

1. Pojam krive. Krivolinijski integrali.

1.1 Krive u prostoru R^3

Definicija 1 (Pojam krive) Neka su date tri funkcije x, y, z i neka sve tri slikaju I u R ($x, y, z: I \rightarrow R$), gde je I bilo koji neprazan skup u R ($0 \neq I \subset R$). Najčešće će I imati sledeće značenje: $I = [a, b], (a, b), [a, b), \dots$ Kriva C je skup definisan pomoću:

$$C: \left\{ (x, y, z) \in R^3 \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), a \leq t \leq b \\ z = z(t) \end{array} \right. \right\}, \text{ tj. } C: \{(x, y, z) | t \in I\}.$$

Definicija 2. (Definicija zatvorene-otvorene krive) Kriva C (definicija 1) je zatvorena ako je:

$$\underbrace{(x(a), y(a), z(a))}_{\text{početna tačka}} = \underbrace{(x(b), y(b), z(b))}_{\text{krajnja tačka}}$$

gde je $I = [a, b]$. Kriva se naziva otvorena ako prethodni uslov nije zadovoljen.

Definicija 3. (Definicija proste krive) Neka je I bilo koji interval $[a, b]$. Kriva je prosta ako važi:

$$t', t'' \in I, t' \neq t'' \Rightarrow (x(t'), y(t'), z(t')) \neq (x(t''), y(t''), z(t'')) ,$$

osim možda u krajnjoj ili početnoj tački.

Definicija 4. (Definicija neprekidne krive) Kriva C iz Definicije 1 se naziva neprekidna kriva, ako su sve funkcije $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, odnosno I .

Definicija 5. (Definicija rektificibilne krive) Kriva C je rektificibilna ako ima konačnu dužinu.

Teorema 1. (Dovoljan uslov za rektificibilnu krivu) Ako su funkcije $t \rightarrow x'(t)$, $t \rightarrow y'(t)$, $t \rightarrow z'(t)$ neprekidne na $[a, b]$ tada je kriva C rektificibilna.

Teorema 2. Ako je kriva C zadata parametarski $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ i ako funkcije $x, y, z: R \rightarrow R$ imaju neprekidne prve izvode na segmentu $[t_0, T]$, tada je kriva C zadata parametarskim funkcijama na ovom segmentu rektificibilna i pri tome važi da je

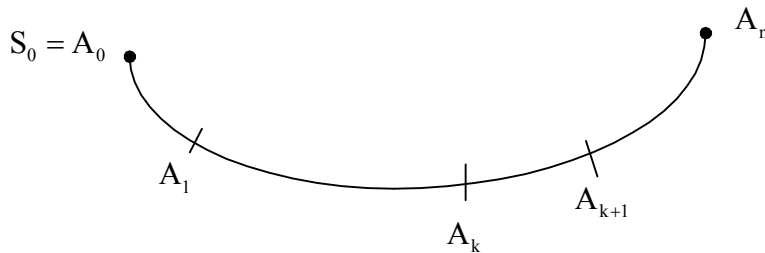
dužina krive $S = (R) \int_{t_0}^T \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$. Vrednost ovog integrala se poklapa sa $\sup_P \left(\sum_{k=0}^{n-1} d(\overline{A_k, A_{k+1}}) \right)$. Pri tome kriva C ima još i svojstvo da se u svakoj tački $A \in C, A = A(x(t), y(t), z(t)), t_0 \leq t \leq T$ može povući jedinstvena tangenta na tu krivu.

1.2. Krivolinijski integral prve vrste

Definicija 6. Neka je kriva C neprekidna, prosta, rektificibilna, zadana parametrizacijom

$$C : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Neka je početna tačka krive označena sa S_0 . Svaka tačka S te krive jednoznačno je određena dužinom luka s merenom od S_0 do S . Krivu C podelimo tačkama $S_0 = A_0, A_1, \dots, A_n (= \text{krajnja tačka})$ na proizvoljan način. Izbor ovih tačaka zovemo podela P krive C , i neka su sa $\overline{A_k A_{k+1}}$ oynačene dužine lukova.



Neka nadalje σ_k označava dužinu luka $\overline{A_k A_{k+1}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Na svakom od lukova $\overline{A_k A_{k+1}}$ izaberimo na proizvoljnu tačku $M_k = M_k(\xi_k, \varphi_k, \eta_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Neka je data funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, koja je definisana u svim tačkama krive C . Sa σ označimo Darbouxovu sumu $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \sigma_k$, Neka je $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \sigma_k$. Imamo da je

Ako postoji konstanta I tako da je $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma = I$ odnosno da je ispunjen sledeći Cauchy-ev uslov:

$$(\exists I \in \mathbb{R})(\forall P) \left(\forall M_k \in \overline{A_k A_{k+1}} \right) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon.$$

tada za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala prve vrste po krivoj C . Broj I nazivamo krivolinijski integral I vrste funkcije f duž date krive C i

broj I označavamo na sledeći način $I = (I) \int_C f(x, y, z) ds$. Pritom će umesto simbola \int stajati \oint ako znamo da je kriva C po kojoj integralimo zatvorena.

Teorema 3. (Redukcija krivolinijskih integrala I vrste na Riemann-ov integral).

