \end{matrix}$$

$$\text{За } p = \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = (\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt) = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln t = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln \ln 2 = +\infty$$

\Rightarrow ред дивергира за $p = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{x^m \ln x}$$

$$\ln x \cdot \frac{dx}{x \ln x} = du \quad \frac{1}{x^{m-1}} = 10$$

$$\ln(\ln x) = u \quad (1-u) x^{1-m-1} dx = du$$

$$(1-u) \frac{1}{x^m}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{p+\frac{1}{2}} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-p-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-p-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{(\ln n)^{p+\frac{1}{2}} \ln(\ln n)}}{\frac{1}{(n+1)^{p+\frac{1}{2}} \ln(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{p+\frac{1}{2}} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$\ln(1+x)$$

$$\ln n = -\ln n^{-1} = -\ln \frac{1}{n}$$

7) У зависности од реалног параметра p испитати апсолутну и равномерну конвергенцију реда; а затим за $p=1$ наћи суму реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^p}, \quad x = x-1$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n \cdot n^p}}{\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n+1)^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n(1+\frac{1}{n}))^p}{n^p} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n^p \cdot (1+\frac{1}{n})^p}{n^p} = 2 \Rightarrow \boxed{R=2} \quad (-2, 2)$$

Ред апсолутно конвергира за $x \in (-2, 2)$, $x \in (-1, 3)$.

- Испитујемо конв. на крајевима интервала

1) За $x=2 \Rightarrow x=3$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{конвергира, } p > 1 \\ \text{дивергира, } p \leq 1 \end{cases}$$

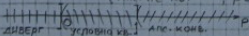
2) За $x=-2 \Rightarrow x=-1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n \cdot n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p} \right|$$

1) Прво испитујемо апс. кв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot \frac{1}{n^p}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{апсолутно кв., } p > 1 \\ \text{апс. не кв., } p \leq 1 \end{cases}$$



II) Условна конвергенција

1) Неопход. услов конверт.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \text{ за } p > 0 \Rightarrow \text{ за } p < 0, \text{ ред дивергира}$$

$$0 < p \leq 1$$

2) $f(x) \downarrow = ?$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} = -\frac{p x^{p-1}}{x^{2p}} < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow \Rightarrow \text{ из (1) и (2) } \Rightarrow \text{ ред условно конвергира по Лајбницу.}$$

за $p > 1$, $x \in [-1, 3]$ апсолутно и равномерно кв.

за $0 < p \leq 1$, $x \in [-1, 3]$ конвергира, на $(-1, 3)$ апс. конв., $[a, b] \subset (-1, 3)$ - равномерно конвергира

за $p \leq 0$, $x \in (-1, 3)$ апсолутно конв., на $[a, b] \subset (-1, 3)$ равномерно конверт.

за $p = 1$ добијамо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}, S(x) = ?$$

ВИДЕТИ ЕЛЕМЕНАРНЕ Ф-ЈЕ!

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^n}{n} = -\ln\left(1 - \frac{x-1}{2}\right) = \\ &= -\ln \frac{3-x}{2} = \ln 2 - \ln(3-x). \end{aligned}$$

- КРАЈ -

- ПЕТ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА -

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot (-1)^{n-1}$$

МОЊЕ И ОВАКО:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^n}{n} = S(x)$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}}{n} \Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$S'(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-x+1}{2}} = \frac{2}{3-x}$$

$$S(x) = 2 \int \frac{dx}{3-x} = -2 \int \frac{d(3-x)}{3-x} = -2 \ln|3-x|$$

а) Испитати у зависности од реалног параметра α апсолутну, неапсолутну и униформну конвергенцију степеног реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}} \cdot x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}}}{\frac{(n+1)^3}{(2n+3)^{\alpha}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(2n+3)^{\alpha}}{(2n+1)^{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{\alpha} = 1$$

$$\boxed{R=1}$$

\Rightarrow за $x \in (-1, 1)$ ред апсолутно конвергуира

- Испитујемо конвергенцију на крајевима интервала:

за $x=1$:

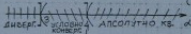
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-3}} = \begin{cases} \text{конвергуира, за } \alpha-3 > 1 \Rightarrow \alpha > 4 \\ \text{дивергуира, за } \alpha \leq 4 \end{cases}$$

за $x=-1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}}$$

I) Прво испитујемо апсолутну конв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)^{\alpha}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-3}} = \begin{cases} \text{апс. конв. за } \alpha \geq 4 \\ \text{не конверг. апс. за } \alpha < 4 \end{cases}$$



II) Условна конвергенција за $\alpha \leq 4$:

i) Неопходан услов конвергенције:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha-3}} = 0, \text{ за } \alpha-3 > 0 \Rightarrow \alpha > 3 \Rightarrow \text{за } \alpha \leq 3 \text{ ред дивергуира}$$

ii) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^{\alpha}}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^{\alpha}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 \cdot (2x+1)^{\alpha} - x^3 \cdot \alpha \cdot (2x+1)^{\alpha-1} \cdot 2}{(2x+1)^{2\alpha}} = \frac{(2x+1)^{\alpha-1}}{(2x+1)^{2\alpha}} \cdot (3x^3 \cdot (2x+1) - 2\alpha x^3) =$$

$$= \frac{1}{(2x+1)^{\alpha+1}} \cdot (6x^3 + 3x^2 - 2\alpha x^3) = \frac{1}{(2x+1)^{\alpha+1}} \cdot (2x^3 \cdot (3-\alpha) + 3x^2) < 0 \text{ за } \alpha > 3$$

\Rightarrow низ монотонно опада + (i) \Rightarrow Ред условно кв за $\alpha > 3$

за $x > 4$, $[-1, 1]$ равномерно и абсолютно конвергира

за $3 < x \leq 4$, $[-1, 1)$ конвергира, на $(-1, 1)$ абсолютно конв., но $[0, 6] \subset (-1, 1)$ - равномерно конвер.

за $x \leq 3$, $(-1, 1)$ абсолютно конверг., на $[0, 6] \subset (-1, 1)$ равномерно конв.

14.07.2000.

9) Испитати абсолютну и равномерну конвергенцију степеног реда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{5^n \cdot (n^2+1)} x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{5^n \cdot (n^2+1)}}{\frac{(n+1) \cdot \sqrt{2n+3}}{5^{n+1} \cdot (n^2+2n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (n^2+2n+2) \cdot n \cdot \sqrt{2n+1}}{(n^2+1) \cdot (n+1) \cdot \sqrt{2n+3}} = 5$$

$$|R| = 5 \Rightarrow x \in (-5, 5)$$

\Rightarrow за $x \in (-5, 5)$ - ред абсолютно конвергира

- Испитујемо конвергенцију на крајевима интервала:

за $x = 5$:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{5^n \cdot (n^2+1)} \cdot 5^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{n^2+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

\Rightarrow за $x = 5$ - ред дивергира

за $x = -5$:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{5^n \cdot (n^2+1)} \cdot (-1)^n \cdot 5^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{n^2+1}$$

I) Прво испитујемо абсолютну конверг.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{n^2+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{n^2+1} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

\Rightarrow за $x = -5$ - ред не конверг. абсолютно

II) Условна конвергенција:

1) Неопходан услов конвергенције:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{2n+1}}{5^n \cdot (n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{n^2 \cdot (1 + \frac{1}{n^2}) \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}} \cdot 5^n} = 0 \Rightarrow \text{(испуњен услов)}$$

2) $f(x) = ?$

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{2x+1}}{x^2+1}, f'(x) = \frac{(\sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}) \cdot (x^2+1) - x \cdot \sqrt{2x+1} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot (\sqrt{2x+1} \cdot (x^2+1) + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \cdot (x^2+1) - 2x^2 \cdot \sqrt{2x+1}) =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2 \cdot \sqrt{2x+1}} \cdot ((2x+1) \cdot (x^2+1) + x \cdot (x^2+1) - 2x^2 \cdot (2x+1)) =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2x+1}} \cdot (2x^3 + 2x + x^2 + 1 + x^3 + x - x^4 - 2x^2) =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2x+1}} \cdot (-x^3 - x^2 + 3x + 1) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2x+1}} \cdot g(x)$$

$$g(x) = -x^3 - x^2 + 3x + 1$$

$$g'(x) = -3x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{4}{3}$$



\Rightarrow Према Лајбеницу ред конвергира

за $x \in (-5, 5)$ - ред апсолутно конвергира

за $[0, 6] \subset [-5, 5)$ - ред униформно конвергира

20.09.2000.

10) а) У зависности од реалног параметра p испитати конвергенцију, равномерну и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^p (3n+1)}$$

б) Методом диференцирања за $p=1$, као и за $p=1$ и $x=1$, сумирајте

тај ред.

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^p (3n+1)}, p \in \mathbb{R}$$

Када имамо x^{3n+1} користимо Даламберов критеријум за бројне редове, гледајући цео степени ред као један бројни ред b_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{3(n+1)+1}}{(n+1)^p (3(n+1)+1)}}{\frac{x^{3n+1}}{n^p (3n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x \cdot x^{3n+3} \cdot n^p (3n+1)}{x \cdot x^{3n} \cdot (n+1)^p (3n+4)} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^3 \cdot x^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)}{x^{3n}} \right| = |x^3|$$

По Даламберу $\Rightarrow x < 1 \wedge -x < 1 \Rightarrow x > -1$

$|x^3| < 1 \Rightarrow |x| < 1$ апсолутно конвергира за $\forall p \in \mathbb{R}$ по Даламб. кр.

$|x^3| > 1 \Rightarrow |x| > 1$ дивергира за $\forall p \in \mathbb{R}$

За $x=1$, ред се своди на:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (3n+1)}$$

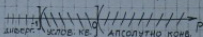
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(3n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \begin{cases} \text{конвергира за } p+1 > 1 \Rightarrow p > 0. \\ \text{абсолютно} \\ \text{дивергира за } p \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{За } x = -1:$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{n^p(3n+1)}$$

I) Прво испитујемо апс. кв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{3n+1} \frac{1}{n^p(3n+1)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(3n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \begin{cases} \text{Абсолютно конверг. за } p > 0 \\ \text{ред абсолютно не конверг. за } p \leq 0 \end{cases}$$



II) Условна конвергенција:

1) НЕОПХОДНИ УСЛОВ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} = 0, \text{ за } p > -1 \Rightarrow \text{за } p \leq -1 \text{ дивергира}$$

2) $f(x) \downarrow = ?$, за $-1 < p \leq 0$

$$f(x) = \frac{1}{n^p(3n+1)}, \quad f'(x) = \frac{-(p n^{p-1}(3n+1) + 3n^p)}{n^{2p}(3n+1)^2} = -\frac{1}{n^{p+1}(3n+1)^2} \cdot (p \cdot (3n+1) + 3n) =$$

$$= -\frac{1}{n^{p+1}(3n+1)^2} \cdot (3pn + p + 3n) = -\frac{1}{n^{p+1}(3n+1)^2} \cdot (n \cdot (3p+3) + p)$$

$\Rightarrow f(x) \downarrow \Rightarrow$ из (1) и (2) \Rightarrow ред условно конвергира по Либеницу за $-1 < p \leq 0$

За $p > 0$, $[-1, 1]$ абсолютно и равномерно конверг.

За $-1 < p \leq 0$, $[-1, 1)$ конвергира, $(-1, 1)$ абсолютно конверг., $[a, b] \subset [-1, 1)$ равномерно.

За $p \leq -1$, $(-1, 1)$ абсолютно конверг., $[a, b] \subset (-1, 1)$ равномерно конвергира

$$5) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n(3n+1)} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad \boxed{S(0) = 0}$$

Степени ред се унутар интервала конвергенције сме диференцирати члан по члан бесконачно много пута, при чему су полупречници конвергенције новодобијених редова исти.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1) \cdot x^{3n}}{n(3n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad S'(0) = 0$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n \cdot x^{3n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3x^{3n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3x^{3(n-1)} \cdot x^2 = 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{3(n-1)} = 3x^2 \cdot \frac{1}{1-x^3} =$$

$$= \frac{3x^2}{1-x^3}, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

АКО $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ униформно (равномерно) конвергира \Rightarrow

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{и} \quad \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx$$

$$a_1 + a_1 \cdot 2 + a_1 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^3 + \dots = \frac{a_1}{1-2}, \quad |2| < 1$$

пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X^{2n-1} = \underline{X + X^3 + X^5 + X^7 + \dots} \Rightarrow a_1 = X, \quad 2 = X^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X^{2n-1} = \frac{X}{1-X^2}$$

$$S'(x) = C_1 + \int \frac{3x^2 dx}{1-x^3} = C_1 - \int \frac{d(1-x^3)}{1-x^3} = C_1 - \ln|1-x^3|, \quad (-1 < x < 1)$$

$$S'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0} \Rightarrow S'(x) = -\ln|1-x^3|, \quad (-1 < x < 1)$$

$$S(x) = C_2 - \int \ln|1-x^3| dx$$

$$\begin{aligned} \int \ln|1-x^3| dx &= \left(\begin{aligned} u &= \ln|1-x^3| \Rightarrow du = \frac{1}{1-x^3} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^3) \cdot (-3x^2) dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \quad du = \frac{3x^2}{x^3-1} dx \end{aligned} \right) = \\ &= x \ln|1-x^3| - 3 \int \frac{x^3-1}{x^3-1} dx = x \ln|1-x^3| - 3 \int dx - 3 \int \frac{dx}{x^3-1} = x \ln|1-x^3| - 3x - 3I \\ \int \frac{dx}{x^3-1} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \Rightarrow 1 = A \cdot (x^2+x+1) + (Bx+C) \cdot (x-1)$$

$$1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B+C &= 0 \\ A-C &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= 1+C \\ A &= -B \\ \Rightarrow 1+C &= -B \end{aligned} \quad 1 = x^2 \cdot (A+B) + x \cdot (A-B+C) + (A-C)$$

$$1 = x^2 \cdot (A+B) + x \cdot (A-B+C) + (A-C)$$

$$1+C+C+C=0 \Rightarrow 3C=-2 \Rightarrow \boxed{C=-\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{3}}, \quad \boxed{B=-\frac{1}{3}}$$

$$\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} +$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{d(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I = x \ln|1-x^3| - 3x - \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow S(x) = C_2 - x \ln|1-x^3| + 3x + \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$C_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$S(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - x(\ln|1-x^2| + 3x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}))$$

$$S(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - x(\ln|x-1| + \ln|x^2+x+1| + 3x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}))$$

$$S(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 3x + (1-x) \cdot \ln|x-1| - (x+\frac{1}{2}) \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$$

$$p=1, x=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n+1)} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 3 + 0 - \frac{3}{2} \ln 3 - \sqrt{3} \operatorname{arctg}(\frac{3}{\sqrt{3}}) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 3 - \frac{3}{2} \ln 3 - \sqrt{3} \frac{\pi}{3} = 3 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow S(1) = 3 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

КОЛОКВИЈУМ - 14.01.2002.

11) Испитати конвергенцију реда и за $p=1$ наћи суму реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^p(2n+1)}$$

Даламбер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+3}}{(n+1)^p(2n+3)}}{\frac{x^{2n+1}}{n^p(2n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{x} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \right| = |x^2| = x^2$$

По Даламберовом критеријуму имамо:

За $x^2 < 1$, односно $|x| < 1$ ред апсолутно конвергира за $\forall p \in \mathbb{R}$ по Дал.

За $x^2 > 1$, односно $|x| > 1$ ред дивергира за $\forall p \in \mathbb{R}$ по Дал. кр.

За $x^2 = 1$, односно $|x| = 1$ ($x=1 \wedge x=-1$) - Даламбер не даје одговор.

За $x=1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(2n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \begin{cases} \text{конвергира за } p+1 > 1 \Rightarrow p > 0 \\ \text{дивергира за } p+1 \leq 1 \Rightarrow p \leq 0 \end{cases}$$

За $x=-1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n^p(2n+1)}$$

1) Прво испитујемо апсолутну конвергенцију:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n^p(2n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p(2n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \begin{cases} \text{апсолутно конв. за } p > 0 \\ \text{апс. не конверг. за } p \leq 0 \end{cases}$$

Диверг. | услов. конв. | апс. конверг. $\rightarrow p$

II) Условна конвергенција: (за $p < 0$)

1) Непходан услов конверг.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} = 0 \text{ за } p > -1, \Rightarrow \text{за } p \leq -1 \text{ ред дивергира!}$$

за $-1 < p < 0$:

2) $f(x) \downarrow = ?$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^{p(2x+1)}} & f'(x) &= \frac{-(p \cdot x^{p-1} \cdot (2x+1) + 2x^p)}{x^{2p \cdot (2x+1)^2}} = \\ &= -\frac{1}{x^{2p \cdot (2x+1)^2}} \cdot (2px^p + p \cdot x^{p-1} + 2x^p) = -\frac{1}{x^{p+1}(2x+1)^2} \cdot (2px + p + 2x) = \\ &= -\frac{1}{x^{p+1}(2x+1)^2} \cdot (x \cdot (2p+2) + p) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow \Rightarrow f(n) \downarrow \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow из (1) и (2) \Rightarrow ред условно конвергира по Лајбницу за $-1 < p < 0$.

за $p > 0$, $[-1, 1]$ апсолутно и равномерно конвергира

за $-1 < p < 0$, $[-1, 1]$ конвергира, на $(-1, 1)$ апс. конверг., на $[a, b] \subset (-1, 1)$ равн. конв.