Ako je $C: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \theta(t), t \in [a, b]$ tada važi da je

$$\int_C f(x, y, z) ds = (R) \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \theta(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\theta'(t))^2} dt.$$

1.3. Krivolinijski integral druge vrste

Definicija 7. (Definicija krivolinijskog integrala druge vrste po x-osi) Neka za krivu C, funkciju $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ($C \subset \mathbb{R}^3$), tačke A_i ($i=0, 1, \dots, n$) i $M_i \in \overline{A_i A_{i+1}}$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) važe iste pretpostavke kao i u slučaju definicije krivolinijskog integrala prve vrste i neka je $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, gde je x_k projekcija tačke A_k na x osu. Formirajmo sumu:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \zeta_k, \eta_k) \cdot \Delta x_k.$$

Neka je $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ dijametar podele P. Ako postoji konačan realan broj I tako da važi $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma = I$ tada broj I nazivamo krivolinijski integral II vrste funkcije f duž krive C po x osi,

za funkciju f kažemo da je integrabilna u smislu krivolinijskog integrala po x-osi. Broj I označavamo sa $I = (II) \int_C f(x, y, z) dx$ Ako je C zatvorena kriva oznaka je:

$$I = (II) \oint_C f(x, y, z) dx. \text{ Slično se definiše krivolinijski integral druge vrste po y i z osi.}$$

Definicija 8. (Definicija Krivolinijski integral II vrste) Neka su date 3 funkcije (potpuno nezavisno jedna od druge) $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ i neka su definisane duž krive C u \mathbb{R}^3 koja je neprekidna, prosta, rektificibilna. Za funkciju P definišimo krivolinijski integral II vrste po x-osi kao u prethodnoj definiciji, a za Q i R definišemo analogne integrale, ali respektivno po osama y i z. Tada se krivolinijski integral II vrste definiše kao sledeći zbir:

$$I = \int_C P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz = (II) \int_C P(x, y, z) \cdot dx + (II) \int_C Q(x, y, z) \cdot dy + (II) \int_C R(x, y, z) \cdot dz$$

Teorema 4. (Izračunavanje krivolinijskog integrala II vrste) Neka su date funkcije $P, Q, R : C \rightarrow \mathbb{R}$ koje su neprekidne u svim tačkama krive C , pri čemu je kriva C data u parametarskoj formi $C : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, pri čemu je $-\infty < \alpha \leq t \leq \beta < +\infty$ tako da su funkcije x, y, z, x', y', z' neprekidne na segmentu $[\alpha, \beta]$. Tada se integral $I = (II) \int_C Pdx + Qdy + Rdz$ svodi na Rimanov integral na sledeći način:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt$$

DOKAZ: Pošto se dati integral svodi na zbir tri integrala dokaz izvodimo za samo jedan sabirak sledeće forme:

$$I = (II) \int_C f dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

Posmatrajmo Darboux-ovu sumu σ za krivolinijski integral II vrste pri čemu podeone tačke A_k imaju formu $A_k = (x_k, y_k, z_k) = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot (x(t_{k+1}) - x(t_k)). \end{aligned}$$

gde su $M_k = (x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \in \widehat{A_k A_{k+1}}$, $\bar{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$
Kako je prema Newton'Leibnitz-ovom tvrdjenju

$$\Delta x_k = (x_{k+1} - x_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t) \cdot dt$$

imamo je

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) \cdot x'(t) dt.$$

Takodje, imamo da je:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt$$

gde je $t \in [t_k, t_{k+1}]$ odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned} 0 \leq |\sigma - I| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) - f(x(t), y(t), z(t))) \cdot x'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| (f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k), z(\bar{t}_k)) - f(x(t), y(t), z(t))) \right| \cdot |x'(t)| dt \end{aligned}$$

Kako zbog Weierstrass-ove teoreme neprekidna funkcija dostiže svoj sup i inf i ograničena je na svakom zatvorenom intervalu konačne dužine, dobijamo da

$(\exists L > 0,) |x'(t)| \leq L$ za $\forall t \in [\alpha, \beta] \supset [t_k, t_{k+1}]$ tako da je

$$0 \leq |\sigma - I| \leq L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) - f(x(t), y(t), z(t))) dt$$

Kako $t_k \in [t_k, t_{k+1}]$, λ izaberimo tako da je $\lambda < \delta$ (λ i δ su iz definicije integrala II vrste) odakle sledi da je $|\Delta t_k| \leq \lambda < \delta$. Pošto je funkcija $t \rightarrow f(x(t), y(t), z(t))$ neprekidna na segmentu $t \in [\alpha, \beta]$, to za bliske argumente bliske su i slike, što znači da za dato $\varepsilon' > 0$ možemo izabrati δ' dovoljno malo tako da je ispunjen uslov:

$$|f(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) - f(x(t), y(t), z(t))| < \varepsilon'$$

Iz poslednjeg dobijamo da je $0 \leq |\sigma - I| \leq L \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon' dt$.

(Dobijena nejednakost važi samo ako su podeone tačke birane tako da je $\lambda < \delta$.)

Izaberimo za proizvoljno $\varepsilon' > 0$ broj $\varepsilon = \varepsilon' \cdot L(\beta - \alpha)$.

Sada možemo da zaključimo da važi sledeća implikacija:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{L(\beta - \alpha)}) > 0) \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} L \frac{\varepsilon}{L(\beta - \alpha)} dt = \\ &= \frac{\varepsilon}{(\beta - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \frac{\varepsilon}{(\beta - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \frac{\varepsilon}{(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) = \varepsilon \end{aligned}$$

I konačno za Darboux-ovu sumu σ možemo zaključiti da važi: $0 \leq |\sigma - I| \leq \varepsilon$.

Sve ovo implicira $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \sigma = I = \int_C f(x, y, z) dx = (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$ tj.

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = (R) \int_{\alpha}^{\beta} (P'_x + Q'_y + R'_z) dt.$$

1.4. Nezavisnost krivolinijskog integrala druge vrste od puta integracije

Podsetimo se nekih pojmova:

(a) Za oblast $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je povezana, ako skup D zadovoljava sledeće uslove:

- (i) Skup D ima neprazan interior ($\text{int}D \neq \emptyset$).
- (ii) Svake dve tačke skupa D se mogu spojiti izlomljenom linijom takvom da ta linija čitava leži u D .

(b) Za krivu L kažemo da je glatka ako se u svakoj tački te krive može postaviti tangenta na tu krivu, na jedinstven način.

(c) Za krivu L kažemo da je deo po deo glatka ako se ona sastoji iz najviše konačno mnogo glatkih delova.

Pitanje koje će biti raspravljano u ovom poglavlju sastoji se u sledećem: Neka je data povezana oblast prostora $D \subset \mathbb{R}^3, D \neq \emptyset$, neka su tačke A i B fiksirane i neka su funkcije $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) \in C(D)$ neprekidne na oblasti D . Ako je kriva $L \subset D$ deo po deo glatka takva da joj je A početna tačka, a B krajnja tačka, kakvi uslovi moraju biti zadovoljeni tako da vrednost integrala $I = \int_L P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$ ne zavisi od oblika krive? Odgovor na ovo pitanje biće iskazan u vidu dve teoreme.

Teorema 5. Integral I ne zavisi od puta integracije ako i samo ako postoji funkcija $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$, odnosno mora važiti $u'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = P$, $u'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ i $u'_z = \frac{\partial F}{\partial z} = R$.

DOKAZ: Ako na G integral ne zavisi od puta integracije tada postoji funkcija $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, tako da je $du = Pdx + Qdy + Rdz$ koja je definisana sa

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Dokazaćemo da definisana funkcija zadovoljava uslove teoreme. Posmatrajmo:

$$\begin{aligned}
 u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z) &= \int_{\underbrace{(x, y, z)}_I}^{(x+\Delta x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \\
 &= \int_{\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{L_1}}^{(x+\Delta x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{\underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_L}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz \\
 &\quad \begin{array}{l} I : y = \text{const} \\ \text{za parametrizaciju} \quad z = \text{const} \\ dy = dz = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Rimanovi} \\ = \end{array} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt = \Delta x P(x + \theta x, y, z)
 \end{aligned}$$

(na osnovu P-neprekidna i teorema o srednjoj vrednosti integrala)

Tada $\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x + \theta x, y, z)$, $0 < \theta < 1$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x, y, z)$ (P nepr.)

Na isti način se dokazuje: $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$.

Obrnuto, neka je $Pdx + Qdy + Rdz = du$, tada za glatki luk L i njegovu parametrizaciju $\varphi: [a, b] \rightarrow R$ važe:

$$\int_L du = \int_a^b [P(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))x'(\varphi) + Q(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))y'(\varphi) + R(x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))z'(\varphi)] d\varphi$$

Neka je $v = u \circ \varphi: [a, b] \rightarrow R$ ($v = v(t)$) tada:

$$\begin{aligned}
 \int_{L=AB} du &= \int_a^b v'(t) dt = v(b) - v(a) = u(\varphi(b)) - u(\varphi(a)) = \\
 &= u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a))
 \end{aligned}$$

Dakle integral ne zavisi od puta integracije (parametrizacije).

Obrnuto,

Teorema 6. Neka su $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) \in C(D)$ neprekidne funkcije. Tada važi: Izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ je totalni diferencijal neke funkcije

$u: G \rightarrow R$, ako važe uslovi: (**) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ i $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

DOKAZ. Za $u: G \rightarrow R$, gde $du = Pdx + Qdy + Rdz$, $u \in C^2$ (klasa) pa važi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\
 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Obrnut smer dokaza je dosta složeniji i ovde ga izostavljamo.

2. Dvojni, trojni i višestruki integral

2.1. Pojam dvojnog, trojnog i višestrukog integrala

Definicija 1 (Definicija dvojnog integrala). Neka je data funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je dat neprazan skup $0 \neq D \subset \mathbb{R}^2$, koji može biti otvoren ili zatvoren. Neka je $\text{dom} f = D$ i pretpostavimo da postoji konstanta $M > 0$ takva da je za $\forall (x, y) \in D$ ispunjen uslov: $|f(x, y)| \leq M$. Podelimo oblast D , podelom P na podoblasti D_1, D_2, \dots, D_n , tako da važi:

- (i) $(\forall i \in \mathbb{N}) D_i \subset D \wedge D_i \neq \emptyset$,
- (ii) $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$,
- (iii) $(\text{int } D_i) \cap (\text{int } D_j) = \emptyset; \forall i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$.

(Ovakva podela se naziva razbijanje oblasti D na podoblasti D_i).

U svakoj oblasti D_i izaberimo proizvoljnu tačku $T_i(x_i, y_i) \in D_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Sa λ označimo maksimum od dijametara oblasti D_i : $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$, gde je

$$\lambda_i = \text{diam}(D_i) = \sup_{A, B \in D_i} (d(A, B)).$$

Izrazom $\sigma = \sum_{i=1}^n f(T_i) \text{mes}(D_i)$, gde $\text{mes}(D_i)$ označava površinu oblasti D_i , definišemo

Darbouxovu sumu funkcije f nad oblašću D za podelu P i izbor tačaka T_i .

Ako postoji konstanta $I \in \mathbb{R}$ takva da za svaku podelu $P: D_1, \dots, D_n$ i za svaki izbor tačaka T_i u podeli P i za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takvo da važi implikacija:

$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$, tada važi:

- a) Funkcija f se naziva integrabilnom funkcijom u smislu dvojnog integrala nad oblašću D .
- b) Tada se broj I naziva dvojnim integralom funkcije f nad D u oznaci
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Veoma slično i pod sličnim uslovima definišemo trojni (trostruki), a takode i višestruki integral. *Darbouxova* suma u tom slučaju ima oblik $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k)(\text{mes} V_k)$, pri čemu $\text{mes} V_k$ označava zapreminu odnosno n-dimenzionu zapreminu podeone ćelije V_k . Trojni integral označavamo sa $I = \iiint_V f(x, y, z) dV$, a n-dimenzioni sa $I = \iiint_V \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dV$.