за $p \leq -1$, $(-1, 1)$ апсолутно конверг., на $[a, b] \subset (-1, 1)$ равномерно конверг.

$$d) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n \cdot (2n+1)}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot x^{2n}}{n \cdot (2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} \cdot x = 2x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = 2x \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

$$S''(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$S'(x) = 2 \int \frac{x}{1-x^2} dx = - \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = - \ln|1-x^2|$$

$$S'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$S(x) = - \int \ln|1-x^2| dx = \left(u = \ln|1-x^2| \Rightarrow du = \frac{1}{1-x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2) \cdot (-2x) = -\frac{2x}{1-x^2} \right) =$$

$$= -x \ln|1-x^2| - \int \frac{2x^2}{1-x^2} dx = -x \ln|1-x^2| + 2 \int \frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx =$$

$$= -x \ln|1-x^2| + 2 \int dx - 2 \int \frac{dx}{1-x^2} = -x \ln|1-x^2| + 2x - \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C_2$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow S(x) = 2x - x \ln|1-x^2| - \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2x - (1+x) \ln|1+x| + (1-x) \ln|1-x|, -1 < x < 1$$

12) Испитати конвергенцију и наћи суму реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 \cdot x^n}{n^2 \cdot x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{x^n}{x^{n-1}} \right| = |x|$$

Дакле, по ДАЛАМБЕРУ имамо

ЗА $|x| < 1 \Rightarrow$ РЕД АБСОЛУТНО КОНВЕРГ.

ЗА $|x| > 1 \Rightarrow$ РЕД ДИВЕРГИРА

ЗА $|x| = 1 \Rightarrow$ ДАЛАМБЕР НЕ ДАЈЕ ОДГОВОР

ЗА $x = 1$:

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \Rightarrow$ РЕД ДИВЕРГИРА (ОПШТИ ЧЛАН НЕ ТЕЖИ 0)

ЗА $x = -1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2$$

I) АПС. КОНВ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k-1)^{n-1} n^2 \neq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 - \text{РЕД НЕ КОНВЕРГИРА АБСОЛУТНО}$$

II) РЕД НЕ КОНВЕРГИРА УСЛОВНО.

ЗА $x \in (-1, 1)$ - РЕД АБСОЛУТНО КОНВ., ЗА $[0, 6] \subset (-1, 1)$ - РАВНОМЕРНО КОНВ.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}$$

$$\int S(x) dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{x} + C = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + C$$

$$\int S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + C_1 \quad / : x$$

$$\frac{1}{x} \int S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{C}{x}$$

$$\underbrace{\int \left(\frac{1}{x} \int S(x) dx \right) dx}_{P(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int n x^{n-1} dx + C \int \frac{dx}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{x} + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C_1 \ln|x| + C_2 = \frac{x}{1-x} + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$\int P(x) dx = \frac{x}{1-x} + C_1 \ln|x| + C_2 \quad / (1)'$$

$$P(x) = \left(\frac{x}{1-x} + C_1 \ln|x| + C_2 \right)'$$

$$f(x) = \frac{x-x^2}{(1-x)^2} + G \cdot \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{G}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \int S(x) dx$$

$$f(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{x} \int S(x) dx = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{G}{x} \cdot 1/x$$

$$\int S(x) dx = \frac{x}{(1-x)^2} + G \quad | ()'$$

$$S(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2} + G \right)'$$

$$S(x) = \frac{(1-x)^2 \cdot x \cdot 2 \cdot (1-x) - (1-2x+x^2) \cdot 2x^2 + 2x}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \frac{(1+x) \cdot (1-x)}{(1-x)^4} \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

05.07.1991.

43. У зависности од реалног параметра p испитати апсолутну, неапсолутну и униформну конвергенцију потенцијалног реда. За $p=1$ израчуна-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \cdot (n+1)} \quad \text{ти збир тог реда.}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n^p \cdot (n+1)}{(n+1)^p \cdot (n+2)}}{\frac{n^p \cdot (n+1)}{(n+1)^p \cdot (n+1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right| = 1 \Rightarrow R=1$$

\Rightarrow За $x \in (-1, 1)$ ред апсолутно конвергира

- Испитујемо конвергенцију на крајевима интервала:

За $x=1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot (n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \begin{cases} \text{конвергира за } p+1 > 1 \Rightarrow p > 0 \\ \text{дивергира за } p+1 \leq 1 \Rightarrow p \leq 0 \end{cases}$$

За $x=-1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p \cdot (n+1)}$$

I) Прво испитујемо апсолутну конверг.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cdot \frac{1}{n^p \cdot (n+1)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot (n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \begin{cases} \text{Апсолутно конв. за } p > 0 \\ \text{не конв. апсолутно за } p \leq 0 \end{cases}$$

||||| диверт. ||||| условно конв. ||||| Алс. конв. p

II) Условно конверг. за $p \leq 0$:

1) НЕОПХОДНИ УСЛОВ КОНВ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} = 0 \text{ ЗА } p+1 > 0 \Rightarrow p > -1 \Rightarrow \text{ЗА } p < -1 \text{ РЕД ДИВЕРГИРА}$$

$$\text{ЗА } -1 < p \leq 0$$

$$2) f(x) \text{ ?}$$

$$f(x) = \frac{1}{n^{p+1}}, f'(x) = \frac{-(pn^{p+1} \cdot (n+1) + n^p)}{n^{p+1} \cdot (n+1)^2} = -\frac{1}{n^{p+1}} \cdot (pn + p + n) =$$

$$= -\frac{1}{n^{p+1}} (n \cdot (p+1) + p) < 0$$

\Rightarrow ИЗ (1) И (2) \Rightarrow РЕД УСЛОВНО КОНВЕРГИРА ПО ЛАБЕЛИЦУ ЗА $-1 < p < 0$

ЗА $p > 0$, $[-1, 1]$ АБСОЛЮТНО И РАВНОМЕРНО КОНВЕРГИРА

ЗА $-1 < p < 0$, $[-1, 1)$ КОНВЕРГИРА, $(-1, 1)$ АБСОЛ. КОНВ., $[0, 6] \subset (-1, 1)$ РАВНОМ. КОНВ.

ЗА $p < -1$, $(-1, 1)$ АБСОЛЮТНО КОНВЕРГ., $[0, 6] \subset (-1, 1)$ РАВНОМ. КОНВ.

$$d) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{(n+1)} \Rightarrow S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$S(x) = 1 + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x}, \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0$$

НАПОМЕНА:

$$S(x) = 1 + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} \text{ ЗАДОВОЉАВА:}$$

$$S_1(x) = \int \frac{x}{1-x} dx = -\int \frac{1-x-1}{1-x} dx =$$

$$= -\int dx + \int \frac{dx}{1-x} = -x - \int \frac{d(1-x)}{1-x} =$$

$$= -x - \ln|1-x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} \left(\frac{0}{0} \right)' =$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) - (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 0 - 1 = 0$$

ДАКЛЕ ЗАДОВОЉАВА:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ И } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

29.02.1992

$$S(x) = -\ln(1-x) + 1 + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow S(x) = 1 + \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x}$$

44) ОДРЕДИТИ РАДИУС КОНВЕРГЕНЦИЈЕ СТЕПЕНОГ РЕДА $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n \cdot (2n+1)}$ А ЗАТИМ ИЗРАЧУНАТИ НЕГОВ ЗБИР.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(n+1) \cdot (2n+3)} \cdot \frac{n \cdot (2n+1)}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot (2n+1)}{(n+1) \cdot (2n+3)} \cdot x^2 \right| = |x^2| = x^2$$

ПО ДАЛАМБЕРОВОМ КРИТЕРИЈУМ:

ЗА $x^2 < 1$, ТЈ. $|x| < 1$ РЕД АПСОЛУТНО КОНВЕРГИРА

ЗА $x^2 > 1$, ТЈ. $|x| > 1$ РЕД ДИВЕРГИРА

ЗА $x^2 = 1$, ТЈ. $|x| = 1$ ДАЛАМБЕР НЕ ДАЈЕ ОДГОВОР

ЗА $x = 1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot (2n+1)}$$

I) АПСОЛУТНА КОНВЕРГЕНЦИЈА:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot (2n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (2n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{АПСОЛУТНО КОНВЕРГ.}$$

II УСЛОВНА КОНВЕРГ.

1) НЕОПХ. УСЛОВ КОНВЕРГ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot (2n+1)} = 0 \Rightarrow \text{ИСПУЊЕН УСЛОВ.}$$

2) $f(x) \downarrow = ?$

$$f(x) = \frac{1}{n \cdot (2n+1)}, \quad f'(x) = \frac{-(2n+1+n \cdot 2)}{n^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{-4n-1}{n^2 \cdot (2n+1)^2} < 0$$

\Rightarrow ИЗ (1) И (2) \Rightarrow РЕД УСЛОВНО КОНВЕРГИРА ПО ЛАЈБНИЦУ

ЗА $x = -1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^{2n+1}}{n \cdot (2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot (2n+1)} \Rightarrow \text{ИСТО КАО ЗА } x=1.$$

$$d) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n \cdot (2n+1)}, \quad -1 < x < 1. \text{ ТАДА ЈЕ } S(0) = 0 \text{ И}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1) \cdot x^{2n}}{n \cdot (2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n}, \quad -1 < x < 1, \text{ КАО И } S'(0) = 0$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1}}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n-1}, \quad -1 < x < 1,$$

$$S'''(x) = 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n-2} = 2x \cdot \frac{-1}{1+x^2} = -\frac{2x}{1+x^2} \quad (\text{ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕД})$$

$$S'(x) = - \int \frac{2x}{1+x^2} dx = - \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = -\ln|x^2+1|$$

$$S'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$S(x) = - \int \ln|x^2+1| dx = \left(\begin{aligned} u &= \ln|x^2+1| \Rightarrow du = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1) \cdot 2x dx \Rightarrow u = \frac{2x}{x^2+1} dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right)$$

$$= -x \ln|x^2+1| + \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = -x \ln|x^2+1| + 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx =$$

$$= -x \ln|x^2+1| + 2 \int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = -x \ln|x^2+1| + 2x - 2 \arctan x + C_2$$

$$S(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2x - 20149x - x \ln(1+x^2), \quad -1 \leq x \leq 1$$

15) Испитати конвергенцију и наћи суму реда, па затим на основ тога наћи и суму реда (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n \cdot (n+1)} \quad (*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n \cdot (n+1)}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1) \cdot (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)} \right| = |-1| = 1 \Rightarrow R=1$$

За $x \in (-1, 1)$ ред апсолутно конвергира

- Испитujemo конвергенцију на крајевима интервала:

За $x=1$:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (n+1)}$$

I) Апсолутна конверг.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{ред апсолутно конв.}$$

II) Условна конв.

1) Неопходни услов конв.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 0 \Rightarrow \text{задовољен}$$

2) $f(x) = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ из (1) и (2) ред условно конв. по Лазевицу

За $x=-1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow \text{исти случај као за } x=1!$$

За $[-1, 1]$ апсолутно и равномерно конв.

$$d) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n \cdot (n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad S(0) = 0$$

$$S(x) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n \cdot (n+1)}, \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}, \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} = \frac{1}{1+x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n+1} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \right)$$

$$S_1(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|, \quad \text{срџа } \ln|1+x| \text{ једном } \ln \text{ интегрално и добијемо } S(x), \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} S_1(x)$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (n+1)} = S(1)$$

16) Найдите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad S_1(x)$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) \cdot x^{2n-2}}{2n-1} = S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = (1 + x^2 + x^4 + \dots x^{2n-2}) \Rightarrow 0_1 = 1, \quad 2 = x^2, \quad \pm = \frac{0_1}{1-x^2}$$

$$S_1'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$S_1(x) = \int \frac{1}{1-x^2} dx = -\int \frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx = -\int dx + \int \frac{dx}{1-x^2} = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$S_1(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$S(x) = x^2 \cdot (-x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|), \quad x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

17) Найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n-2}}{(3n-2) \cdot n}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n-2}}{(3n-2) \cdot n} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{(3n-2) \cdot n} = S_1$$

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n \cdot x^{3n-1}}{(3n-2) \cdot n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n-1}}{3n-2} = 3x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n-2}}{3n-2} = S_2$$

$$S_2'(x) = \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot x^{3n-3}}{3n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{3n-3} = -\frac{1}{1+x^3}$$

$$S_2'(x) = -\int \frac{dx}{1+x^3} = -\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C =$$

$$= x^2 \cdot (A+B) + x \cdot (-A+B+C) + (A+C) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ A=1-C \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=C-1 \\ A=1-C \\ C-1-C+1+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{2}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S_2(x) = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})}{(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2 + 1} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) = S_2(x)$$

Итак, найдет $S_1 = \int 3x S_2(x) dx$ полагаясь на $\frac{1}{x^2}$ и зная $S_2(x)$!

18) Развити функцију у степени ред:

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n}$$

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot \dots \cdot (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n}}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n}$$

$$f(x) = \int f'(x) = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \int x^{2n} dx + C$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

Пошто је $f(0) = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

- ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ -

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{2n\pi \cdot x}{b-a} + b_n \cdot \sin \frac{2n\pi \cdot x}{b-a} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx$$

АКО ЈЕ f -ПАРНА НА $[-\ell, \ell]$:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) dx$$

АКО ЈЕ f -НЕПАРНА НА $[-\ell, \ell]$:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$b_0 = 0$$

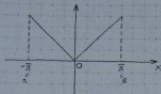
⑦ Φ -ЈА ЈЕ ДЕО ПО ДЕО ГЛАТКА АКО ЈЕ: $\Phi(x_0) \rightarrow \frac{1}{2} (f(x_0+0) + f(x_0-0))$

десни
понос
леви
понос

19) Функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $[-\pi, \pi]$ развити у Фурјеов ред.

Затим израчунати следећу суму: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \\ -x, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$



\Rightarrow функција $f(x)$ је парна!

\Rightarrow испитујемо само интервал $[0, \pi]$

f - парна на $[-l, l]$:

f - парна на $[-\pi, \pi]$:

$$b_n = 0$$

\Rightarrow

$$b_n = 0$$

\Rightarrow

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cdot \cos nx dx$$

\Rightarrow за $x \in [0, \pi] \Rightarrow |x| = x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx dx = \left(\begin{aligned} &u = x \Rightarrow du = dx \\ &dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \int \cos nx dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{aligned} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot x \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot x \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \sin n\pi + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot ((-1)^n - 1)$$

Дакле, постоје два решења: за $n = 2k$ и $n = 2k+1$.

За $n = 2k$ имамо:

$$a_n = a_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2} \cdot ((-1)^{2k} - 1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_n = a_{2k} = 0$$

За $n = 2k+1$ имамо:

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot ((-1)^{2k+1} - 1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot (-2) \Rightarrow a_n = a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{2n\pi x}{2\pi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx, \quad b-a = \pi$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x - \text{Фурјеов ред}$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = ?$$

$$\Phi(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \cos 0$$

$$\Phi(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$f(0) = |0| = 0$$

$$\Phi(0) = f(0)$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$$

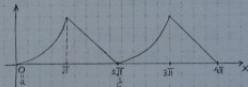
$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

20) Функцию $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ на интервале $[0, 2\pi]$ разбить и

Фурьеов ряд.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$b-a = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) dx \right) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} x^2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} + 2x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{3} \pi + 4\pi - 2\pi - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{3} \pi + 2\pi - 2\pi + \frac{1}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{3} \pi}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{2\pi} dx + \frac{2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cdot \cos \frac{2n\pi x}{2\pi} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos nx dx + 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi^2} \cdot I_1 + 2I_2 - \frac{1}{\pi} I_3$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\int x^2 \cos nx dx = (Ax^2 + Bx + C) \cos nx + (Dx^2 + Ex + F) \cdot \sin nx + C \quad ||'$$

$$x^2 \cos nx = (2Ax + B) \cdot \cos nx + (Ax^2 + Bx + C) \cdot (-\sin nx \cdot n) + (2Dx + E) \cdot \sin nx + (Dx^2 + Ex + F) \cdot \cos nx \cdot n$$

$$x^2 \cos nx = 2Ax \cos nx + B \cos nx - Ax^2 \sin nx - Bnx \sin nx - Cx \sin nx + \\ + 2Dx \sin nx + E \sin nx + Dnx^2 \cos nx + Enx \cos nx + Fnx \cos nx$$

$$x^2 \cos nx = x \cos nx \cdot (2A + En) + \cos nx \cdot (B + Fn) + x^2 \sin nx \cdot (-An) + \\ + x \sin nx \cdot (-Bn + 2D) + \sin nx \cdot (-Cn + E) + x^2 \cos nx \cdot (Dn)$$

$$\left. \begin{aligned} 2A + En &= 0 \\ B + Fn &= 0 \\ -An &= 0 \\ -Bn + 2D &= 0 \\ -Cn + E &= 0 \\ Dn &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= \frac{1}{n}, A=0, E=0, C=0 \\ -Bn + \frac{2}{n} &= 0 \Rightarrow Bn = \frac{2}{n} \Rightarrow B = \frac{2}{n^2} \\ \frac{2}{n^2} + Fn &= 0 \Rightarrow Fn = -\frac{2}{n^2} \Rightarrow F = -\frac{2}{n^3} \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos nx = \frac{2}{n^2} x \cos nx + \left(\frac{1}{n} x^2 - \frac{2}{n^3} \right) \sin nx + C \quad (\text{Брне парциалном!})$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n \Rightarrow I_1 = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \quad \left(\begin{aligned} u=x &\Rightarrow du=dx \\ x^2 = 2 \sin nx \, dx &\Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{aligned} \right) = \\ = \frac{x}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n^2} \cos 2\pi - \frac{1}{n^2} \cos 0 = \\ = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n^2} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n \right) = \\ = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi n^2} - \frac{1}{\pi n^2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi n^2} = \frac{1}{\pi^2 n^2} \cdot (3 \cdot (-1)^n - 1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2} \cdot (3 \cdot (-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx + \int_{-\pi}^0 (2\pi - x) \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (2\pi - x) \sin nx \, dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left(\begin{aligned} u=x^2 &\Rightarrow du=2x \, dx \\ dv=\sin nx \, dx &\Rightarrow v=-\frac{1}{n} \cos nx \end{aligned} \right) = \\ = -x^2 \cdot \frac{1}{n} \cos nx + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left(\begin{aligned} u=x &\Rightarrow du=dx \\ dv=\cos nx \, dx &\Rightarrow v=\frac{1}{n} \sin nx \end{aligned} \right) = \\ = -x^2 \cdot \frac{1}{n} \cos nx + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ = -x^2 \cdot \frac{1}{n} \cos nx + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\pi^2 \cdot \frac{1}{n} (-1)^n + \frac{2}{n^3} (-1)^n - \frac{2}{n^3}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi - x) \sin nx \, dx = \left(u = 2\pi - x \Rightarrow du = -dx \right) = \left(du = \sin nx \, dx \Rightarrow u = -\frac{1}{n} \cos nx \right) =$$

$$= -(2\pi - x) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = -(2\pi - x) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$I_2 = -(2\pi - 2\pi) \cdot \frac{1}{n} + (2\pi - \pi) \cdot \frac{1}{n} \cdot (-1)^n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{n} \cdot (-1)^n + \frac{2}{n^3} (-1)^n + \frac{2}{n^3} \right) + \frac{1}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\pi}{n}$$