2.2. Zamena promenljivih u dvojnog integralu

Teorema o smeni promenljive u dvojnog integralu. Posmatrajmo integral

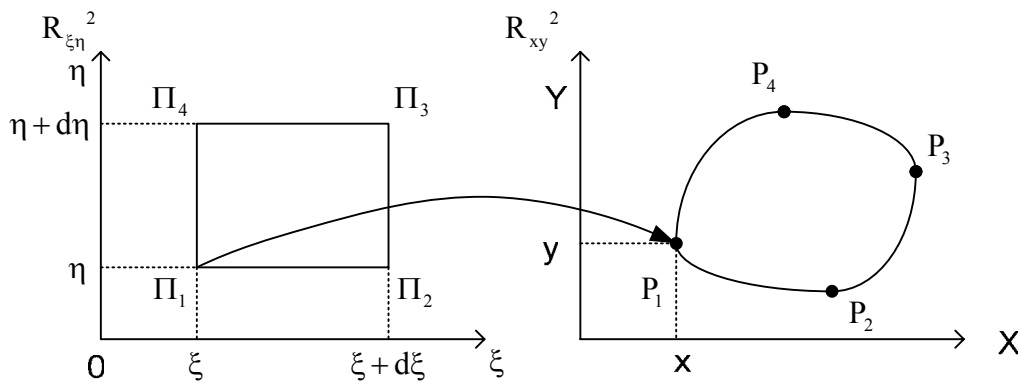
$I = \iint_D f(x, y) dx dy$ i pretpostavimo da se smenom $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, gde se nove promenljive nalaze u nekom domenu $(\xi, \eta) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$, skup $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, slika u $D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu su $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ jednoznačna i glatka preslikavanja. Tada važi da je

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta,$$

gde je J *Jacobieva* determinanta, $(J = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)})$, preslikavanja $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$.

Dokaz. Izvršićemo dokaz, za dobro odabrane oblike oblasti $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$.

Neka se preslikavanje ovih oblasti vrši kao na slici:



Pretpostavimo da se tačke $\Pi_1(\xi, \eta), \Pi_2(\xi + d\xi, \eta), \Pi_3(\xi + d\xi, \eta + d\eta), \Pi_4(\xi, \eta + d\eta)$, slikaju redom u tačke

$$\begin{aligned}
&P_1(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\
&P_2(x(\xi + d\xi, \eta), y(\xi + d\xi, \eta)), \\
&P_3(x(\xi + d\xi, \eta + d\eta), y(\xi + d\xi, \eta + d\eta)), \\
&P_4(x(\xi, \eta + d\eta), y(\xi, \eta + d\eta)).
\end{aligned}$$

Izvršimo aproksimaciju *Taylorovom* formulom, kordinata tačaka:

$$x(\xi + d\xi, \eta) \approx x(\xi, \eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$$

$$y(\xi + d\xi, \eta) \approx y(\xi, \eta) + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi = y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$$

$$x(\xi + d\xi, \eta + d\eta) \approx x(\xi, \eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta = x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$$

$$y(\xi + d\xi, \eta + d\eta) \approx y(\xi, \eta) + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta = y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$$

Zamenom u koordinate tačaka dobijamo da je:

$$P_1(x, y)$$

$$P_2(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi)$$

$$P_3(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta)$$

$$P_4(x + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta)$$

Podsetnik iz analitičke geometrije:

Ako su date:

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

$$\text{a naša površ: } P_D = 2 \times \triangle ABC.$$

Znači površina krivolinijskog paralelograma prema navedenoj formuli iznosi:

$$P(P_1P_2P_3P_4) = 2 \cdot P(P_1P_2P_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta$$

($d\xi \cdot d\eta$ je površina u $\xi\eta$ -sistemu)

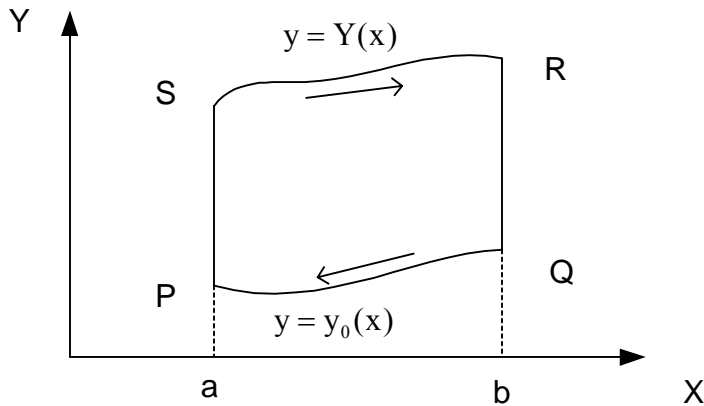
$$\Rightarrow dx \cdot dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \cdot d\xi \cdot d\eta = |J| \cdot d\xi \cdot d\eta.$$

2.3. Green-Riemann-ova formula

Green-Riemann-ova formula. Neka su $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$, neprekidno diferencijabilna preslikavanja oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, koju ograničava zatvorena kriva L . Tada važi

$$\oint_{L^+} P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot dx dy.$$

Dokaz. Izvršimo dokaz za dovoljno jednostavne oblasti.



Pretpostavimo da je data oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ i pretpostavimo da je ova oblast D ograničena zatvorenom konturom $L = \overline{PQRS}$, koja je definisana na sledeći način: $y_0 = y_0(x)$, $y = Y(x)$, $a \leq x \leq b$, pri čemu je $\forall x \in [a, b]$, $y_0(x) \leq Y(x)$ i ordinatama $x = a$, $x = b$. Tada, na osnovu *Newton-Leibnitzove* formule imamo da je

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, Y(x)) \cdot dx - \int_a^b P(x, y_0(x)) \cdot dx \quad (*) \\ &= \int_{\overline{SR}} P(x, y) \cdot dx + \int_{\overline{QP}} P(x, y) \cdot dx = \oint_{L^-} P(x, y) \cdot dx = - \oint_{L^+} P(x, y) \cdot dx \\ (*) \text{ zbog } \int_{\overline{RQ}} P(x, y) \cdot dx &= \int_{\overline{PS}} P(x, y) \cdot dx = 0, \text{ jer je } dx = 0. \end{aligned}$$

Pošto se analogno može izvesti da je $J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{L^+} Q(x, y) \cdot dy$ sabiranjem integrala I u J dobija se zadato tvrđenje čime je dokaz završen.