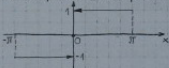
$$= -(-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \cdot \frac{2}{n^3 \pi^2} + \frac{2}{n^3 \pi^2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^3 \pi^2} \cdot ((-1)^n + 1)$$

$$b_n = \frac{2}{n^3 \pi^2} \cdot ((-1)^n + 1)$$

$$\Phi(x) = \frac{5}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3 \pi^2} (3 \cdot (-1)^n - 1) \cdot \cos nx + \frac{2}{n^3 \pi^2} ((-1)^n + 1) \sin nx \right) - \text{ФУРИЈЕОВ РЕД}$$

21) Функцију $f(x) = \text{sgn}(x)$, на интервалу $[-\pi, \pi]$ развити у ФУРИЈЕОВ РЕД

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \\ -1, & \text{за } x < 0 \end{cases}$$



ФУНКЦИЈА ЈЕ НЕПАРНА

$$\Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \left. \frac{-2}{n\pi} \cos nx \right|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{n\pi}$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \cdot ((-1)^n - 1)$$

$$\text{за } b_{2k} = 0$$

$$\text{за } b_{2k+1} = \frac{4}{\pi n} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin(2k+1) \cdot x - \text{ФУРИЈЕОВ РЕД, } x \in [-\pi, \pi]$$

5) НАћи СУМУ РЕДА:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin(2k+1) \cdot x, \quad \sin(2k+1) \cdot x_0 = (-1)^k$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Phi(x) = f(x)$$

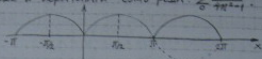
$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

065/0330035

22) Развити у Фурјеов ред функцију $f(x) = |\sin x|$ у интервалу основне периоде и израчунати суму реда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

$$f(x) = |\sin x|$$



\Rightarrow За $f(x)$ је парна, па ћемо је развити на $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\frac{1}{\pi/2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{\pi/2} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{4}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos \frac{2n\pi x}{\pi/2} \, dx = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [\sin(1-2n)x + \sin(1+2n)x] \, dx = \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-2n} \cos(1-2n)x - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+2n} \cos(1+2n)x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+2n} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{1+4n^2} \right) \Rightarrow a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+4n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cdot \cos 2nx} \text{ - Фурјеов ред, } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cdot \cos 2nx$$

$$\cos 2nx_0 = (-1)^n \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ јер је } \cos n\pi = (-1)^n$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 1$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{-1 + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{2}}$$

23) Функцију $f(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$, на интервалу $x \in [-2, 2]$ развити у ФУРИЈЕВ РЕД.

$$f(-x) = |-x-1| + |-x| + |-x+1| = |x+1| + |x| + |x-1| = f(x)$$

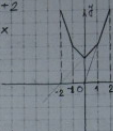
\Rightarrow Ф-ЈА ЈЕ ПАРНА, ПА ЋЕМО ЈЕ ПОСМАТРАТИ НА ИНТЕРВАЛУ $x \in [0, 2]$

$$\text{ЗА } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = (1-x) + x + (x+1) = x+2$$

$$\text{ЗА } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = (x-1) + x + (x+1) = 3x$$

ДАКЛЕ ИМАМО:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, x \in [0, 2]$$



$$b_n = 0$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 3x dx = \left. \frac{1}{2}(x+2)^2 \right|_0^1 + \left. \frac{3}{2}x^2 \right|_1^2 = \frac{9}{2} - 2 + 6 - \frac{3}{2} = 7$$

$$a_0 = 7$$

$$a_n = \int_0^1 (x+2) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + 3 \int_1^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 (x+2) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left(\begin{aligned} &u = x+2 \Rightarrow du = dx \\ &dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{aligned} \right) =$$

$$= (x+2) \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= (x+2) \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} x \Big|_0^1$$

$$= \frac{6}{n\pi} \cdot (-1)^n - \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$I_2 = x \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} x \Big|_1^2 + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} x \Big|_1^2 = \frac{2}{n\pi} \cdot (-1)^n + \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n$$

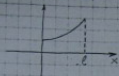
$$a_n = (-1)^n \frac{6}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} - (-1)^n \frac{6}{n\pi} + (-1)^n \frac{12}{n^2\pi^2}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot (3(-1)^n - 1)$$

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow 0 \\ n=1 &\Rightarrow 1 \\ n=2 &\Rightarrow 0 \\ n=3 &\Rightarrow -1 \\ n=4 &\Rightarrow 0 \\ n=5 &\Rightarrow 1 \\ n=6 &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{7}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (3(-1)^n - 1) \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} \quad - \text{ФУРИЈЕВ РЕД, } x \in [-2, 2]$$

Косинусни ред на $[0, \ell]$:



\bar{f} је парна - продужење f на $[-\ell, \ell]$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{\ell}} \text{ - косинусни ред}$$

Синусни ред на $[0, \ell]$:

\bar{f} - непарно продужење

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell}} \text{ - синусни ред}$$

[24] Развити функцију $f(x) = \cos x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ у синусни ред.

функција је парна

$$a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin \frac{2n\pi x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin 2nx dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\sin(2n-1)x + \sin(2n+1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4n}{4n^2-1} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{8n}{4n^2-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{8n}{4n^2-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{4n^2-1} \sin 2nx \text{ - синусни ред, } x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Развити функции $f(x) = x \cdot \sin^2 x$ на интервалу $[0, \pi]$ у косинусни ред.

$$b_n = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 2x \, dx = \\ &= \left(u = x \Rightarrow du = dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot (1 - \cos 2x) \cdot \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x \cdot \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cdot [\cos(n-2)x + \cos(n+2)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(n-2)x \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos(n+2)x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos nx \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right) = \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} x \cdot \cos(n-2)x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(n-2)x \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{n-2} \sin(n-2)x \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{n-2} x \sin(n-2)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n-2} \int_0^{\pi} \sin(n-2)x \, dx = \frac{1}{n-2} x \sin(n-2)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{(n-2)^2} \cdot \cos(n-2)x \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{(n-2)^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{(n-2)^2} \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \cdot \cos(n+2)x \, dx = \frac{1}{(n+2)^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{(n+2)^2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(n-2)^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{(n-2)^2} \right) - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(n+2)^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2 \pi} - \frac{1}{n^2 \pi} - (-1)^n \cdot \frac{1}{2(n-2)^2 \pi} + \frac{1}{2(n-2)^2 \pi} - (-1)^n \cdot \frac{1}{2(n+2)^2 \pi} + \frac{1}{2(n+2)^2 \pi} = \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2(n-2)^2} - \frac{1}{2(n+2)^2} \right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi} \cdot \frac{2n^4 - 4n^2 + 32 - n^4 + 2n^2 - n^2 - n^2 - n^2}{2n^2 \cdot (n^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{16 - 9n^2}{8 \cdot n^2 \cdot (n^2 - 4)^2} \cdot ((-1)^n - 1)$$

$$\Rightarrow \text{ЗА } n=2k \Rightarrow a_{2k} = 0$$

$$\text{ЗА } n=2k+1 \Rightarrow a_{2k+1} = \frac{-8 \cdot (16 - 9(2k+1)^2)}{8 \cdot (2k+1)^2 \cdot ((2k+1)^2 - 4)}$$

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16 - 9n^2}{8 \cdot n^2 \cdot (n^2 - 4)^2} \cdot ((-1)^n - 1) \cdot \cos nx \quad - \text{КОСИНУСНИ РЕД} \quad n \neq 2$$

$$\text{ЗА } n=2$$

$$a_2 = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \cos 2x dx = \dots = -\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{a_2}{2} + a_2 \cdot \cos 2x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \cdot \cos(2k+1)x$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cos 2x - \frac{\pi}{8} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16 - 9(2k+1)^2}{(2k+1)^2 \cdot ((2k+1)^2 - 4)} \cdot \cos(2k+1)x \quad - \text{КОСИНУСНИ РЕД (И САМО)}$$

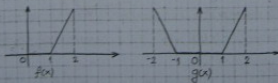
20.06.2000.

26. Функцију $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 2x-2, & x \in (1, 2] \end{cases}$ на интервалу $[0, 2]$ развити у косинусни Фуријеов ред. Показати да добијени Фуријеов ред униформно конвергира. Наћи затим опште решење диференцијалне једначине $y'' + \pi^2 y = f(x)$ где је $f(x)$ сума добијеног Фуријеовог реда.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 2x-2, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

Пошто нам треба косинусни ред ф-је $f(x)$ продужавамо до парне ф-је и тако добијамо ф-ју $g(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 2x-2, & x \in (1, 2] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2] \\ f(x), & x \in [-2, 0] \end{cases}$$



Функцију $g(x)$ на интервалу $[-2, 2]$ развијамо у Фуријеов ред

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 (2x-2) dx = \left(x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 = 1$$

$$b_n = 0$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 (2x-2) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2x-2) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left(\begin{aligned} u &= 2x-2, du = 2dx \\ dv &= \cos \frac{n\pi x}{2} dx \Rightarrow \\ v &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{aligned} \right)$$

$$= (2x-2) \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= (2x-2) \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{8}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) = \frac{8}{n^2\pi^2} ((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2}), n=1,2$$

$$\text{3A } n=2k \Rightarrow a_{2k} = \frac{8}{n^2\pi^2} (1 - \cos \frac{2k\pi}{2}) = \frac{8}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^k) = \frac{2}{k^2\pi^2} (1 - (-1)^k)$$

$$\text{3A } k=2l \Rightarrow a_{4l} = 0$$

$$\text{3A } k=2l+1 \Rightarrow a_{4l+2} = \frac{4}{(2l+1)^2\pi^2}$$

$$\text{3A } n=2k+1 \Rightarrow a_{2k+1} = \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2} (-1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2}) = \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2} (-1 - 0) = \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos \frac{2k\pi x}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{4l} \cos 2l\pi x + \sum_{l=0}^{\infty} a_{4l+2} \cos (2l+1)\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)^2\pi^2} \cos (2l+1)\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

За конвергенцију користимо следећи Фурјеов ред:

$$f(x) = \left| a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} \right| = \left| \frac{8}{n^2\pi^2} ((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2}) \cos \frac{n\pi x}{2} \right| \leq \frac{8}{n^2\pi^2} \left| (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{n\pi x}{2} \right|$$

$$\leq \frac{8}{n^2\pi^2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{16}{n^2\pi^2} = C_n.$$

Бројни ред $\sum C_n$ конвергира (хиперхармонички), па по Вабелитовом критеријуму $|a_n(x)| \leq C_n$, ред равномерно конвергира на $[0,2]$

$$y'' + \pi^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 0$$

27) Развити у Фурјеов ред непарну функцију f периода 2π , ако је $f(x) = x \cdot (\pi - x)$ у сегменту $[0, \pi]$

$$f(x) = x \cdot (\pi - x), \quad x \in [0, \pi] \quad , \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & x \in [0, \pi] \\ -x(\pi - x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Ф-ју $g(x)$ на интервалу $[-\pi, \pi]$ развијамо у Фурјеов ред:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \cdot \sin nx \, dx =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left(u = x \Rightarrow du = dx \right. \\ \left. dv = \sin nx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \right) =$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{n} (-1)^n$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \left(u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \right. \\ \left. dv = \sin nx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \right) =$$

$$= -\frac{1}{n} x^2 \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left(u = x \Rightarrow du = dx \right. \\ \left. dv = \cos nx \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \right) =$$

$$= -\frac{1}{n} x^2 \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{1}{n} x^2 \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2} x \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{n} (-1)^n + \frac{2}{n^2} (-1)^n - \frac{2}{n^2}$$

$$b_n = -(-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n} + (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n} - (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = -\frac{4}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{За } n = 2k \Rightarrow b_{2k} = 0$$

$$\text{За } n = 2k+1 \Rightarrow b_{2k+1} = \frac{8}{\pi (2k+1)^2}, \quad \text{Отуда: } \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k+1)^2} \cdot \sin((2k+1)x)$$

28) Ф-за $f(x) = x \sin x$ развити у синусни Фурijeов ред на сегменту $[0, \pi]$. Скицирати график тако добијеног Фурijeовог реда.

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n-1)x \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n+1)x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} x \cos(n-1)x \, dx = \left(u=x \Rightarrow du=dx \right. \\ \left. dv=\cos(n-1)x \, dx = \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x \right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} x \cdot \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi} \sin(n-1)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{n-1} x \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{(n-1)^2} \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{(n-1)^2} (-1)^{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{(n+1)^2} (-1)^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi \cdot (n-1)^2} - \frac{1}{\pi \cdot (n+1)^2} - (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi \cdot (n+1)^2} + \frac{1}{\pi \cdot (n-1)^2} \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi} \cdot \frac{4n}{(n^2-1)^2} \quad (n \neq 1)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x (1 - \cos 2x) \, dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{За } n=2k \Rightarrow b_{2k} = \frac{(-1)^{2k-1} - 1}{\pi} \cdot \frac{4 \cdot 2k}{(4k^2-1)^2} = \frac{-4k}{\pi \cdot (4k^2-1)^2}$$

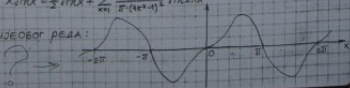
$$\text{За } n=2k+1 \Rightarrow b_{2k+1} = 0$$

Према томе:

$$0 < x < \pi \Rightarrow x \sin x = \frac{\pi}{2} \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} - 1}{\pi} \cdot \frac{4k}{(4k^2-1)^2} \sin 2kx$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow x \sin x = \frac{\pi}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4k}{\pi \cdot (4k^2-1)^2} \sin 2kx$$

График Фурijeовог реда:



29. Дати $f(x) = x \cos x$ развити у косинусни Фурijeов ред на сегменту $[0, \pi]$. Скицирати график тако добијеног Фурijeовог реда.

$$f(x) = x \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$L = \pi, \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right) = \frac{2}{\pi} x \sin x \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{4}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \cdot \cos n x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\cos(n-1)x + \cos(n+1)x] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n-1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n+1)x dx$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x \cos(n-1)x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(n-1)x dx \Rightarrow v = \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} x \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi} \sin(n-1)x dx = \frac{1}{(n-1)^2} \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{(n-1)^2} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)} =$$

$$I_2 = \frac{1}{(n+1)^2} (-1)^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)^2} \right]$$

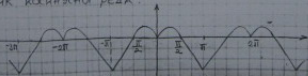
$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$a_n = \frac{4n}{\pi \cdot (n^2 - 1)^2} \cdot [(-1)^{n+1} - 1], \quad n \neq 1$$

$$\exists n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow x \cos x = -\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} \cdot [(-1)^{n+1} - 1] \cdot \cos n x$$

График косинусног реда:



$$\Phi\text{-}3\text{y } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

развити у Фурijeов ред а затим решити диф. з-ну:

$$4y'' + \pi^2 y = f(x), \quad x \in [-2, 2].$$

Φ -ја је непарна, $\ell = 2$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 x^2 \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx - 2 \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \dots$$

$$\dots \Rightarrow b_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1]$$

$$n = 2k \Rightarrow b_{2k} = 0$$

$$n = 2k+1 \Rightarrow b_{2k+1} = \frac{-32}{n^3 \pi^3}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-32}{(2k+1)^3 \pi^3} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} - \text{Фурijeов ред, } \Phi(x) = f(x), \quad x \in [-2, 2]$$

$$4y'' + \pi^2 y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-32}{(2k+1)^3 \pi^3} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$4r^2 - \pi^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow r_1 = \frac{\pi}{2}i, \quad r_2 = -\frac{\pi}{2}i \Rightarrow y_1 = \cos \frac{\pi}{2}x, \quad y_2 = \sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cos \frac{\pi}{2}x + C_2 \sin \frac{\pi}{2}x - \text{хомогено решење}$$

$$4y'' - \pi^2 y = -\frac{32}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{32}{27\pi^3} \sin \frac{3\pi}{2}x - \dots - \frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$y_0 = x \cdot (A \cos \frac{\pi}{2}x + B \sin \frac{\pi}{2}x), \quad y_0' = A \cos \frac{\pi}{2}x + B \sin \frac{\pi}{2}x + x \cdot (-\frac{\pi}{2}A \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}B \cos \frac{\pi}{2}x)$$

$$4y_0'' - \pi^2 y_0 = -\frac{32}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{2}x \quad y_0'' = -\frac{\pi}{4}A \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}B \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}A \sin \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}B \cos \frac{\pi}{2}x + x \cdot (-\frac{\pi^2}{4}A \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^2}{4}B \sin \frac{\pi}{2}x)$$

$$-2\pi A \sin \frac{\pi}{2}x + 2\pi B \cos \frac{\pi}{2}x - 2\pi A \sin \frac{\pi}{2}x + 2\pi B \cos \frac{\pi}{2}x + x \cdot (-\pi^2 A \cos \frac{\pi}{2}x - \pi^2 B \sin \frac{\pi}{2}x) + x \cdot (\pi^2 A \cos \frac{\pi}{2}x + \pi^2 B \sin \frac{\pi}{2}x) = -\frac{32}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\sin \frac{\pi}{2}x \cdot (-2\pi A - 2\pi A) + \cos \frac{\pi}{2}x \cdot (2\pi B + 2\pi B) - \frac{32}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{2}x = \begin{cases} -4\pi A = -\frac{32}{\pi^3} \Rightarrow A = \frac{8}{\pi^4} \\ \pi B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{8x}{\pi^4} \cdot \cos \frac{\pi}{2}x - \text{парцикуларно решење}$$

$$y_{2k+1} = A_n \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} + B_n \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}, \quad y_{2k+1}' = -\frac{(2k+1)\pi}{2} A_n \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2} B_n \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$4y_{2k+1}'' + \pi^2 y_{2k+1} = \frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} \quad y_{2k+1}'' = -\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} A_n \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} - \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} B_n \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$-(2k+1)^2 \pi^2 A_n \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} - (2k+1)^2 \pi^2 B_n \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} + \pi^2 A_n \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} + \pi^2 B_n \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} =$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi x}{2} \cdot (-(2k+1)^2 \pi^2 A_n + \pi^2 A_n) + \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2} \cdot (-(2k+1)^2 \pi^2 B_n + \pi^2 B_n) = \frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

$$(-(2k+1)^2 \pi^2 + \pi^2) A_n = -\frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \Rightarrow (-4k^2 - 4k + 1) \pi^2 A_n = -\frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \Rightarrow A_n = \frac{8}{(2k+1)^4 \pi^4} \Rightarrow y = y_h + y_0 - \text{опште решење}$$

20.9.2001

31) Развити Ф-ју $f(x) = x \sin^2 x$ у Фурјеов ред на интервалу $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = x \sin^2 x, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin^2(-x) = -x \sin^2 x = -f(x) \Rightarrow \text{Ф-ја је непарна!}$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \cdot \sin nx \, dx = \dots = (-1)^n \frac{4}{n(n^2-4)}, \quad n \neq 2$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \cdot \sin 2x \, dx = \dots = -\frac{3}{8}, \quad b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \dots = \frac{4}{3}$$

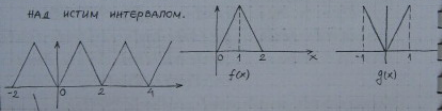
$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \sum_{n=3}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\sigma(x) = \frac{4}{3} \sin x - \frac{3}{8} \sin 2x + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n(n^2-4)} \sin nx$$

03.10.2000.

32) Дата је функција $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 4-2x, & x \in (1, 2] \end{cases}$. Развити Ф-ју у Фурјеов ред на интервалу $[0, 2]$, а затим и у синусни Фурјеов ред на истом интервалом.

ред на интервалу $[0, 2]$, а затим и у синусни Фурјеов ред на истом интервалом.



Видимо да је Фурјеов ред парна функција, периодично са периодом 2

Ф-је $f(x)$ на $x \in [0, 2]$ и $g(x)$ на $x \in [-1, 1]$ имају исти Фурјеов ред $\sigma(x)$.

$$\text{Ф-јо } g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ -2x, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Развимо $g(x)$ у Фурјеов ред на интервалу $[-1, 1]$

$g(x)$ је парна $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = 2 \int_0^1 2x dx = 2x^2 \Big|_0^1 = 2$$

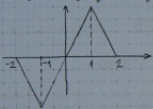
$$a_n = 2 \int_0^1 2x \cdot \cos n\pi x dx = \dots = \frac{4}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1), n \in \mathbb{N},$$

за $n=2k \Rightarrow a_{2k} = 0$,

за $n=2k+1 \Rightarrow a_{2k+1} = \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2}$

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{2n\pi x}{b-a} = \boxed{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8}{(2k+1)^2\pi^2} \cdot \cos(2k+1)\pi x = g(x)} \quad \begin{matrix} g(x) = f(x) \\ \text{за } x \in [0, 2] \end{matrix}$$

Синусни Фурјеов ред:



$$R(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 2] \\ -f(x), & x \in [-2, 0] \end{cases} \Rightarrow \text{НЕПАРНА Ф.Я}$$

$\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \int_0^2 f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 2x \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (4-2x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$\boxed{b_n = \frac{16}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}}$$

за $n=2k \Rightarrow b_{2k} = 0$

за $n=2k+1 \Rightarrow b_{2k+1} = \frac{16 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{2}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}, \quad g(x) = f(x) \text{ за } x \in [0, 2].$$

- РЕШАВАЊЕ ДИФ. Ј-НА ПОМОЌУ СТЕПЕНИХ РЕДОВА -

17.04.2002.

33) ПОМОЌУ СТЕПЕНОГ РЕДА НАЋИ ОНО РЕШЕЊЕ ДИФ. Ј-НЕ

$$y'' + 2xy' + 4y = 0$$

КОЈЕ ЗАДОВОЉАВА УСЛОВЕ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \hat{a}_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \hat{a}_1 + 2a_2 x + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Из услова имамо:

$$y(0) = \hat{a}_0 = 0 \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0$$

$$y'(0) = \hat{a}_1 = 1 \quad (2)$$

$$\underline{y'' + 2xy' + 4y = 0} \quad (\text{извод})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

Ода све x -ове прело доведати на x^n . (Јога се еквивалентни израза, индекс се спокује)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

$n=0$

$$(0+2) \cdot (0+1) \cdot a_{0+2} \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n +$$

$$+ 4 a_0 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n x^n = 0$$

$$\underbrace{4a_0 + 2a_2}_{\text{I}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} + 2n a_n + 4a_n]}_{\text{II}} \cdot x^n = 0$$

$$I) 4a_0 + 2a_2 = 0 \quad \boxed{a_2 = 0}$$

$$\text{и тако: } \boxed{a_0 = 0}$$

$$II) (n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} + 2 \cdot (n+2) \cdot a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-2 \cdot (n+2) \cdot a_n}{(n+2) \cdot (n+1)} \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = -\frac{2a_n}{n+1}} \Rightarrow a_{2+2} = a_4 = -\frac{2 \cdot a_2}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2k} = 0} \text{ - Сви парни су нула!}$$

$$a_{1+2} = a_3 = -\frac{2 \cdot a_1}{2} = -a_1 = -1$$

$$a_{3+2} = a_5 = -\frac{2 \cdot a_3}{4} = -\frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$a_{5+2} = a_7 = -\frac{2 \cdot a_5}{6} = -\frac{1}{3} a_5 = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

$$a_{7+2} = a_9 = -\frac{2 \cdot a_7}{8} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{48}$$

$$n=?$$

$$n+2 = 2k+1$$

$$\boxed{n = 2k-1}$$

↓

$$a_{2k+1} = \frac{-2 \cdot a_{2k-1}}{2k-1+1} = -\frac{a_{2k-1}}{k} =$$

$$= -\frac{1}{k} \cdot \frac{-2 \cdot a_{2k-3}}{k-2} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot a_{2k-3}$$

$$\boxed{a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{k!}} \quad \Leftarrow$$

$$\boxed{2k-1 = n+2 \Rightarrow n = 2k-3}$$

Дакле решење диф ј-не изгледа овако:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cdot x^{2k+1}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^k}{k!} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\text{ТАБЛИЧНИ: } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x \cdot e^{-x^2}} \text{ - решење диференцијалне једначине!}$$

24) Наћи оно решење диф ј-не $x \cdot (x+1) \cdot y'' + (3x+2) \cdot y' + y = 0$, које се може развити у степени ред у околини нуле, сумирати, а затим наћи опште решење.

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$x \cdot (x+1) y'' + (3x+2) y' + y = 0$$

$$(x^2+x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + (3x+2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot (n+1-1) a_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n a_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^n + 2a_1 \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} \cdot x^n + 3a_1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} 3n a_n \cdot x^n +$$

$$+ 2a_1 + 4a_2 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} \cdot x^n + a_0 + a_1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$(a_0 + 2a_1) + (4a_1 + 6a_2) \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n + (n+1)n a_{n+1} + 3n a_n + 2(n+1) a_{n+1} + a_n] \cdot x^n = 0$$

$$1) a_0 + 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$2) 4a_1 + 6a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{2}{3} a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3} a_0$$

$$3) n(n-1) a_n + (n+1)n a_{n+1} + 3n a_n + 2(n+1) a_{n+1} + a_n = 0$$

$$(n^2 - n + 3n + 1) a_n + (n^2 + n + 2n + 2) a_{n+1} = 0$$

$$(n^2 + 2n + 1) a_n + (n^2 + 3n + 2) a_{n+1} = 0$$

$$(n+1)^2 a_n + (n+1) \cdot (n+2) \cdot a_{n+1} = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{-(n+1)^2 a_n}{(n+1) \cdot (n+2)} \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{n+1}{n+2} a_n$$

Поэтому для $n \geq 2$ можно довести и дальше до a_{n-2} :

$$a_{n+1} = -\frac{n+1}{n+2} a_n = -\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(-\frac{n}{n+1} a_{n-1}\right) = -\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(-\frac{n-1}{n}\right) a_{n-2} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$$

$$\text{3A } n=2: a_3 = -\frac{1}{4} a_0$$

$$\text{3A } n=3: a_4 = -\frac{2}{5} a_2 = -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3} a_0\right) = \frac{1}{5} a_0$$

$$\text{3A } n=4: a_5 = -$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} a_0, a_2 = \frac{1}{3} a_0, a_3 = -\frac{1}{4} a_0 \\ a_4 &= \frac{1}{5} a_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{n+2} a_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^n \quad (\text{ПОНИМЕНО ЗАМЕНАРИТИ } a_n)$$

$$y = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1} = S(x) /'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1) \cdot x^n}{n+1} = S'(x)$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \xrightarrow{\text{ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ}} \frac{1}{1+x}$$

$$S(x) = \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow S(x) = \ln|1+x| + C$$

$$y_1 = \frac{1}{x} \ln|1+x| \quad - \text{ОДНО ПАРТИКУЛЯРНО РЕШЕНИЕ}$$

- Другое партикулярно решение же:

$$y'' + \frac{3x+2}{x \cdot (x+1)} \cdot y' + \frac{1}{x \cdot (x+1)} \cdot y = 0$$

ОБЛИК:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{3x+2}{x \cdot (x+1)} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x \cdot (x+1)}$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+x} dx &= 3 \int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+x} = \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+x} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x)}{x^2+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+x| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \ln|x^2+x| + \frac{1}{2} \int \frac{d(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})}{(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}})^2 - 1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+x| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{2x+1}{2}}{2x+1} \right| = \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|2x| - \frac{1}{2} \ln|2 \cdot (x+1)| = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| = 2 \ln|x| - \ln|x+1| \\ &= \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right|, \quad e^{-\ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right|} = \frac{1}{e^{\ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right|}} = \frac{1}{\left| \frac{x^2}{x+1} \right|} = \frac{1 \cdot |x+1|}{x^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{\frac{1 \cdot |x+1|}{x^2}}{\frac{3}{2} \ln|x+1|} = \int \frac{1 \cdot |x+1|}{\ln^2|x+1|} dx \dots$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{x}$$

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 \Rightarrow y = C_1 \cdot \ln \frac{1+x}{x} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \quad - \text{ОПШЕ РЕШЕНИЕ!}$$

РЕШАВАЊЕ ДИФ. Ј-НА ПОМОЋУ ФУРИЈЕВИХ РЕДОВА

35) Развити функцију $f(x) = \sin(x)$ у Фуријеов ред са интервалом $[-\pi, \pi]$, па решити диференц. једн. $y'' + y = f(x)$.

Фју $f(x)$ смо развили у Фуријеов ред у 21 задатку:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1) \cdot x)}{2k-1}, \text{ па диференцијална једначина гласи:}$$

$$y'' + y = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-1} \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i$$

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$$

$$\boxed{y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x} - \text{ХОМОГЕНО РЕШЕЊЕ}$$

$$y'' + y = \frac{4}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{1}}_{y_1} + \frac{4}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{3}}_{y_2} + \frac{4}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\sin 5x}{5}}_{y_3} + \dots + \frac{4}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}}_{y_k}$$

(СВАКОМ ОДГОВАРА ПОЈЕДНО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ)

$$[f(x) = \sin x \Rightarrow \sin x = \sin(0 + x) \Rightarrow \sin x \Rightarrow \text{КОРРЕКТНО: } n = k-1]$$

$$y_1 = x \cdot (A \cdot \cos x + B \cdot \sin x), y_1' = A \cdot \cos x + B \sin x + x \cdot (-A \sin x + B \cos x)$$

$$y_1'' + y_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \sin x \quad y_1'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x \cdot (-A \cos x - B \sin x)$$

$$-A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x \cdot (-A \cos x - B \sin x) = \frac{4}{\pi} \sin x$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \frac{4}{\pi} \sin x$$

$$-2A = \frac{4}{\pi} \quad \boxed{A = -\frac{2}{\pi}}$$

$$2B = 0 \quad \boxed{B = 0}$$

$$\boxed{y_1 = -\frac{2}{\pi} \cdot x \cdot \cos x} - \text{ЈЕДНО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ}$$

$$y_k = A_k \cdot \cos((2k-1) \cdot x) + B_k \cdot \sin((2k-1) \cdot x)$$

$$y_k'' + y_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

$$y_k'' = -A_k \sin((2k-1)x) \cdot (2k-1) + B_k \cos((2k-1)x) \cdot (2k-1)$$

$$y_k'' = -A_k \cos((2k-1)x) \cdot (2k-1)^2 - B_k \sin((2k-1)x) \cdot (2k-1)^2$$

$$-A_k \cos((2k-1)x) \cdot (2k-1)^2 - B_k \sin((2k-1)x) \cdot (2k-1)^2 + A_k \cos((2k-1)x) + B_k \sin((2k-1)x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

$$\cos(2k-1)x \cdot (-A_k \cdot (2k-1)^2 + A_k) + \sin(2k-1)x \cdot (-B_k \cdot (2k-1)^2 + B_k) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \sin(2k-1)x$$

$$-A_k \cdot ((2k-1)^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{A_k = 0}$$

$$-B_k \cdot ((2k-1)^2 - 1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

$$-B_k \cdot (4k^2 - 4k) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

$$-A_k \cdot (k^2 - k) B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1} \Rightarrow B_k = \frac{-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}}{k^2 - k} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k-1) \cdot (k^2 - k)} =$$

$$\Rightarrow B_k = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot (2k-1)}$$

$$C: (k-1) \cdot (2k-1)$$

$$y_k = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot (2k-1)} \cdot \sin(2k-1)x$$

Дакле партикуларно решење је:

$$y_p = y_1 + \sum_{k=2}^{\infty} y_k = -\frac{2}{\pi} \cdot x \cdot \cos x - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{k \cdot (k-1) \cdot (2k-1)}$$

$y_p = y_1 + \sum_{k=2}^{\infty} y_k \rightarrow y_1$ се посебно рачуна зато што има карактеристи. чл^е нулу, вишеструкости $k=1$

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{2}{\pi} \cdot x \cdot \cos x - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{k \cdot (k-1) \cdot (2k-1)} \quad \text{— Опште решење}$$

38) Развити функцију $f(x) = |\sin x|$ у Фурјеов ред на интервалу дужине π . Користећи овај развој наћи опште решење диф. ј-не:

$$y'' + 4y = f(x).$$

Ф-ју $f(x)$ смо развили у Фурјеов ред у 22 задатку:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}, \text{ ао диференцијално једначина гласи:}$$

$$y'' + 4y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

$$y'' + 4y = 0$$

$$r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow r_1 = 2i, r_2 = -2i$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos 2x; y_2 = \sin 2x$$

$$\boxed{y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x} \quad \text{— хомогено решење}$$

$$y'' + y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos 2x}{3} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos 4x}{15} - \dots - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$$

$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_k$

$$1) y_0 = A$$

$$y_0'' + 4y_0 = \frac{2}{\pi}, \quad y_0' = 0$$

$$\Rightarrow 4A = \frac{2}{\pi} \Rightarrow A = \frac{1}{2\pi} = \boxed{y_0 = \frac{1}{2\pi}} - \text{ПАРТИКУЛЯРНО РЕШЕНИЕ}$$

$$2) \pi = 2\ell \Rightarrow \beta = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ХАРАКТЕРИСТИЧНА ЧИСЛА} \quad K=1 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\cos 2x}{3} \Rightarrow \beta = 2$$

$$y_1 = x \cdot (A \cdot \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$y_1'' + 4y_1 = \frac{4}{\pi} \frac{\cos 2x}{3}, \quad y_1' = A \cos 2x + B \sin 2x + x \cdot (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$y_1'' = -A \sin 2x + B \cos 2x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x \cdot (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)$$

$$-A \sin 2x + B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 4x \cdot A \cos 2x - 4x \cdot B \sin 2x +$$

$$+ 4xA \cos 2x + 4xB \sin 2x = \frac{4}{3\pi} \sin 2x$$

$$\sin 2x \cdot (-3A) + \cos 2x \cdot (3B) = -\frac{4}{3\pi} \cdot \sin 2x$$

$$\boxed{A = 0}$$

$$3B = -\frac{4}{3\pi} \Rightarrow B = -\frac{4}{9\pi}$$

$$\boxed{y_1 = -\frac{4}{3\pi} x \cdot \sin 2x} - \text{ПАРТИКУЛЯРНО РЕШЕНИЕ}$$

$$3) y_k = A_k \cdot \cos 2Kx + B_k \cdot \sin 2Kx$$

$$y_k'' + 4y_k = -\frac{4}{\pi} \frac{\cos 2Kx}{4K^2 - 1}$$

$$y_k' = -2KA_k \sin 2Kx + 2KB_k \cos 2Kx$$

$$y_k'' = -4K^2 A_k \cos 2Kx - 4K^2 B_k \sin 2Kx$$

$$-4K^2 A_k \cos 2Kx - 4K^2 B_k \sin 2Kx + 4A_k \cos 2Kx + 4B_k \sin 2Kx = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4K^2 - 1} \cdot \cos 2Kx$$

$$\cos 2Kx \cdot (-4K^2 A_k + 4A_k) + \sin 2Kx \cdot (-4K^2 B_k + 4B_k) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4K^2 - 1} \cdot \cos 2Kx$$

$$(-4K^2 + 4) \cdot A_k = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4K^2 - 1}$$

$$(K^2 - 1) \cdot A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4K^2 - 1} \Rightarrow \boxed{A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(K^2 - 1) \cdot (4K^2 - 1)}}$$

$$(-4K^2 + 4) \cdot B_k = 0 \Rightarrow \boxed{B_k = 0}$$

$$\boxed{y_k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(K^2 - 1) \cdot (4K^2 - 1)} \cdot \cos 2Kx}$$

$$y_p = y_0 + y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{2\pi} - \frac{4}{9\pi} x \cdot \sin 2x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(K^2 - 1) \cdot (4K^2 - 1)} \cdot \cos 2Kx} - \text{ПАРТИКУЛЯРНО РЕШЕНИЕ}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p} - \text{ОБЩЕ РЕШЕНИЕ}$$