3. Površinski integrali

3.1. Površinski integral I vrste

Definicija površinskog integrala I vrste

Neka data površ $S \in \mathbb{R}^3$ koja zadovoljava sledeće uslove:

1. *deo po deo glatka* (tj. sastoji se od unije najviše prebrojivo mnogo glatkih površi kod kojih se u svakoj tački površi, osim u rubnim tačkama, može postaviti tangentna ravan i to na jedinstven način).
2. *ograničena*.
3. *rektificibilna* (to je ona površ koja ima konačnu površinu).

Neka imamo podelu $P : S_1, S_2, \dots, S_n$ površi S za koju važi:

- (i) za $\forall i = 1, 2, \dots, n$ je $S_i \in S$,
- (ii) $\bigcup_{i=1}^n S_i = S$,
- (iii) $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ i $i \neq j$ važi da je $\text{int } S_i \cap \text{int } S_j = \emptyset$.

U toj podeli na proizvoljan način biramo tačke $M_k = M_k(x_k, y_k, z_k) \in S_k$ ($1 \leq k \leq n$).

Neka je $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d(S_k)$ i sa $\sigma = \sum_{k=1}^n f(M_k)(\text{mes } S_k)$ označena Darboux-ova suma, gde je

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija definisana u svim tačkama površi S .

Ako postoji realan broj I takav da za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $\forall P$ i $\forall M_k \in S_k$ važi:

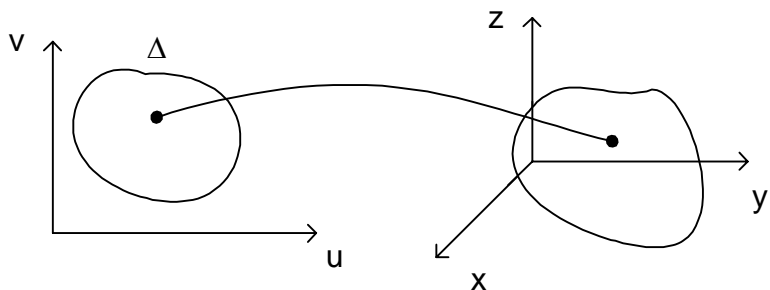
$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$. Tada :

- a) broj I nazivamo površinski integral I vrste funkcije f po površi S .
- b) za funkciju f kažemo da je integrabilna nad S u smislu površinskog integrala I vrste.
- c) broj I označavamo sa $I = \iint_S f(x, y, z) dS$.

Teorema 1. (Teorema o izračunavanju površinskog integrala I vrste)

Neka $S \in \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ označava površ u prostoru \mathbb{R}^3 i neka je ova površ jednoznačna

slika oblasti $\Delta \in \mathbb{R}_{u,v}^2$, sledećim neprekidno diferencijabilnim funkcijama $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$.



Neka je funkcija f ograničena na površi S . Tada važi sledeća jednakost:

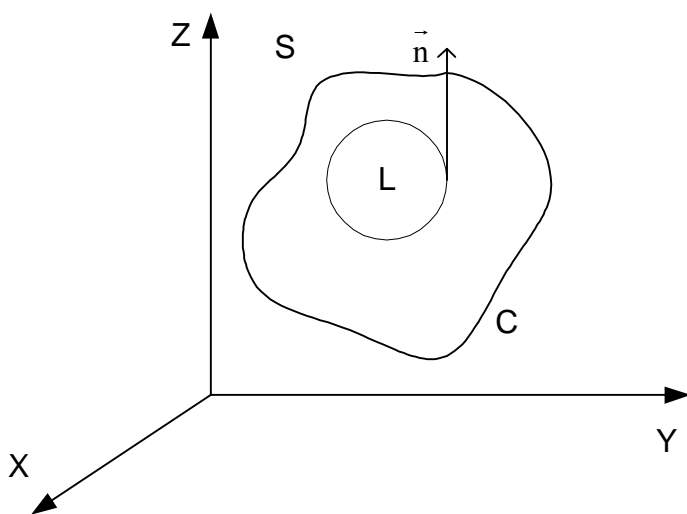
$$\iint_S f(x, y, z) dS = (\text{dvojni}) \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv \text{ gde je}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

3.2. Jednostrane i dvostrane površi



Pretpostavimo da je data glatka površ $S \in \mathbb{R}^3$, pri čemu je rub ove površi izvesna zatvorena kontura C . U proizvoljnoj tački N ove površi povučemo jedinstvenu normalu \vec{n} ($\vec{n} \perp S$) i opišemo kroz podnožje normale konturu $L \subset S$ takvu da je $L \cap C = \emptyset$.

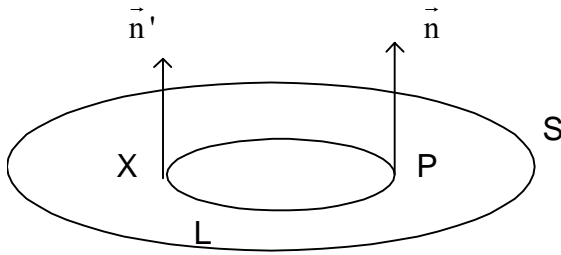
Pomeramo \vec{n} duž L . Imamo dva slučaja:

1. Šetajući \vec{n} duž konture L posle povratka u tačku N normala \vec{n} može da se vrati u svoj polazni položaj zadržavajući odgovarajući smer.
2. Može da se desi da posle obilaska te konture, vektor \vec{n} dođe u položaj ili poziciju sa smerom suprotnim od početnog smera u tački N .

Ako za svaku konturu $L \subset S$ normala zadrži isti smer kao i u početnom položaju N , tada se za površ S kaže da je *dvostrana* (Sfera). Nasuprot ovome, ako postoji barem jedna kontura L takva da posle njenog obilaska vektor \vec{n} promeni svoj smer tada za površ S kažemo da je *jednostrana* (Mebijusov list).