- ПОВРШ ЗАДАТА ПАРАМЕТАРСКИ:

$$\rho: \vec{r} = r(u, v)$$

$$g_{11} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \quad \text{СКЛАП}$$

$$g_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$$

$$g_{22} = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

КОСИНУС УГЛА ИЗМЕЈУ ДВЕ ПОВРШИН ЈЕ:

$$\cos \theta = \frac{g_{11} du dv + g_{12} (du dv + dv du) + g_{22} dv dv}{\sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2} \cdot \sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} dv du + g_{22} dv^2}}$$

$$A = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2$$

(МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД)

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{uu}; \vec{r}_u; \vec{r}_v]$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{uv}; \vec{r}_u; \vec{r}_v]$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{vv}; \vec{r}_u; \vec{r}_v]$$

$$B = 2g_{12} \cdot b_{12} - b_{11} \cdot g_{22} - b_{22} \cdot g_{11}$$

I КВАДРАТНА ФОРМА:

$$2g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2$$

$$b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2 - \text{II КВАДРАТНА ФОРМА}$$

$$C = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12}^2$$

$$K_g = \frac{C}{A} - \text{ГЛУСОВА КРИВИНА} \quad ; \quad \text{НОРМАЛНА КРИВИНА} = \frac{\text{I КВАДРАТНА ФОРМА}}{\text{II КВАДРАТНА ФОРМА}}$$

$$H = -\frac{B}{2A} - \text{СРЕДИНА КРИВИНЕ}$$

$$AK^2 + BK + C = 0$$

$$K_1, K_2 - \text{ГЛАВНЕ КРИВИНЕ} \quad ; \quad R_1 = \frac{1}{K_1}, R_2 = \frac{1}{K_2} - \text{ГЛАВНИ ПОЛУПРЕЧНИЦИ КРИВИНА}$$

АКО ЈЕ: $K_g > 0$ - ЕЛИПТИЧКЕ

$K_g = 0$ - ПАРАБОЛИЧКЕ

$K_g < 0$ - ХИПЕРБОЛИЧКЕ

- ЈЕДНАЧИНА АСИМПТОТСКИХ ЛИНИЈА:

$$b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2 = 0$$

- ЈЕДНАЧИНА ЛИНИЈА КРИВИНА:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du dv & dv^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

1) $\vec{r} = (\cos u - u \sin u; \sin u + u \cos u; 2u + 2)$

a) Израчунати glavne kривине, Гаусову кривину, средњу кривину у произволној тачки;

б) Показати да кроз сваку регуларну тачку површи пролази једна асимптотска линија, да је то права, и да све те праве заклапају исти угао са z -осом;

в) Наћи линије кривина

г) Увести нову параметризацију тако да линије кривина буду координатне линије.

а) Прво рачунамо изводе: $\vec{r}_u = (\vec{r})'_u$, $\vec{r}_v = (\vec{r})'_v$

$$\vec{r}_u = (-\sin u; \cos u; 2)$$

$$\vec{r}_v = (-\sin u - u \cos u; \cos u - u \sin u; 2)$$

$$g_{11} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = (-\sin u; \cos u; 2) \cdot (-\sin u; \cos u; 2) = \sin^2 u + \cos^2 u + 4 = 5$$

$$g_{12} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = (-\sin u; \cos u; 2) \cdot (-\sin u - u \cos u; \cos u - u \sin u; 2) =$$

$$= \sin^2 u + u \sin u \cos u + \cos^2 u - u \sin u \cos u + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$g_{22} = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = (-\sin u - u \cos u; \cos u - u \sin u; 2) \cdot (-\sin u - u \cos u; \cos u - u \sin u; 2) =$$

$$= \sin^2 u + u \sin u \cos u + u \sin u \cos u + u^2 \cos^2 u + \cos^2 u - u \sin u \cos u -$$

$$- u \sin u \cos u + u^2 \sin^2 u + 4 = 1 + u^2 + 4 = 5 + u^2$$

$$A = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 5(5 + u^2) - 25 = 25 + 5u^2 - 25 = 5u^2$$

- Други изводи:

$$\vec{r}_{uu} = (\vec{r}_u)'_u; \quad \vec{r}_{uv} = (\vec{r}_u)'_v; \quad \vec{r}_{vv} = (\vec{r}_v)'_v$$

$$\vec{r}_{uu} = (0; 0; 0)$$

$$\vec{r}_{uv} = (-\cos u; -\sin u; 0)$$

$$\vec{r}_{vv} = (-\cos u - u \sin u; -\sin u + u \cos u; 0)$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{A}} [\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v, \vec{r}_v] = \frac{1}{\sqrt{5u^2}} \begin{bmatrix} 0 & \cos u & 2 \\ -\sin u & \cos u - u \sin u & 2 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{A}} [\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{1}{\sqrt{5u^2}} \begin{bmatrix} -\cos u & \cos u & 2 \\ -\sin u & \cos u - u \sin u & 2 \\ -\sin u - u \cos u & \cos u - u \sin u & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5u^2}} \cdot (-\cos u \cdot (2 \cos u - 2 \cos u + 2u \sin u) + \sin u \cdot (-2 \sin u + 2 \sin u + 2u \cos u) -$$

$$- (-\sin u - u \cos u) \cdot (2 \sin u + 2 \sin u + 2u \cos u)) = 0$$

$$G_{22} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{0u}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{1}{\sqrt{5u^2}} \cdot \begin{bmatrix} -\cos u + u \sin u & -\sin u - u \cos u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 2 \\ -\sin u - u \cos u & \cos u - u \sin u & 2 \end{bmatrix} = -\frac{2u}{\sqrt{5}}$$

$$C = G_{11} \cdot G_{22} \cdot G_{12}^2 = 0 \cdot \frac{2u}{\sqrt{5}} - 0 = 0$$

$$B = 2g_{12} G_{12} - G_{11} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{11} = 2 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot (5+u^2) - \frac{2u}{\sqrt{5}} \cdot 5 = -2\sqrt{5}|u|$$

$$K_g = \frac{C}{A} = \frac{0}{5u^2} = 0 \Rightarrow \text{крива је параболничког типа (Гаусова кривина)}$$

$$H = -\frac{B}{2A} = +\frac{2\sqrt{5}|u|}{10u^2} = \frac{2\sqrt{5}|u|}{2 \cdot 5 \cdot u^2} = \frac{+1}{\sqrt{5} \cdot |u|} - \text{средина криве}$$

- Сада можемо наћи главне кривине:

$$AK^2 + BK + C = 0$$

$$5u^2 K^2 - 2\sqrt{5}|u|K = 0$$

$$K_{1,2} = \frac{2\sqrt{5}|u| \pm \sqrt{20u^2 - 4 \cdot 5u^2 \cdot 0}}{10u^2} = \frac{2\sqrt{5}u \pm 2\sqrt{5}u}{10u^2} = \boxed{K_1 = 0}, K_2 = \frac{4\sqrt{5}u}{10u^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5u}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{2}{\sqrt{5}u}}$$

б) - Регуларне тачке су тачке у којима је $A \neq 0$.

Дакле $K_1 = 0$ није регуларна тачка.

Да би $K_2 = \frac{2}{\sqrt{5}u}$ била регуларна тачка мора бити испуњено:

$$\sqrt{5} \cdot u \neq 0 \Rightarrow u \neq 0$$

У тачки K_2 можемо да нађемо асимптоте линије:

$$G_{11} du^2 + 2G_{12} du dv + G_{22} dv^2 = 0 - \text{једногласна асимптотичке линије}$$

$$\frac{2|u|}{\sqrt{5}} \cdot dv^2 = 0$$

$$dv = 0 \quad / \int$$

$$\int dv = 0$$

$$v - C_1 = 0$$

$$v = C_1$$

$$\text{- Асимптоте линије су: } \begin{cases} v = C_1 \\ r = \vec{r}(u, 0) \end{cases}$$

$$\vec{r} = (\cos u - u \sin u, \sin u + u \cos u, 2u + 2v)$$

$$\Rightarrow x = \cos u - u \sin u = \cos C_1 - u \sin C_1$$

$$u = \frac{x - \cos C_1}{-\sin C_1}$$

$$y = \sin u + u \cos u = \sin C_1 + u \cos C_1 \Rightarrow$$

$$u = \frac{y - \sin C_1}{\cos C_1}$$

$$z = 2u + 2v = 2u + 2C_1$$

$$u = \frac{z - 2C_1}{2}$$

ПА ЈЕ ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ:

$$\frac{x - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{y - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{z - 2}{2}$$

- ПИТАЊЕ ЈЕ БИЛО ДА ЛИ СВЕ ПРАВЕ ЗАКЛАПАЈУ ИСТИ УГАО СА Z-ОСОМ

ВЕКТОР ТИХ ПРАВИХ ЈЕ: $(-\sin \alpha; \cos \alpha; 2)$

ВЕКТОР Z-ОСЕ ЈЕ: $(0, 0, 1)$

МОЖЕМО НАћи COS УГЛА ИЗМЕЂУ ТА ДВА ВЕКТОРА:

$$\cos \alpha = \frac{(-\sin \alpha; \cos \alpha; 2) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 4} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, ДАКЛЕ, СВЕ ПРАВЕ ЗАКЛАПАЈУ ИСТИ УГАО СА Z-ОСОМ

6) ЛИНИЈЕ КРИВИНА:

ЈЕДНАЧИНА ЛИНИЈЕ КРИВИНА: $\begin{bmatrix} \frac{du^2}{5} & -\frac{du dv}{5} & \frac{dv^2}{5+u^2} \\ \frac{g_{11}}{5} & \frac{g_{12}}{5} & \frac{g_{22}}{5+u^2} \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{du^2}{5} & -\frac{du dv}{5} & \frac{dv^2}{5+u^2} \\ 0 & 0 & \frac{2uv}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 5 \cdot \frac{2uv}{\sqrt{5}} du^2 + 5 \cdot \frac{2uv}{\sqrt{5}} du dv =$$

$$= \frac{10uv}{\sqrt{5}} (du^2 + du dv) = \frac{10uv}{\sqrt{5}} (dv \cdot (dv + du)) = 0$$

$$\Rightarrow dv = 0 \quad \text{или} \quad dv + du = 0$$

$$\int dv = 0 \quad \int (dv + du) = 0$$

$$v = C_1 \quad u + v = C_2 = 0$$

$$\begin{cases} v = C_1 \\ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} u = -v + C_2 \\ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 \\ v = -u + C_2 \Rightarrow u = C_2 - C_1 \end{cases}$$

7) - ДАКЛЕ САДА ИМАМО И U И V ИЗРАЧЕНО ПРЕКО НОВЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈЕ

$$u = C_1 \quad u = C_2 - C_1$$

$$\vec{r} = (\cos \alpha - (C_2 - C_1) \sin \alpha; \sin \alpha + (C_2 - C_1) \cos \alpha; 2C_2)$$

$$8) \Gamma: \vec{r} = (uv; u^2 + v^2; u^2 - v^2)$$

а) НАћи АСИМПТОТСКЕ ЛИНИЈЕ ПОВРШИ И НАћи КОЈЕ СУ ТО КРИВЕ.

б) НАћи КОСИНУС УГЛА ИЗМЕЂУ КРИВИХ ДАТИХ ЈЕДНАЧИНАМА:

$v = 2 - u$
 $u = u^2$ У ОНОЈ ПРЕСЕЧНОЈ ТАЧКИ КОЈА ИМА ПОЗИТИВНУ АПЦИСУ.

в) НАћи НОРМАЛНУ КРИВИНУ ПОВРШИ У ТАЧКИ $M(1, 2, 0)$ У ПРАВЦУ КРИВЕ $v = u^2$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{r}_u &= (u; 2u; 2u) & \vec{g}_1 &= (v, 2u, 2u) \cdot (u, 2u, 2u) = u^2 + 4u^2 + 4u^2 = u^2 + 8u^2 \\
 \vec{r}_v &= (u; 2v; -2v) & \vec{g}_2 &= (v, 2u, 2u) \cdot (u, 2v, -2v) = uv + 4uv - 4uv = uv \\
 \vec{r}_{uv} &= (0; 2; 2) & \vec{g}_{22} &= (u, 2v, -2v) \cdot (u, 2v, -2v) = u^2 + 4v^2 + 4v^2 = u^2 + 8v^2 \\
 \vec{r}_{uv} &= (1; 0; 0) \\
 \vec{r}_{vv} &= (0; 2; -2)
 \end{aligned}$$

$$A = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = (u^2 + 8u^2) \cdot (u^2 + 8v^2) - u^2 u^2 = 8 \cdot (u^4 + 8u^2 v^2 + v^4)$$

$$C_{11} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 8v^2$$

$$C_{12} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = -\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 8uv$$

$$C_{22} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot [\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 8u^2$$

- ЈЕДНАЧИНА АСИМПТОТСКИХ ЛИНИЈА:

$$C_{11} du^2 + 2C_{12} du dv + C_{22} dv^2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 8v^2 du^2 - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot 8uv du dv + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot 8u^2 dv^2 = 0 \quad / : \frac{8}{\sqrt{A}}$$

$$v^2 du^2 - 2uv du dv + u^2 dv^2 = 0$$

$$(v du - u dv)^2 = 0$$

$$v du - u dv = 0$$

$$v du = u dv$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dv}{v} \Rightarrow \ln|u| + C_2 = \ln|v| + C_3$$

$$\ln|u| = \ln|v| + \ln|C_1|$$

$$\ln|u| = \ln|v \cdot C_1|$$

$$\Rightarrow \boxed{u = C_1 v}$$

(

- ЈЕДНА ФАМИЛИЈА АСИМПТОТСКИХ КРИВИХ ЈЕ:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = C_1 v \\ \vec{r} = (uv, u^2 + v^2, u^2 - v^2) \end{cases}$$

$$x = u \cdot v = C_1 \cdot v \cdot v = C_1 v^2$$

$$y = u^2 + v^2 = C_1^2 \cdot v^2 + v^2 = v^2 \cdot (C_1^2 + 1)$$

$$z = u^2 - v^2 = C_1^2 \cdot v^2 - v^2 = v^2 \cdot (C_1^2 - 1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 v^2 \\ y &= v^2 (C_1^2 + 1) \\ z &= v^2 (C_1^2 - 1) \end{aligned} \right\} \text{смена: } v^2 = t = \begin{cases} t = \frac{x}{C_1} \\ t = \frac{y}{C_1^2 + 1} \\ t = \frac{z}{C_1^2 - 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{C_1} = \frac{y}{C_1^2 + 1} = \frac{z}{C_1^2 - 1} = t \quad - \text{ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ (ТЕ КРИВЕ СЈ) ПРАВЕ}$$

б) КОСИНУС УГЛА ИЗМЕЂУ ДВЕ ПОВРШИН ЈЕ:

$$\cos \theta = \frac{z_{11} du_1 du_1 + z_{12} (du_1 du_2 + du_2 du_1) + z_{22} du_2 du_2}{\sqrt{z_{11} du_1^2 + 2z_{12} du_1 du_2 + z_{22} du_2^2} \cdot \sqrt{z_{11} du_1^2 + 2z_{12} du_1 du_2 + z_{22} du_2^2}}$$

- КРИВЕ СУ НА ПОЧЕТКУ ДАТЕ ЈЕДНАЧИНАМА:

$$U = 2 - u$$

$$U = u^2$$

$$du = -du$$

$$du = 2u du$$

- Тражимо тачку пресека кривих:

$$\vec{r} = (u; u^2 + u^2; u^2 - u^2) \quad \text{— ДАТО НА ПОЧЕТКУ ЗАМЕТКА}$$

Одговарајућом заменом добијамо две једначине:

$$\vec{r} = (u_1 \cdot (2 - u_1); u_1^2 + (2 - u_1)^2; u_1^2 - (2 - u_1)^2)$$

$$\vec{r} = (u_2 \cdot u_2^2; u_2^2 + u_2^4; u_2^2 - u_2^4)$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2u_1 - u_1^2 = u_2^2 \quad (1)$$

$$u_1 \cdot (2 - u_1) = u_2^3$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow u_1^2 + (2 - u_1)^2 = u_2^2 + u_2^4 \quad (2) \Rightarrow$$

$$u_1^2 + (2 - u_1)^2 = u_2^2 + u_2^4$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow u_1^2 - (2 - u_1)^2 = u_2^2 - u_2^4 \quad (3)$$

$$2u_1^2 = 2u_2^2 \Rightarrow$$

$$I) u_1 = u_2$$

$$\Rightarrow u_1^2 = u_2^2 \Rightarrow I) \boxed{u_1 = u_2} \quad II) \boxed{u_1 = -u_2}$$

$$u_1 \cdot (2 - u_1) = u_1^3$$

$$u_1 \cdot (u_1^2 + u_1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 \neq 0} \Rightarrow \boxed{u_1 \neq 0} \quad \text{— (ОСТАЈА ПОШТО ТО НИЈЕ РЕШЕЊЕ)}$$

ДРУГЕ ЖЕ

$$\Rightarrow u_1^2 + u_1 - 2 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = 1} \Rightarrow \boxed{u_2 = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 \neq 2} \Rightarrow \boxed{u_2 \neq 2}$$

ЈА ОВЕ ВРЕДНОСТИ ЛОЖИКА БИ БИЛА НЕГАТИВНА:

$$x = 2u_1 - u_1^2 - u_2^2 = -8 \quad \text{(ВИДЕЉ ВРЕДНОСТИ)}$$

$$II) u_1 = -u_2$$

$$-u_1 \cdot (2 + u_2) = u_2^3$$

$$u_2 \cdot (2 + u_2) + u_2^3 = 0$$

$$u_2 \cdot (u_2^2 + u_2 + 2) = 0$$

$$\boxed{u_2 \neq 0} \Rightarrow \boxed{u_2 \neq 0} \quad \text{— (ОСТАЈА ПОШТО НИЈЕ РЕШЕЊЕ ДРУГЕ ЖЕ)}$$

$$u_2^2 + u_2 + 2 = 0 \Rightarrow \text{НЕМА РЕАЛНИХ РЕШЕЊА}$$

Пресекална тачка је:

$$\vec{r} = (1, 2, 0) \Rightarrow P(1, 2, 0) = M$$

$$2u/p = u^2 + 8u^2 = 1 + 8 = 9$$

$$2u/p = u \cdot u = 1$$

$$2u/p = u^2 + 8u^2 = 1 + 8 = 9$$

- Косинус угла између ове две површи:

$$\cos \theta = \frac{9u^2 du + du \cdot 2u^2 du + (-du) du + 9(-du) \cdot 2u^2 du}{\sqrt{9du^2 - 2du^2 + 9du^2} \cdot \sqrt{9du^2 + 4du^2 + 36du^2}} =$$

$$= \frac{-8 du du}{4 du du} = -\frac{8}{28} = -\left[\frac{2}{7}\right]$$

из почетне ж-не

2) $M(1, 2, 0) \Rightarrow u = u^2 = 1$, нормална кривина)

$$u = u^2$$

$$\text{нормална кривина} = \frac{\text{I форма}}{\text{II форма}} = \frac{2u du^2 + 29u du du^2 + 2u du^2}{6u du^2 + 28u du du^2 + 6u du^2}$$

$$A = 8(u'' + 8u^2 u'' + u'') = 80$$

$$C_{11} = \frac{8}{180}|_M; C_{12} = -\frac{8}{180}|_M; C_{22} = \frac{8}{180}|_M$$

$$2u = 9|_M; 2u = 1|_M; 2u = 9|_M$$

$$u = u^2 \Rightarrow du = 2u du$$

$$\boxed{\text{нормална кривина}} = \frac{9du^2 + 4du^2 + 36du^2}{\frac{8}{180} du^2 - \frac{32}{180} du^2 + \frac{32}{180} du^2} = \frac{49 du^2}{\frac{8}{180} du^2} = \boxed{\frac{49 \cdot 180}{8}}$$

20.09.2001

3) Дата је површ

$$\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(u, v) = (e^{u \cos v}, u, e^{u \sin v}), -\infty < u < +\infty, 0 \leq v < 2\pi$$

4) Написати ж-ну површи Γ у облику $F(x, y, z) = 0$ и скицирати слику.