Definicija 1. (Definicija strane površi)

Izaberimo u dvostranoj, deo po deo glatkoj, ograničenoj i rektificibilnoj površi S jednu tačku P i u njoj postavimo normalu \vec{n} ($\vec{n} \perp S$), pri čemu izaberimo na proizvoljan način i fiksirajmo jedan od dva moguća smera. Mimo ovoga uočimo tačku X na S . Za tačku X i tačku P kažemo da pripadaju istoj strani dvostrane površi S ako za svaku konturu L koja sadrži i P i X , ali ne seče granicu od S , normala \vec{n} posle obilaska te konture zadržava isti smer kao i u početnom položaju.



Drugim rečima:

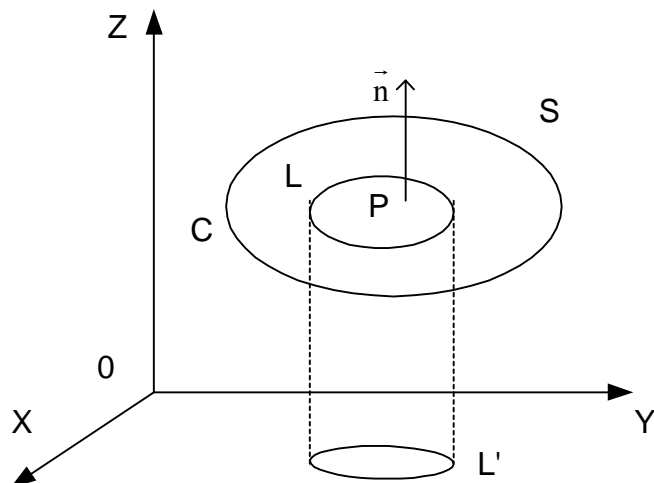
$$X \rho P \Leftrightarrow \vec{n}' \xrightarrow{L} \vec{n} \text{ (imaju isti smer)}$$

strane je $\{X \in S \mid X \rho P\}$ (jedne strane)

(preostali skup je druga strana).

Spoljna strana.

Data površ S (deo po deo glatka, rektificibilna i dvostrana) je naslonjena na konturu C . U površi S , u unutrašnjim tačkama izaberimo neku proizvoljnu tačku P i u tački P postavimo normalu na S sa izborom jednog od dva moguća smera. Tačku P opkolimo izvesnom konturom L koja ne seče C (dakle P leži u skupu $P \in \text{int}(L \cap S)$).



Izaberimo jedan od moguća dva smera kretanja duž konture L, izvršimo zatim projekciju konture C, površi S, tačke P, konture L i izabranog smera kretanja duž konture L na ravni Oxy . Neka L' označava projekciju konture L zajedno sa izabranim smerom kretanja. Pretpostavimo još da se projektovani smer kretanja duž L' poklapa sa pozitivnim smerom kretanja duž konture L' . Ako je sve ovo ispunjeno, tada za tačku P kažemo da pripada spoljnoj stani površi S ako je ispunjen još i sledeći uslov:

(a) smer kretanja je takav da \vec{n} ostaje s leve strane pri kretanju duž L,

(b) pri tome je \vec{n} orjentisana tako da je smer “od pete ka glavi”.

Preostala strana ove dvostrane površi se naziva unutrašnja strana.

3.3 Površinski integrali II vrste

Ukoliko je na površi $S \subset \mathbb{R}^3$ izabrana jedna strana površi (na primer “spoljna”), tada za površ kažemo da je “orjentisana”.

Definicija površinskog integrala druge vrste po Oxy -ravni .

Neka površ $S \subset \mathbb{R}^3$ zadovoljava sledeće uslove:

1. deo po deo glatka,
2. ograničena,
3. rektifikabilna (tj. možemo da odredimo površinu površi),
4. dvostrana (orjentisana je),
5. na S je izabrana jedna strana površi .

Neka je u svakoj tački površine S definisana funkcija $R(x, y, z): S \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je ona ograničena na S (tj. $\exists K > 0: |R(x, y, z)| \leq K, \forall (x, y, z) \in S$).

Neka je $P = S_1, S_2, \dots, S_n$ proizvoljna podela S na orjentisane površine S_i ($1 \leq i \leq n$).

Svaka podpovrš orjentisana je na isti način kao i S.

Projektujemo S_i na Oxy ravni i neka su D_i ($1 \leq i \leq n$) veličine površina tih projekcija.

Neka je $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d(S_i)$, gde su $d(S_i)$ dijometri površi S_i . Proizvoljno biramo tačke: $M_i = M_i(x, y, z) \in S_i$ ($1 \leq i \leq n$). Darbouxovu sumu za površinski integral po xOz ravni definišemo pomoću:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n R(M_i) \cdot D_i$$

gde ima D_i znak +, ako je odbarana spoljna strana.

Ako postoji konstanta $I \in \mathbb{R}$ takvo da za $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall P_n, \forall M_k \in S_k$ važi $\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon$ tada je:

1. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sigma = I$.
2. Funkciju R nazivamo integrabilnom u smislu integrala druge vrste po Oxy -ravni.
3. Broj I nazivamo integral druge vrste na S po Oxy -ravni.
4. $I = \iint_S R(x, y, z) dx dy$.

Strane površi označavamo sa S^+ (spoljna strana) i S^- (unutrašnja strana).

Definicija površinskog integrala Slično uradimo po Oyz i Ozx ravni za funkcije $P=P(x, y, z)$ i $Q=Q(x, y, z)$. Tada se:

$$I = \iint_{S^+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

zove površinski integral druge vrste po spoljnoj strani površi S .