5) Одредити линије кривина дате површи. Које су то криве? У тачки $T(1, 0, 0)$ израчунати главне полупречнике кривина.

6) Наћи асимптотске линије дате површи. Показати да је то геометријско место тачака у којима се асимптотске линије секу под углом из круга. Одредити његов центар и полупречник и написати ж-не круга.

$$\Gamma: \vec{r} = (e^u \sin v, u, e^u \cos v), \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

$$a) \begin{cases} x = e^u \sin v \\ y = u \\ z = e^u \cos v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = e^{2u} \sin^2 v + e^{2u} \cos^2 v \\ x^2 + z^2 = e^{2u} = e^{2y} \quad / \sqrt{} \\ 2y = \ln(x^2 + z^2) \\ y = \frac{\ln(x^2 + z^2)}{2} \end{cases}$$

- РОТАЦИОНА ПОВРШ (ОКО Y-ОСЕ)



$$b) \vec{r}_u = (e^u \sin v, 1, e^u \cos v)$$

$$\vec{r}_v = (e^u \cos v, 0, -e^u \sin v) \quad g_{11} = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u) = (e^{2u} \sin^2 v + 1 + e^{2u} \cos^2 v) = e^{2u} + 1$$

$$\vec{r}_{uv} = (e^u \cos v, 0, -e^u \sin v) \quad g_{12} = 0$$

$$\vec{r}_{vv} = (-e^u \sin v, 0, e^u \cos v) \quad g_{22} = e^{2u}$$

$$\vec{r}_{vu} = (-e^u \sin v, 0, e^u \cos v) \quad A = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (e^{2u} + 1) \cdot e^{2u} = e^{4u} + e^{2u}$$

$$A = e^{2u} (e^{2u} + 1) \Rightarrow \sqrt{A} = e^u \cdot \sqrt{e^{2u} + 1} = W$$

$$b_{11} = -\frac{e^{2u}}{W}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{e^{2u}}{W}$$

$$- \text{Асимптотске линије: } b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2 = 0$$

$$-\frac{1}{W} e^{2u} du^2 + \frac{1}{W} e^{2u} dv^2 = 0$$

$$\frac{e^{2u}}{W} \cdot (-du^2 + dv^2) = 0 \Leftrightarrow dv^2 = du^2 \Rightarrow dv = \pm du / \int$$

$$\int dv = \pm \int du$$

$$v = \pm u + C \Rightarrow \boxed{v = C \pm u} \Rightarrow$$

\Rightarrow ИМАМО ДВЕ ФАМИЛИЈЕ АСИМПТОТСКИХ ЛИНИЈА:

$$I \begin{cases} v = C + u \\ r = \vec{r}(u, v) \end{cases} \quad II \begin{cases} v = C - u \\ r = \vec{r}(u, v) \end{cases}$$

- Линије кривине:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du dv & dv^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (g_{11} b_{22} - b_{11} g_{22}) du dv = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = 0 \vee dv = 0$$

$$\boxed{u = C_1} \vee \boxed{v = C_2} \Rightarrow$$

\Rightarrow ИМАМО ДВЕ ФАМИЛИЈЕ ЛИНИЈА КРИВИНЕ:

$$I \begin{cases} u = C_1 \\ r = \vec{r}(u, v) \end{cases} \quad II \begin{cases} v = C_2 \\ r = \vec{r}(u, v) \end{cases} \quad - \text{ОВО СУ КООРДИНАТНЕ ЛИНИЈЕ}$$

$g_{12} = 0 \Rightarrow$ КООРДИНАТНЕ ЛИНИЈЕ СУ ОРТОГОНАЛНЕ!

- Главни полупречници кривина у тачки Т:

$$T(1, 0, 0) \Rightarrow u=0, v=\frac{\pi}{2}$$

$$g_{11}=2 \quad G_{11}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_{12}=0 \quad G_{12}=0$$

$$g_{22}=1 \quad G_{22}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_1=\frac{1}{K_1}; R_2=\frac{1}{K_2} - \text{полупречн. кр.}$$

$$AK^2+BK+C=0$$

$$A=2$$

$$B=2g_{12} \cdot G_{12} - G_{11} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=G_{11} \cdot G_{22} - G_{12}^2 = -\frac{1}{2}$$

$$2K^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}K - \frac{1}{2} = 0, \quad K_{1,2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + 4}}{4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{3}{\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, K_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{2}, R_2 = -2\sqrt{2} - \text{главни полупречници кривине}$$

б) - Угао између асимптотских линија:

$$a_1: v=c+u$$

$$a_2: v=c-u$$

$$dv=du$$

$$dv=-du$$

$$\cos \theta = \frac{g_{11} du du + 0 + g_{22} dv dv}{\sqrt{g_{11} du^2 + 0 + g_{22} dv^2} \sqrt{g_{11} du^2 + 0 + g_{22} dv^2}} = \frac{g_{11} du du - g_{22} du du}{\sqrt{g_{11} du^2 + g_{22} du^2} \sqrt{g_{11} du^2 + g_{22} du^2}} =$$

$$= \frac{g_{11} - g_{22}}{\sqrt{(g_{11} + g_{22})^2}} = \frac{g_{11} - g_{22}}{|g_{11} + g_{22}|} = \frac{e^{2u} + 1 \cdot e^{2u}}{|e^{2u} + 1 + e^{2u}|} = \frac{1}{2e^{2u} + 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\text{из угла}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2e^{2u} + 1 = 2$$

$$e^{2u} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2u = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \ln 2 \\ (v \in [0, 2\pi]) \end{cases}$$

$$y = u = -\frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow C(0, -\frac{1}{2} \ln 2, 0) - \text{центар круга}$$

$$\Rightarrow r^2 = x^2 + z^2 = e^{-\ln 2}$$

$$r = e^{-\ln 2}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \text{полупречник круга}$$

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \ln 2 - \text{једначина круга}$$

4) ДАТА ЈЕ ПОВРШ $\vec{r} = (u + \sin u, u \cos u, u + u)$.

а) ПОКАЗАТИ ДА ЈЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА РЕГУЛАРНА И НАПИСАТИ Ј-НУ ТЕ ПОВРШ У ДЕСАРТОВИМ КООРДИНАТАМА.

б) ИЗРАЧУНАТИ ГАУСОВУ И СРЕДЊУ КРИВИНУ У ПРОВОЉНОЈ ТОЧКИ ПОВРШ, КАО И ГЛОВНЕ КРИВИНЕ У ТОЧКИ $M(0, 1, 0)$. ПОМЕ ШКОЛУ ПРИКЛАДНОЈ ОВЕ ПОВРШ?

в) ПОКАЗАТИ ДА ПОВРШ ИМА ЈЕДНУ ПОРДИЦУ АСИМПТОТИСКИХ ЛИНИЈА И ДА СУ ИО ПРАВЕ. НАПИСАТИ КАНОНСКЕ Ј-НЕ ОВХ ПРОВАХ.

г) НАПИСАТИ ПАРАМЕТРИСКЕ ЈЕДНАКИНЕ ЛИНИЈА КРИВИНА.

д) ПОКАЗАТИ ДА ЈЕ ПОВРШ ЦИЛИНДРИКА И ОДРЕДИТИ Ј-НЕ ЈЕДНЕ ДИРЕКЦИЈСКЕ И НАЈИ ПРАВОУ ГЕНЕРАТРИСКЕ.

$$\vec{r} = (u + \sin u, u \cos u, u + u)$$

$$\begin{cases} x = u + \sin u \\ y = u \cos u \\ z = u + u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - u = \sin u \\ y - u = \cos u \\ u = z - u \end{cases}$$

$$(x - u)^2 + (y - u)^2 = 1$$

$$(x - y)^2 = (\sin u - \cos u)^2$$

$$(x - y)^2 = \sin^2 u - 2 \sin u \cos u + \cos^2 u$$

$$(x - y)^2 = 1 - 2 \sin u \cos u$$

$$(x - y)^2 = 1 - \sin 2u \Rightarrow \sin 2u = 1 - (x - y)^2$$

$$\vec{r}_u = (1, \cos u, 1)$$

$$g_{11} = 3$$

$$\vec{r}_v = (\cos u, -\sin u, 1)$$

$$g_{22} = \cos^2 u + \sin^2 u + 1$$

$$\vec{r}_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$g_{12} = 0$$

$$\vec{r}_{uu} = (-\sin u, -\cos u, 0)$$

$$g_{33} = 0$$

$$\vec{r}_{uv} = (-\sin u, -\cos u, 0)$$

$$g_{12} = 0$$

$$g_{33} = \frac{1}{W}$$

$$\begin{vmatrix} -\sin u & -\cos u & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos u & -\sin u & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{W} (-\sin u (1 + \sin u) - \cos u (1 - \cos u)) =$$

$$= \frac{1}{W} (-\sin u - \sin^2 u - \cos u - \cos^2 u) = \frac{1}{W} (-\cos u - \sin u - 1)$$

$$W = \sqrt{A}$$

$$A = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 3 \cdot 2 - ((\cos u - \sin u) + 1)^2 = 6 - (\cos^2 u - 2 \sin u \cos u + \sin^2 u + 2 \cos u - 2 \sin u + 1) = 4 + 2 \sin u - 2 \cos u + \sin 2u$$

За $\forall(u, v)$, $A \neq 0 \Rightarrow$ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ЈЕ РЕГУЛАРНА!

b) $K_g = ?$

$$C = 6_{11} \cdot 6_{22} - 6_{12}^2 = 0$$

$$K_g = \frac{C}{A} = 0 - \text{добрини су хиперболички линије}$$

$$H = ?$$

$$B = 2g_{12} \cdot 6_{12} - 6_{11} \cdot g_{22} - 6_{22} \cdot g_{11}$$

$$B = -\frac{3}{W} \cdot (\cos v - \sin u - 1)$$

$$H = -\frac{B}{2A} = \frac{\frac{3}{2A} \cdot (\cos v - \sin u - 1)}{2A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(\cos v - \sin u - 1)}{A^{3/2}}$$

За тачку $M(0, 1, 0)$:

$$\Rightarrow u=0, v=0$$

$$A=2, B=-\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = 3\sqrt{2}, C=0$$

$$2K^2 + 3\sqrt{2}K = 0$$

$$K \cdot (2K + 3\sqrt{2}) = 0$$

$$\boxed{K_1 = 0}, 2K_2 = -3\sqrt{2}$$

$$\boxed{K_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

- Главне кривине за тачку $M(0, 1, 0)$

в) Асимптотичке линије:

$$6_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + 6_{22} dv^2 = 0$$

$$\frac{1}{W} (\cos v - \sin u - 1) du^2 = 0$$

$$\Rightarrow du^2 = 0$$

$\boxed{v=C}$ - Једначина фамилија асимптотичких линија

$$\vec{r} = (u + \sin u, u + \cos u, u + C)$$

$$u = x - \sin u = y - \cos u, z = C \Rightarrow \text{КАНОНСКИ ОБЛИК 2-НЕ ПРАВЕ}$$

г) Једначине линија кривина:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du dv & dv^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ 0 & 0 & 6_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (g_{11} 6_{22}) dv^2 + (g_{12} 6_{22}) du dv = 0$$

$$\Rightarrow 6_{22} dv [(g_{11} dv + g_{12} du)] = 0$$

$$6_{22} dv [(2 \cos v - \sin u + 1) dv + 3 du] = 0$$

$$I) dv=0 \Rightarrow \boxed{v=C_1}$$

$$II) (2 \cos v - \sin u + 1) dv = -3 du / \int \Rightarrow \sin u + \cos v + u = -3u - C_2$$

$$\boxed{u = \frac{1}{4}(C_2 - \sin u - \cos v - C_1)}$$

⇒ Постављамо две параметричне линије кривине:

(и оне у параметричком облику излажу боље.)

$$I) \vec{r}(u) = (u^2 \sin u, u + \cos u, u + u)$$

$$II) \vec{r}(u) = \left(\frac{1}{3}(u^2 - \sin u - \cos u - u^3) + \sin u, \frac{1}{3}(u^2 - \sin u - \cos u - u^3) + \cos u, \frac{1}{3}(u^2 - \sin u - \cos u - u^3) + u \right)$$

$$g) \vec{r} = (u + \sin u, u + \cos u, u + u)$$

$$\vec{r}(u,0) = \underbrace{u(1,1,1)}_{\text{ПРАВЦИ ГЕНЕРАТРИСЕ}} + \underbrace{u(\sin u, \cos u, 0)}_{\text{ДИРЕКТРИСЕ}}$$

14.07.2000

5) Постави с да ли је савршен векторском једначином:

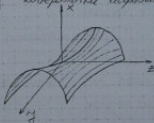
$$\vec{r} = (-4uv, v-u, v+u)$$

a) Написати једначину саврши с у декартовим координатама и скицирати слику.

b) Наћи асимптотске линије саврши и уверити се да су то две породице прaviх линија. Наћи за тим угао између асимптотских линија које садрже тачку $M(0,1,-1)$.

c) Написати још једну параметризацију ово саврши.

$$a) \begin{cases} x = -4uv \\ y = v-u \\ z = v+u \end{cases} \quad S: \quad \boxed{x = y^2 - z^2} \quad \text{хиперболски параболоид}$$



$$d) \vec{r} = (-4uv, v-u, v+u)$$

$$g_u = 16v^2 + 2$$

$$g_{11} = 0$$

$$\vec{r}_u = (-4v, -1, 1)$$

$$g_v = 16u^2$$

$$g_{12} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}_v = (-4u, 1, 1)$$

$$g_z = 16u^2 + 2$$

$$g_{22} = 0$$

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\Delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 32u^2 + 32v^2 + 4$$

$$\vec{r}_{uv} = (-4, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{vu} = (0, 0, 0)$$

б) Асимптотические линии поверхности:

$$6u \cdot du^2 + 26uv \cdot du dv + 6v^2 \cdot dv^2 = 0$$

$$\frac{16}{\sqrt{A}} du dv = 0$$

$$\Rightarrow du = 0 \vee dv = 0$$

$$\int du = 0 \quad \int dv = 0$$

$$u = C_1$$

$$v = C_2 \Rightarrow \text{асимптотические линии с координ. лин.$$

I формула: $u = C_1 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(v) = (-2C_1 v, v - C_1, v + C_1)$

$$\left. \begin{aligned} x &= -4C_1 v \\ y &= v - C_1 \\ z &= v + C_1 \end{aligned} \right\} \boxed{v = \frac{x}{-4C_1} = y + C_1 = z - C_1} \text{ - Ж-НА ПРЯМОЕ В КАНОНСКОМ ОБЛИКЕ}$$

II формула: $v = C_2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(u) = (-4C_2 u, C_2 - u, C_2 + u)$

$$\left. \begin{aligned} x &= -4C_2 u \\ y &= C_2 - u \\ z &= C_2 + u \end{aligned} \right\} \boxed{u = \frac{x}{-4C_2} = \frac{y - C_2}{-1} = \frac{z - C_2}{1}} \text{ - Ж-НА ПРЯМОЕ В КАНОНСКОМ ОБЛИКЕ}$$

$$\text{Зна } M(0, 1, -1) \Rightarrow \left. \begin{aligned} -4uv &= 0 \\ v - u &= 1 \\ v + u &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v &= 1 + u \\ 1 + u + u &= -1 \\ 2u &= -2 \Rightarrow u &= -1, v = 0 \end{aligned}$$

$$du = 0, dv = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

↳ по формуле

а) $x = y^2 - z^2$

$$y = v \cosh u; z = v \sinh u; x = v^2 (c^2 k^2 u - sh^2 u) = v^2 \Rightarrow \text{б) ?}$$

а) Једна је одбрана: $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u \sin v, u, u \cos v)$.

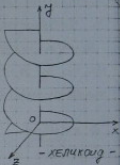
б) Најлакши је избор одбрана у декартовим координатама и окреним осима.

в) Одређити асимптотичке линије по другој одбрани и преузето уједначити које су то криве.

г) Које линије кривине по одбрани.