3.4. Veza površinskih integrala prve i druge vrste

Neka je $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jedinični vektor normale na datu površ S (α, β, γ su uglovi koje \vec{n} zaklapa sa x, y, z osama). Izdelimo S na veoma male površi, kojima dodeljujemo po vektor \vec{n} . Neka je $\text{mes}(D_i)$ mera površine projekcije površine S_i na Oxy . Tada imamo da je

$$\left| \frac{\text{mes}(D_i)}{\text{mes}(S_i)} \right| = |\cos \gamma_i|, \text{ odnosno } \left(\frac{dx dy}{dS} = \cos \gamma \right), \text{ pa je}$$

$\text{mes}(D_i) = \text{mes}(S_i) \cdot \cos \gamma_i$ (γ_i u izabranoj tački). Obzirom na prethodno, Darbouxova suma kojom se definiše integral po xOy ravni postaje

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i \cdot \text{mes}(S_i) \Rightarrow I = \oiint_S f(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

Dakle, važi:

$$(II) \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = (I) \oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Izračunavanje površinskog integrala druge vrste.:

Date su tri funkcije: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, koje jednoznačno biunivoko preslikavaju $(x, y, z) \in S \xleftrightarrow[n_{1-1}]{na} (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Vektor standardizovane normale na površ

je standardizovan vektor koji se dobija iz vektorskog proizvoda $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$. Označimo

koordinate prethodnog vektorskog proizvoda sa $A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$.

Kako je $\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, a

$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$ dobijamo da je:

$$I = (II) \oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = (\text{dvojni}) \int_{\Delta} \pm \iint_{\Delta} (PA + QB + RC) du dv.$$

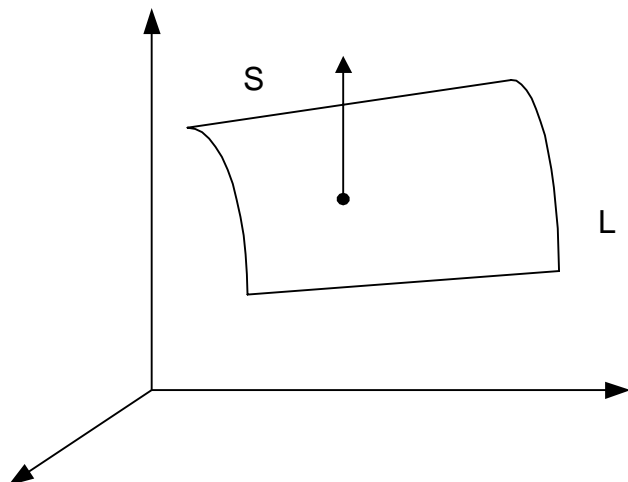
zavisi od strane površi

3.5. Stokes-ova formula

Stokes-ova formula predstavlja vezu između površinskog integrala II vrste i krivolinijskog integrala II vrste.

Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ prosta (ne seče samu sebe), glatka, dvostrana površ, ograničena deo po deo glatkom konturom L , pri čemu na površi S biramo spoljnu stranu, a na L izvesnu pozitivnu orijentaciju kretanja. Neka je data funkcija $P = P(x, y, z)$ koja je neprekidna zajedno sa svim svojim prvim parcijalnim izvodima po svim promenljivim x, y, z i to u oblasti $S \cup L$. Pod svim ovim uslovima tada važi:

$$(A) \quad (II) \int_L P dx = (II) \oint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$



Dokaz : Neka se parametarskim funkcijama $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ površ S jednoznačno preslikava na $\Delta \in \mathbb{R}_{u,v}^2$ (pri tome se kontura L preslikava na konturu Λ).

Kako u tom slučaju iz $x = x(u, v) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ imamo da je

$$\int_L P dx = \int_{\Lambda} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv \quad (\text{II vrste}).$$

Prema *Greenovoj* formuli dobijamo da je:

$$\int_L P dx = (\text{II}) \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) du dv = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) du dv = \iiint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Pretpostavimo dalje da jos uvek važe sve pretpostavke koje se odnose na $S \cup L$, ali da su date još dve funkcije $Q=Q(x,y,z)$ i $R=R(x,y,z)$ koje zadovoljavaju analogne pretpostavke pod brojem 6). Tada važe i sledeće dve formule:

$$(II) \quad \int_L Q dy = \iiint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \quad i$$

$$(III) \quad \int_L R dz = \iiint_S \frac{\partial R}{\partial z} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

Zahvaljujući formulama navedenim pod (I), (II) i (III) tada sleduje da važi i sledeća jednakost, koja se naziva Stokes-ova formula, i koja glasi:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = (I) \oint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \oint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

gde je $\vec{n} = \vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ jedinični vektor normale postavljen na površi S u tački $(x, y, z) \in S$ (u stvari u tekućoj tački $(x, y, z) \in S$ mi imamo $\alpha = \alpha(x, y, z), \beta = \beta(x, y, z), \gamma = \gamma(x, y, z)$).

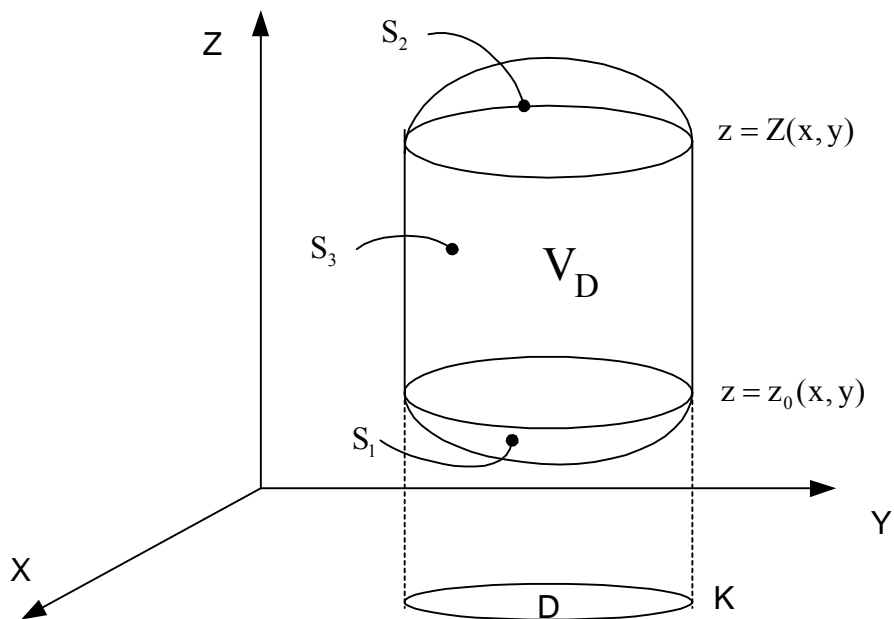
3.6. Teorema Gauss –Ostrogradski

Ova formula omogućava da se sa površinskog integrala II vrste pređe na trojni.