д) Изразити угао између кривих: $v = \text{const}$ (асимптотичка линија) и $u = v$ (крива по одбрани). Да ли по одбрани постоје угао $\pi/6$, односно, $\pi/3$, и ако постоје одређити их.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \begin{cases} x = u \sin v \\ y = u \\ z = u \cos v \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{z} = \frac{u \sin v}{u \cos v} = \tan v \\ \frac{x}{y} = \tan v \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = z \cdot \tan v} \\ & \text{— ЈА ХЕЛИКОИДА} \end{aligned}$$



б) $\vec{r} = \vec{r}(u \sin v, v, u \cos v)$

$\vec{r}_u = (\sin v, 0, \cos v)$ $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = 1 + u^2$

$\vec{r}_v = (u \cos v, 1, -u \sin v)$ $A = 1 + u^2$

$\vec{r}_{uv} = (0, 0, 0)$ $b_{11} = 0, b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{A}}, b_{22} = 0$

$\vec{r}_{vv} = (\cos v, 0, -\sin v)$

$\vec{r}_{vu} = (-\sin v, 0, -\cos v)$

- Асимптотичке линије:

$$b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2 = 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{A}} du dv = 0$$

$$\Rightarrow du = 0 \vee dv = 0$$

$$u = C_1 \vee v = C_2$$

И фамилија: $u = C_1, \vec{r}(v) = (C_1 \sin v, C_1, C_1 \cos v)$

$$\begin{cases} x = C_1 \sin v \\ y = C_1 \\ z = C_1 \cos v \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = C_1^2 \\ y = C_1 \end{cases} \text{ — Крст у равни } xOz$$

II ФАМИЛИЈА: $U = C_2$, $F(u) = (U \sin C_2, C_2, U \cos C_2)$

$$\begin{cases} X = U \sin \varphi_2 \\ Y = C_2 \\ Z = U \cos \varphi_2 \end{cases} \Rightarrow U = \frac{X}{\sin \varphi_2} = \frac{I - C_2}{0} = \frac{I}{\cos \varphi_2} \quad \text{I-на опоре}$$

6) типове кривине површи:

$$\begin{vmatrix} \frac{du^2}{g_{11}} & -\frac{du^1 du^2}{0} & \frac{du^2}{g_{22}} \\ 0 & g_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -g_{12} g_{22} du^2 + g_{11} g_{12} du^2 = 0$$

$$C_{12} \cdot (g_{44} du^2 - g_{22} dv^2) = 0$$

$$G_{12} \cdot (du^2 - (1+u^2)dv^2) = 0$$

$$(1+u^2) dv^2 = du^2$$

$$dV^2 = \frac{du^2}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow dv = \pm \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \int dv = \pm \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow v_1 = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C$$
$$v_2 = -\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C$$

Уплато две фамилије линија скупине поврени:

$$(19 = \pm \ln(u + \sqrt{1+u^2}))$$

$$\vec{r} = (u, v)$$

7) $l_1: v = \text{const}$ $l_2: u = v$

$$d\tilde{\sigma} = 0 \quad d\tilde{u} = d\tilde{v}$$

$$\cos \varphi = \frac{g_{11} du dv + g_{12}(du dv + dv du) + g_{22} dv dv}{\sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2} \cdot \sqrt{g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2}} = \frac{du dv}{\sqrt{du^2} \cdot \sqrt{dv^2 + (1+u^2) dv^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+u^2}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2+u^2}}$$

$$3A \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+u^2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{3(2+u^2)} \Rightarrow 4 = 6+3u^2 \Rightarrow u^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{нет вещественных решений!}$$

$$\text{3a } \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+u^2}} \Rightarrow 4 = 2+u^2 \Rightarrow u^2 = 2 \Rightarrow u = \pm\sqrt{2}$$

$$M \in \ell_2 \Rightarrow u = U = \pm \sqrt{2}$$

$$3A \quad u = v = \sqrt{2} \Rightarrow M_1(\sqrt{2} \sin \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2} \cos \sqrt{2})$$

$$3A \quad U = U = -\sqrt{2} \Rightarrow N_2(-\sqrt{2} \sin(-\sqrt{2}), -\sqrt{2}, -\sqrt{2} \cos(-\sqrt{2}))$$

2) Која је конаид $\vec{r} = (u^2(1-u), uv, u^2)$

а) Одредити рекурентне тачке на конаиду. Изразити Такову и средњу кривину у произвољној тачки конаида, као и главне кривине у тачки $M(0,1,1)$. Које тачке припадају тачке конаиду

б) Написати ј-ну конаида у Декартовим координатима.

в) Доказати да конаид има две породице асимптотских линија од којих једна представља породицу правих. Доказати такође да су све праве једне од њих двеју породица паралелне и све су равни и наћи ј-ну те равни.

$$a) \vec{r}_u = (2u(1-u), v, 2u) \quad z_u = 4u^2(1-u)^2 + v^2 + 4u^2$$

$$\vec{r}_v = (-u^2, u, 0) \quad z_v = -2u^3(1-u) + 4uv$$

$$\vec{r}_{uu} = (2-4u, 0, 2) \quad z_{uu} = u^4 + u^2$$

$$\vec{r}_{uv} = (-2u, 1, 0)$$

$$-\text{Нормала површи: } \vec{r}_u \times \vec{r}_v = u^2(-2, -2u, 2-u)$$

$$\vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$W = \sqrt{z_{uu}z_{vv} - z_{uv}^2} = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = u^2 \cdot \sqrt{4 + 4u^2 + (2-u)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u \neq 0$$

Ако се претпостави да се средња кривина изражава формулом $\frac{1}{R}$ је то

\Rightarrow Тачке конаида су рекурентне за $u \neq 0$

- Орт нормале површи: $N = \frac{1}{W} (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$

$$\{u, v \mid u, v \in \mathbb{R}, u \neq 0\}$$

$$b_{u1} = \frac{2u}{\sqrt{4+4u^2+(2-u)^2}}, \quad b_{u2} = \frac{2u}{\sqrt{4+4u^2+(2-u)^2}}, \quad b_{v2} = 0$$

- Такова кривина:

$$K_g = \frac{-4}{u^2[4+4u^2+(2-u)^2]^{\frac{3}{2}}} < 0 \Rightarrow \text{Све су тачке конаида хиперболичке}$$

- Средња кривина: $H = \frac{u^2(4-3u) \cdot u}{[4+4u^2+(2-u)^2]^{\frac{3}{2}}}$

- Главне кривине у тачки M :

$$k_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad k_2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$b) \begin{cases} x = u^2(1-u) \\ y = uv \\ z = u^2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{z} = 1-u \Rightarrow u = 1-\frac{x}{z} \Rightarrow u = \frac{z-x}{z}$$

$$u = \frac{y}{z} = \frac{y^2}{z-x}, \text{ одакле извршавањем у претходну једнакост добијемо:}$$

$$z = \left(\frac{y^2}{z-x}\right)^2$$

$$y) \dots du(vdu + 2udv) = 0$$

$$\rightarrow du = 0 \Rightarrow u = C_1$$

$$vdu = -2udv$$

$$\frac{du}{u} = -2 \frac{dv}{v} \quad \int$$

$$\ln|u| = -2 \ln|v|$$

$$\ln|u| = -2 \ln|v| + \ln|C|$$

$$-\ln|u| = \ln|v^2 \cdot C|$$

$$\ln|u^{-1}| = \ln|v^2 \cdot C|$$

$$\frac{1}{u} = v^2 \cdot C \Rightarrow u \cdot v^2 = \frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{u \cdot v^2 = C_2} \Rightarrow \boxed{u = \frac{C_2}{v^2}}$$

- Једначине прве породице асимптотских линија су:

$$u = C_1 \Rightarrow \vec{r}(u) = (C_1^2 \cdot (1-u), C_1 u, C_1^2)$$

$$\begin{cases} x = C_1^2(1-u) \Rightarrow x = C_1^2 - C_1^2 u \Rightarrow -C_1^2 u = x - C_1^2 \Rightarrow u = \frac{x - C_1^2}{-C_1^2} \\ y = C_1 u \Rightarrow u = \frac{y}{C_1} \\ z = C_1^2 \end{cases} \rightarrow u = \frac{z - C_1^2}{-C_1^2}$$

$$\boxed{\frac{x - C_1^2}{-C_1^2} = \frac{y - 0}{C_1} = \frac{z - C_1^2}{0} (= u)}$$

а то су праве паралелне равни $\vec{z} = 0$ јер је скаларни производ вектора $(-C_1^2, C_1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$ (прав угао између вектора)

- Векторска једначина друге породице асимптотских линија је:

$$u = \frac{C_2}{v^2} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(u) = \left(\frac{C_2^2}{v^4} (1-u), \frac{C_2}{v}, \frac{C_2^2}{v^2} \right)}$$

27.09.1991.

Б) Шта је површ $\vec{r} = (e^u(1-v), e^u(1-v) + uv, e^u)$.

а) Написати ј-ну од површи у векторским координатама.

б) Израчунајте Токсову и средњу кривину површи у произвољној тачки. Које имају природну атоку површи?

в) Покажите да кроз сваку регуларну хиперболичку атоку површи пролази по две асимптотске линије од којих је једна права. Израчунајте угао између асимптотских линија у атоци њиховог пресека.

г) Израчунајте геодезијску кривину координатних линија површи у датим параметрима. Које су од координатних линија геодезијске линије.

$$a) \begin{cases} x = e^u(1-u) \\ y = e^u(1-u) + u^2 \\ z = e^u \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{z} = 1-u \Rightarrow \boxed{u = 1 - \frac{x}{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x + (1 - \frac{x}{z})^2}$$

б) - Једна породица асимптотских линија је:

$$\text{За } u = c_1 \Rightarrow \vec{r} = (e^{c_1}(1-u), e^{c_1}(1-u) + c_1^2, e^{c_1})$$

$$\boxed{u = c_1}$$

$$\boxed{(u-1)u^2 = c_2}$$

$$\text{или: } \boxed{\frac{x \cdot e^u}{e^u} = \frac{y - e^u}{e^u} = \frac{z \cdot e^u}{e^u} (=u)} \quad - \text{ права}$$

- Друга породица асимптотских линија је:

$$\text{За } u = 1 + \frac{c_2}{z^2} \Rightarrow \vec{r} = (e^{1+\frac{c_2}{z^2}}(1-u), e^{1+\frac{c_2}{z^2}}(1-u) + u(1+\frac{c_2}{z^2}), e^{1+\frac{c_2}{z^2}})$$

- Вредности параметара u и u који одређују пресек асимптотских линија $u = c_1$ и $(u-1)u^2 = c_2$ добијају се из система

$$\begin{cases} u = c_1 \\ (u-1)u^2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c_1-1)c_1^2 = c_2 \\ c_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_2-1}} \end{cases} \quad \begin{cases} u = c_1, c_1 \neq 1 \\ u = \sqrt{\frac{c_2}{c_2-1}}, \frac{c_2}{c_2-1} \geq 0 \end{cases}, u \neq 0$$

- Утао између асимптотских линија $u = c_1$ и $u = 1 + \frac{c_2}{z^2}$, који је:

$$\boxed{du = 0} \quad \boxed{dv = -\frac{2c_2 dz}{z^3}}$$

рођуно се по формули (погоншта)...

γ) Геодезичка кривина u -линија ($u = \text{const} = c_1$)

$$* K_g|_{u=c_1} = \frac{1}{|\vec{r}|^3} \cdot [\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]|_{u=c_1}$$

- Геодезичке кривине су оне за које је $K_g = 0$

Геодезичка кривина u -линија ($u = c_2$):

$$\vec{r} = (e^u(1-c_2), e^u(1-c_2) + c_2 u, e^u)$$

$$\dot{\vec{r}} = (e^u(1-c_2), e^u(1-c_2) + c_2, e^u)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (e^u(1-c_2), e^u(1-c_2), e^u)$$

170

- 3) Како је површи $\Gamma: z = 4 - x - y^2$.
- а) Израчунајте Гаусову и средњу кривину, као и главне кривине у циљованом тачки површи.
- б) Дokaзати да површи Γ има једну фамилију асимптотских линија и да су оне паралелне правце.
- в) Наћи линије кривине дакле површи израчунајте уједњених криве су оне криве.
- г) Наћи на површи Γ све криве које секу сваку од асимптотских линија под углом од $\pi/4$.

$$a) K_g = \frac{r + \sqrt{S^2}}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} \quad \text{— Гаусова кривина}$$

$$H = -\frac{E}{2A} \quad \text{— Средња кривина}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = -2$$

$$g_{11} = 2, \quad g_{12} = 2y, \quad g_{22} = 1 + 4y^2, \quad A = 1 + p^2 + q^2$$

$$A = 2 + 4y^2 = 2 \cdot (1 + 2y^2)$$

$$A = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = 2 \cdot (1 + 4y^2) - 4y^2 = 2 + 4y^2 = 2 \cdot (1 + 2y^2)$$

$$b_{11} = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0, \quad b_{12} = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0, \quad b_{22} = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2(1 + 2y^2)}}$$

$$K_g = 0 \Rightarrow \text{све су тачке параболичке} \Rightarrow K_1 \cdot K_2 = 0 \Rightarrow \boxed{K_1 = 0}$$

$$B = \frac{4}{\sqrt{2(1 + 2y^2)}}, \quad H = \frac{-2}{\sqrt{2 + 4y^2}} \Rightarrow H = \frac{K_1 + K_2}{2} \Rightarrow K_2 = 24 \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{-4}{\sqrt{2 + 4y^2}}}$$

- б) Једнацина асимптотских линија:

$$r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx dy + t \cdot dy^2 = 0$$

$$-2 \cdot dy^2 = 0$$

$$dy = 0 \quad || \int$$

$$\boxed{y = c} \quad \text{— једна фамилија}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 - x - y^2 \\ y = c \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 4 - x - c^2 \quad \text{— равна} \\ y = c \quad \quad \quad \text{— равна} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{пресека две равни је права} \\ \boxed{\frac{x}{1} = \frac{y-c}{0} = \frac{z-(4-c^2)}{-1}} \quad \text{— изразимо праве} \end{array} \right.$$

В) Линеар кривине

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx dy & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx dy & dx^2 \\ 2 & 2y & 1+y^2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4y dy^2 - 4dx dy = 0$$

$$-4dy(y dy + dx) = 0$$

$$\Rightarrow dy = 0$$

$$y = c_1$$

$$y dy + dx = 0$$

$$y dy = -dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + C / : 2$$

$$2x + y^2 - C_2 = 0 \text{ - цилиндар}$$

$$-y^2 = 2x - C_2$$

$$z = 4 - x - C_1^2$$

$$z = 4 - x - y^2$$

$$= 4 - x + 2x - C_2$$

$$\boxed{z = 4 - C_2 + x} \text{ - равна}$$

$$\boxed{z + x - 4 + C_1^2 = 0} \text{ - равна}$$

\Rightarrow пресек две равни су праве!

- ЕКСПЛИЦИТНИ ОБЛИК $z = f(x, y)$:

$$A = 1 + p^2 + q^2$$

$$B = \frac{2p \cdot q \cdot s - r \cdot (1 + q^2) - t \cdot (1 + p^2)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$C = \frac{r \cdot t - s^2}{1 + p^2 + q^2}$$

$$K_g = \frac{r \cdot t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad - \text{ ГАУСОВА КРИВИНА}$$

$$r \cdot t - s^2 \begin{cases} > 0 & - \text{ЕЛИПТИЧКИ} \\ = 0 & - \text{ПАРАБОЛИЧКИ} \\ < 0 & - \text{ГИПЕРБОЛИЧКИ} \end{cases}$$

$$H = -\frac{B}{2A} \quad - \text{СРЕДЊА КРИВИНА} \quad , \quad H = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

- АКО ЈЕ $K_g = 0 \Rightarrow K_1 \cdot K_2 = 0 \Rightarrow K_1 = 0, K_2$

$z = f(x, y)$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$z_{11} = 1 + p^2, \quad z_{12} = p \cdot q, \quad z_{22} = 1 + q^2$$

$$e_{11} = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad e_{12} = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad e_{22} = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

- ЈЕДНАЧИНА ЛИНИЈЕ КРИВИНА:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dx dy & dx^2 \\ z_{11} & z_{12} & z_{22} \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

- ЈЕДНАЧИНА АСИМПТОТЕ ЛИНИЈЕ:

$$r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx dy + t \cdot dy^2 = 0$$

- МРЕЖА КООРДИНАТНИХ ЛИНИЈА ЈЕ ОРТОГОНАЛНА АКО ЈЕ:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 \quad (z_{12} = 0)$$

- ИСПИТАТИ КАРАКТЕР ТАЧАКА ПОВРШИ КОЈА ЈЕ У ДЕКАРТОВИМ КООРД. ДЕФ. Ј-НОМ: $z = f(x, y) \Rightarrow$ ТРЕБА ИСПИТАТИ ИЗРАЗ: $r \cdot t - s^2$

- УГАО ИЗМЕЂУ ДВЕ КРИВИНЕ НА ПОВРШИ ОДРЕЂУЈЕ СЕ Ф-ЛОМ:
 $\cos \phi =$ ИСТА КАО ЗА ПАРАМИТАРИСКИ ОДНО УМЕСИТО $u \rightarrow x, v \rightarrow y$

10) Zadatak je površi $z = xy^2$.

a) Izračunajte Hesseovu i srednju krivinu u proizvoljnoj točki površi, kao i glavne krivine u točki $M(1, 0, 0)$. Koje imaju primaduju teške površi?

b) Pokazati da kroz svaku točku površi koja nije u xoz-ravni protežu se dve asimptotske linije od kojih je jedna prava, središtem ih i izračunajte ugaon izmjerak.

$$1) p = y^2, \quad z = 2xy, \quad r = 0, \quad s = 2y, \quad t = 2x$$

$$z_{11} = 1 + y^4, \quad z_{12} = 2xy^3, \quad z_{22} = 1 + 4x^2y^2$$

$$A = 1 + y^4 + 4x^2y^2$$

$$W = \sqrt{A} = \sqrt{1 + y^4 + 4x^2y^2}$$

$$G_{11} = 0, \quad G_{12} = \frac{2y}{W}, \quad G_{22} = \frac{2x}{W}$$

$$K_g = \frac{-4y^2}{(1 + y^4 + 4x^2y^2)^{3/2}} < 0 \quad - \text{Gaussova krivina}$$

$$(y \neq 0 \rightarrow K_g < 0, \quad y = 0 \rightarrow K_g = 0)$$

$$B = 2z_{12}G_{12} - G_{11}z_{22} - G_{22}z_{11} = 4xy^3 \cdot \frac{2y}{W} - \frac{2x}{W} \cdot (1 + y^4) =$$

$$= \frac{8xy^4 - 2x - 2xy^4}{W} = \frac{6xy^4 - 2x}{W} = \frac{2x(3y^4 - 1)}{W}$$

$$H = -\frac{B}{2A} = \frac{\frac{2x(1 - 3y^4)}{W}}{2 \cdot W^2} = \frac{x(1 - 3y^4)}{(1 + y^4 + 4x^2y^2)^{3/2}}$$

$$M(1, 0, 0)$$

$$K_g|_M = 0, \quad H|_M = 1$$

$$\kappa_1, \kappa_2 = 0 \Rightarrow \boxed{K_1|_M = 0}, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad z = \kappa_1 \tau \kappa_2 \Rightarrow \boxed{K_2|_M = 2} \quad - \text{Glavne krivine}$$

→ Sve točke površi izuzev u xoz-ravni su hiperbolne. Točke površi u xoz-ravni ($y=0$) su parabolne.

b) Asimptotske linije:

$$r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx \cdot dy + t \cdot dy^2 = 0$$

$$4y \cdot dx \cdot dy + 2x \cdot dy^2 = 0$$

$$2 \cdot dy(2y \cdot dx + x \cdot dy) = 0$$

$$\Rightarrow dy = 0$$

$$\boxed{y = C_1}$$

$$\wedge \quad 2y \, dx + x \, dy = 0$$

$$\frac{2 \, dx}{x} = - \frac{dy}{y}$$

$$\frac{2 \, dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad | \int$$

$$2 \ln|x| + \ln|y| = \ln|C_2|$$

$$\ln|x^2 \cdot y| = \ln|C_2|$$

$$\boxed{x^2 \cdot y = C_2}$$

\Rightarrow I формула асимптотических линий:

$$\left. \begin{matrix} z = xy^2 \\ y = C_1 \end{matrix} \right\} \text{ экв. } \boxed{\begin{matrix} z = C_1^2 x \\ y = C_1 \end{matrix}} \quad - \text{пробе линии}$$

II формула асимптотических линий:

$$\left. \begin{matrix} z = xy^2 \\ x^2 y = C_2 \end{matrix} \right\} \text{ экв. } \boxed{\begin{matrix} y = \frac{C_2}{x^2} \\ z = \frac{C_2^2}{x^3} \end{matrix}}$$

- Точке пересечения асимптотических линий су:

$$\left. \begin{matrix} y = C_1 \\ y = \frac{C_2}{x^2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \quad y = C_1$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot C_1^2 = \pm \sqrt{C_2 \cdot C_1}$$

$$\Rightarrow M = \left(\pm \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, C_1, \pm \sqrt{C_2 \cdot C_1} \right)$$

$$\cos \varphi = \frac{g_{11} \, dx \, dx + g_{12} (dx \, dy + dy \, dx) + g_{22} \, dy \, dy}{\sqrt{2g_{11} \, dx^2 + 2g_{12} \, dx \, dy + g_{22} \, dy^2} \cdot \sqrt{g_{11} \, dx^2 + 2g_{12} \, dx \, dy + g_{22} \, dy^2}}$$

$$g_{11}|_M = 1 + C_1^4, \quad g_{12}|_M = \pm 2\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot C_1^3 = \pm 2C_1 \sqrt{C_2 C_1}, \quad g_{22}|_M = 1 + 4C_1 C_2$$

$$y = C_1 \Rightarrow dy|_M = 0, \quad y = \frac{C_2}{x^2} \Rightarrow dy|_M = -\frac{2C_2}{x^3} dx|_M = \pm 2C_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^3}} dx$$

$$\cos \varphi = \frac{(1+C_1^4) dx \, dx \pm 2C_1 \sqrt{C_2 C_1} dx (\pm 2C_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^3}} dx)}{\sqrt{(1+C_1^4)} \cdot \sqrt{(1+C_1^4) dx^2 \pm 4C_1 \sqrt{C_2 C_1} (\pm 2C_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^3}} dx) + (1+4C_1 C_2) \cdot 4 \frac{C_2^3}{C_1^3} dx^2}}$$

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{1 - 3C_1^4}{\sqrt{1+C_1^4} \sqrt{1+3C_1^4+4\frac{C_2^2}{C_1^2}}}}$$

11) Јако је површи: $xy + yz + zx = 0$.

а) Израчунајте Гаусову кривину у произвојној тачки и одредите или шипи потока на површи.

б) Израчунајте средњу кривину и главне кривине у тачки $M(0, 1, 0)$.

в) Покажите да су асимптотичке линије праве површи праве криве кроз једну тачку. Која је ово површи?

г) Израчунајте угао под којим се на површи секу криве $y = x$ и $y = 2 - x$.

а) $xy + yz + zx = 0$

$$xy + z \cdot (x + y) = 0$$

$$z \cdot (x + y) = -xy$$

$$z = -\frac{xy}{x+y}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \cdot (x+y) - xy}{(x+y)^2} = -\frac{xy + y^2 - xy}{(x+y)^2} = -\frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \cdot (x+y) - xy}{(x+y)^2} = -\frac{x^2 + xy - xy}{(x+y)^2} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 \cdot 2 \cdot (x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y \cdot (x+y)^2 - y^2 \cdot 2 \cdot (x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2y(y+x) \cdot (x+y - y)}{(x+y)^4} = -\frac{2xy}{(x+y)^3}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 \cdot 2 \cdot (x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

$$K_g = \frac{r + s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{\frac{2y^2}{(x+y)^3} \cdot \frac{2x^2}{(x+y)^3}}{\left(1 + \frac{y^4}{(x+y)^4} + \frac{x^4}{(x+y)^4}\right)^2} = 0 \quad \text{— Гаусова кривина}$$

\Rightarrow Тачки на површи су доробашке

б) $H = -\frac{B}{2A}$

$$A = 1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{y^4}{(x+y)^4} + \frac{x^4}{(x+y)^4} = \frac{x^4 + y^4 + (x+y)^4}{(x+y)^4} = 2 \Rightarrow A = 2$$

$$B = \frac{2pq \cdot s - r \cdot (1 + q^2) - t \cdot (1 + p^2)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

У тачки $M(0, 1, 0) \Rightarrow p = -1, q = 0, r = 2, s = 0, t = 0$

$$B = \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{B = -\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ - средња кривина}$$

$$K_1 = 0 \Rightarrow K_1 \cdot K_2 = 0 \Rightarrow \boxed{K_1 = 0}$$

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} \quad 2H = K_2 \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Главне кривине

6) Једначина осимметричних линија:

$$r \cdot dx^2 + 2saxdy + t \cdot dy^2 = 0$$

$$\frac{2xy^2}{(x+y)^3} \cdot dx^2 - \frac{4xy}{(x+y)^3} dx dy + \frac{2x^2}{(x+y)^3} dy^2 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}y dx}{(x+y)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}x dy}{(x+y)^{3/2}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}y}{(x+y)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{2}x}{(x+y)^{3/2}} dy$$

$$y dx = x dy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad / \int$$

$$\ln|x| = \ln|y| + C$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln|C|$$

$$\ln|x| = \ln|yC|$$

$$\boxed{x = C \cdot y}$$

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{xy}{x+y} \\ x &= C \cdot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} z &= -\frac{C \cdot y^2}{C \cdot y + y} \\ x &= C \cdot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} z &= \frac{C \cdot y}{C+1} \\ x &= C \cdot y \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow y = \frac{z}{C}, \quad y = \frac{z}{\frac{C}{C+1}}, \quad y = \frac{z}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-0}{C} = \frac{z-0}{\frac{C}{C+1}} = \frac{y-0}{1}} \quad \cdot \text{дрове криве пролазе кроз исту тачку}$$

Која је иста тачка?

$$1) \quad y = x, \quad y = 2-x$$

$$dy = dx, \quad dy = -dx$$

одговарајућа формула!

→ Истим путем пролазе кроз исту тачку, (2)

12) Крива је површи: $z = 3xy - 2x^2$.

а) Доказати да кроз сваку тачку на површи пролазе две асимптотичке линије од којих је једна права. Доказати да су све те праве паралелне извесној равни и колику ту равни.

б) Израчунајте угао између асимптотичких линија у свакој тачки пресека.

$$a) p = \frac{\partial z}{\partial x} = 3y - 4x^2; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3.$$

$$q = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3x \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4x$$

- Ј-на асимптотичке линије:

$$r \cdot dx^2 + 2s \cdot dx dy + t \cdot dy^2 = 0$$

$$-4x dx^2 + 6 dx dy = 0$$

$$6 dx \cdot (dy - 2x dx) = 0$$

$$\Rightarrow dx = 0 \quad dy - 2x dx = 0$$

$$\boxed{x = C_1}$$

$$\boxed{y - x^2 = C_2}$$

После где пролазе асимптотичких линија:

$$I) \left. \begin{array}{l} z = 3xy - 2x^2 \\ x = C_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} z = 3C_1 y - 2C_1^2 \\ x = C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3C_1 y = z + 2C_1^2 \\ x - C_1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{z + 2C_1^2}{3C_1} \\ y = \frac{x - C_1}{0} \\ y = \frac{y - 0}{1} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - C_1}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z + 2C_1^2}{3C_1^2} \text{ - права}$$

$$II) \left. \begin{array}{l} z = 3xy - 2x^2 \\ y - x^2 = C_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} z = 3x \cdot (x^2 + C_2) - 2x^3 \\ y = x^2 + C_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} z = 3C_2 x + x^3 \\ y = x^2 + C_2 \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Све праве паралелне су координатној равни yoz : $\boxed{x=0} \rightarrow ?$

$$b) x = C_1 \Rightarrow dx = 0$$

$$y = x^2 + C_2 \Rightarrow dy = 2x dx = 2C_1 dx$$

- Координате тачке пресека асимптотичких линија:

$$\left. \begin{aligned} x &= G \\ y &= x^2 + G_2 \\ z &= 3xy - 2x^3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &= G_1 \\ y &= G_2 + G_1^2 \\ z &= 3G_1G_2 + G_1^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(G_1, G_2 + G_1^2, 3G_1G_2 + G_1^3) - \text{оресино } T.$$

$$2_{11}/M = 1 + 9(G_2 - G_1^2)^2$$

$$2_{12}/M = 3G_1(G_2 - G_1^2)$$

$$2_{22}/M = 1 + 9G_1^2$$

$$\cos \varphi = \frac{9G_1(G_2 - G_1^2) dy dx + (1 + 9G_1^2) \cdot dy \cdot 2G_1 dx}{\sqrt{(1 + 9G_1^2) dy^2} \sqrt{(1 + 9(G_2 - G_1^2)^2 dx^2 + 18G_1(G_2 - G_1^2) dx \cdot (2G_1 dx) + (1 + 9G_1^2)(2G_1 dx)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{0(2 + 9G_1^2 + 9G_2)}{\sqrt{1 + 9G_1^2} \sqrt{1 + 4G_1^2 + 9(G_2 - G_1^2)^2}}$$

II НАЧИН: Устави резултатом може се добити параметризацијом асимптотских линија:

$$I) \vec{r}_1 = (G_1, y, 3G_1y - 2G_1^3)$$

$$II) \vec{r}_2 = (x, x^2 + G_2, 3G_2x + x^3)$$

$$\vec{r}_1' = (0, 1, 3G_1)$$

$$\vec{r}_2' = (1, 2x, 3G_2 + 3x^2)$$

$$\vec{r}_{1M}' = (0, 1, 3G_1)$$

$$\vec{r}_{2M}' = (1, 2G_1, 3G_2 + 3G_1^2)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{r}_{1M}' \cdot \vec{r}_{2M}'}{|\vec{r}_{1M}'| \cdot |\vec{r}_{2M}'|}$$

30.09.1992.

13) Дато је површи: $\vec{r} = (u+v, u-v, \frac{1}{2(u^2+v^2)})$, $(u, v) \neq (0, 0)$.

a) Наћи јединицу на површи у Декартовим координатама.

b) Покажи да кроз сваку тачку на површи пролазе по две асимптотске линије и одреди их.

c) Одреди линије криве на тој површи и прецизно утврди које су то криве.

$$a) \left. \begin{aligned} x &= u+v \\ y &= u-v \\ z &= \frac{1}{2(u^2+v^2)} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x+y &= 2u \Rightarrow u = \frac{1}{2}(x+y) \\ y &= \frac{1}{2}(x+y) - v \Rightarrow v = \frac{1}{2}(x+y) - y \Rightarrow v = \frac{1}{2}(x-y) \\ z &= \frac{1}{2 \cdot (\frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2)} = \boxed{z = \frac{1}{x^2+y^2}} - \text{површи је ротациона} \end{aligned} \right\}$$

$$d) \quad z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$p = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad q = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad r = \frac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad s = \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}, \quad t = \frac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$W = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2 + 4}{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\text{— Гаусова кривина } \kappa = \frac{rt - s^2}{W^4} = -\frac{12 \cdot (x^2+y^2)^2}{[(x^2+y^2)^2 + 4]^2} < 0,$$

ако је $x^2 + y^2 \neq 0$, све су појке добри хиперблици.

— Диференцијална ј-то асимптотички млир: $rdx^2 + 2sdx dy + tdy^2 = 0$

$$(3x^2 - y^2)dx^2 + 8xy dx dy + (3y^2 - x^2)dy^2 = 0 \quad / : dx^2$$

$$(3y^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3x^2 - y^2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy \pm \sqrt{16x^2y^2 - (3y^2 - x^2)(3x^2 - y^2)}}{3y^2 - x^2} = \frac{-4xy \pm \sqrt{5(x^2 + y^2)^2}}{3y^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4xy \pm \sqrt{5(x^2 + y^2)}}{3y^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4\frac{y}{x} \pm \sqrt{5[1 + (\frac{y}{x})^2]}}{3(\frac{y}{x})^2 - 1} \quad \text{— ХОМОГЕНА ЛД.}$$

$$\text{СМЕНА: } y = x \cdot W [W = W(x)] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = W + x \frac{dW}{dx}$$

$$W + x \frac{dW}{dx} = \frac{-4W \pm (1 + W^2)\sqrt{5}}{3W^2 - 1}$$

$$x \frac{dW}{dx} = \frac{-4W \pm (1 + W^2)\sqrt{5} - (3W^2 - 1) \cdot W}{3W^2 - 1}$$

$$x \frac{dW}{dx} = \frac{-4W - 3W^3 + W \pm (1 + W^2)\sqrt{5}}{3W^2 - 1}$$

$$x \frac{dW}{dx} = \frac{-3W \cdot (1 + W^2) \pm (1 + W^2)\sqrt{5}}{3W^2 - 1}$$

$$x \frac{dW}{dx} = -\frac{(1 + W^2) \cdot (W\sqrt{5} \mp 1)\sqrt{5}}{(\sqrt{5}W - 1) \cdot (\sqrt{5}W + 1)}$$

$$x \frac{dW}{dx} = -\frac{(1 + W^2) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}W + 1} \quad \text{или} \quad x \frac{dW}{dx} = -\frac{(1 + W^2) \sqrt{5}}{\sqrt{5}W - 1}$$

$$\frac{(\sqrt{5}W + 1)dW}{W^2 + 1} + \sqrt{5} \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{(\sqrt{5}W - 1)dW}{W^2 + 1} + \sqrt{5} \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{(\sqrt{5}W + 1)dW}{W^2 + 1} + \sqrt{5} \int \frac{dx}{x} = \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad \int \frac{(\sqrt{5}W - 1)dW}{W^2 + 1} + \sqrt{5} \int \frac{dx}{x} = \frac{C_2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \ln(W^2 + 1) + \arctan W + \sqrt{5} \ln|x| = \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \ln(W^2 + 1) - \arctan W + \sqrt{5} \ln|x| = \frac{C_2}{2}$$

$$\sqrt{5} \ln(x^2 + (W^2 + 1)) + 2 \arctan W = C_1 \quad \text{или} \quad \sqrt{5} \ln(x^2 + (W^2 + 1)) - 2 \arctan W = C_2$$

$$W = \frac{y}{x}, \quad \sqrt{5} \ln(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = C_1 \quad \text{или} \quad \sqrt{5} \ln(x^2 + y^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} = C_2$$

⇒ Побрис има две породице ортогоналних линија:

$$I \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ \sqrt{3} \ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_1 \end{aligned} \right\} \text{ и } II \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ \sqrt{3} \ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2 \end{aligned} \right\}.$$

в) диференцијална ј-на кривине:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ 1 + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & 1 + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3} & \frac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3} & \frac{2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\dots xy dy^2 + (x^2 - y^2) dxdy - xy dx^2 = 0 \quad | : dx^2$$

$$xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 \pm \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2}}{2xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 \pm (x^2 + y^2)}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{2xy} = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2}{2xy} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad | \int \quad \text{или} \quad y dy + x dx = 0 \quad | \int$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{C_2}{2}$$

$$\ln|y| = \ln|x \cdot C| \quad \boxed{y^2 + x^2 = C_2}$$

$$\boxed{y = C \cdot x}$$

⇒ Побрис има две породице линија кривине (Помисли је равнотежа што перпендијални и паралеле (крутови):

$$I) \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ y &= C_1 x \end{aligned} \right\} \text{ и } II) \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 &= C_2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{C_2} \\ x^2+y^2 = C_2 \end{cases}$$

$u=0$: СФЕРНА ТАЧКА

$0 < u < 1$: ЕЛИПТИЧКЕ ТАЧКЕ

$u=1$: ПАРОБОЛИЧКЕ ТАЧКЕ

$u > 1$: ХИПЕРБОЛИЧКЕ ТАЧКЕ