Teorema Gauss-Ostrogradski. Neka je V kompaktna (zatvorena i ograničena), povezana skup u R^3 , čiji je rub deo po deo glatka površ. Neka su $P, Q, R: V \rightarrow R^3$ neprekidno diferencijabilne funkcije (Dovoljno je da budu neprekidni oni parcijalni izvodi koji u formuli učestvuju). Tada važi formula *Gauss-Ostrogradskog*:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = (II) \oint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvršiti za telo koje je zadato sledećim jednačinama. U skladu sa oznakama na crtežu pretpostavimo da su date dve funkcije $S_1: z = z_0(x, y)$, $S_2: z = Z(x, y)$, gde je $(x, y) \in D$ i gde je ispunjen sledeći uslov $z_0(x, y) \leq Z(x, y)$ za $\forall (x, y) \in D$. Površ S_3 je ortogonalna na xOy ravan. Površ S_1, S_2 i S_3 su deo po deo glatke površi. Neka je takođe sa S označena spoljna strana površi $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Mimo ovoga pretpostavimo da je oblast D ograničena izvesnom konturom K koja je deo po deo glatka.



Imamo da je

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \frac{\partial R}{\partial Z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial Z} dz = \\
 &= \iint_D R(x, y, Z(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_0(x, y)) dx dy = \\
 &= \oint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \oint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \left(+ \iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0 \right) = \\
 &= \oint_S R(x, y, z) dx dy.
 \end{aligned}$$

| promene dx i dy su 0 na S₃

Dakle, dobili smo da važi (I) $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial Z} dx dy dz = \oint_S R(x, y, z) dx dy$.

Analogno se dokazuju sledeće dve veze:

$$(II) \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oint_S P(x, y, z) dy dz$$

$$(III) \quad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oint_S Q(x, y, z) dz dx$$

4. Elementi teorije polja

Definicija 1. (Definicija skalarnog polja)

Pretpostavimo da je data bilo koja funkcija: $u = u(\vec{r}) : R^3 \rightarrow R$. Tada kažemo da je dato skalarno polje (R^3 razmatramo kao skup vektora).

Ako je data funkcija $u = u(x, y, z) : R^3 \rightarrow R$ tada vektor $\nabla u = \text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ nazivamo gradijent skalarne funkcije u .

Definicija 2. (Definicija vektorskog polja)

Pretpostavimo da su date tri realne funkcije: $P, Q, R : R^3 \rightarrow R$. One definišu vektorsko polje $\vec{A} : R^3 \rightarrow R^3$ opisano jednakošću $\vec{A}(\vec{r}) = P(\vec{r}) \cdot \vec{i} + Q(\vec{r}) \cdot \vec{j} + R(\vec{r}) \cdot \vec{k}$.

Definicija 3. (Definicija fluksa)

Pretpostavimo da je dato vektorsko polje \vec{A} . Za broj Φ definisan sledećim površinskim integralom $\Phi = \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dS$ kažemo da je fluks vektorskog polja \vec{A} kroz površ S .

Definicija 4. Izraz $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ naziva se divergencija vektorskog polja \vec{A} i označava se na sledeći način: $\text{div} \vec{A}$.

Inače jasno je $\text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$ gde je $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Definicija 5. (Cirkulacija vektorskog pola)

Pretpostavimo da je dato vektorsko polje \vec{A} i neka je u prostoru R^3 data kriva C (otvorena ili zatvorena). Tada se izraz: $\oint_C P dx + Q dy + R dz$ naziva cirkulacija vektorskog polja \vec{A} duž krive C .

Definicija 6. (Definicija rotora)

Za polje A rotor, u oznaci $\text{rot} A$ je definisan sa:

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Očigledno je $\text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$.

Vrste specijalnih polja:

(A) Vektorsko polje \vec{A} se zove *potencijalno* ako postoji skalarno polje u takvo da je:

$$\boxed{\vec{A} = \text{gradu}}$$

Dakle mora biti $\frac{\partial u}{\partial x} = P \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = Q \wedge \frac{\partial u}{\partial z} = R$, pa će postajati takvo u ako i samo ako je

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \wedge \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \wedge \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \text{ ili samim tim ako i samo ako je } \boxed{\text{rot} \vec{A} = 0}.$$

(B) Vektorsko polje \vec{A} se zove *solenoidno* ako postoji vektorsko polje \vec{B} takvo da je

$$\boxed{\vec{A} = \text{rot} \vec{B}}$$

Vektorsko polje \vec{A} je solenoid ako i samo ako je $\boxed{\text{div} \vec{A} = 0}$.

Klasifikacija vektorskog polja \vec{A} :

1. *Potencijalno (bezvrtložno):* $\text{rot} \vec{A} = 0 \wedge \text{div} \vec{A} \neq 0$.
2. *Solenoidno (vrtložno):* $\text{rot} \vec{A} \neq 0 \wedge \text{div} \vec{A} = 0$.
3. *Laplace-ovo:* $\text{rot} \vec{A} = 0 \wedge \text{div} \vec{A} = 0$.
4. *Složeno polje:* $\text{rot} \vec{A} \neq 0 \wedge \text{div} \vec{A} \neq 0$.