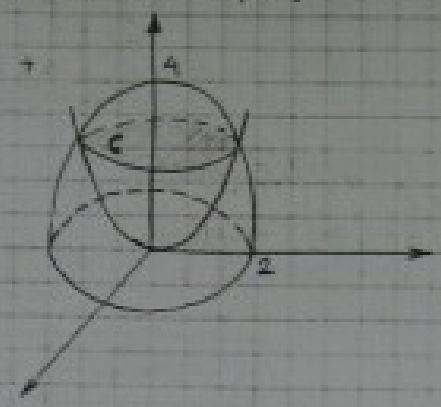
16 Израчунати: $I=\oint_C (4y^2+2x^2)dx+(x+z)dy+y\,dz$, где је

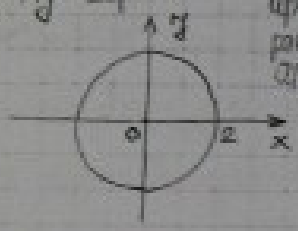
$$C:\begin{cases} z=y^2 \\ z=4-x^2-y^2 \\ \quad\parallel \\ x^2+y^2=4-z \end{cases}$$



$$C:\begin{cases} z=y^2 \\ 4-z=x^2+y^2 \end{cases}$$

Пројекција на раван xoy:

$x^2+y^2=4$



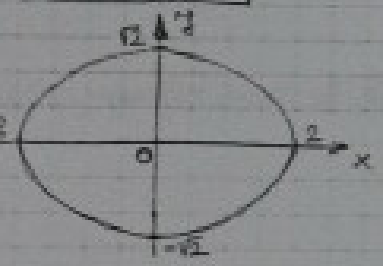
Ово није пројекција пресечне криве на раван xoy већ пресек параболоида $x^2+y^2=4-z$ и равни $z=0$!!!

- Пројекција пресечне криве на xoy:

$y^2=4-x^2-y^2$

$x^2+2y^2=4 \quad /:4$

$D: \boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1}$ - Елипса



$D: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

- Параметризација:

$x=a\cos t \quad , a=2,\ b=\sqrt{2}$

$y=b\sin t$

доћи на крају

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=y^2=2\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=-2\sin t\,dt \\ dy=\sqrt{2}\cos t\,dt \\ dz=4\sin t\cos t\,dt \end{cases}$$

- Сада све то мењамо у I:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\left[(8\sin^2 t+8\cos^2 t)(-2\sin t)+(2\cos t+2\sin^2 t)\cdot\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\sin t\cdot 4\sin t\cos t\right]dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[-16\sin t+2\sqrt{2}\cos^2 t+2\sqrt{2}\sin^2 t\cos t+4\sqrt{2}\sin^2 t\cos t\right]dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cancelto{0}{-16\sin t}+2\sqrt{2}\cos^2 t+6\sqrt{2}\sin^2 t\cos t\right]dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{2}\cdot(1+\cos 2t)+3\sqrt{2}(1-\cos 2t)\cdot\cos t\right)dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2t+3\sqrt{2}\cos t-3\sqrt{2}\cos 2t\cdot\cos t\right)dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2t+3\sqrt{2}\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos 3t\right)dt$$

$$=2\left(\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t+3\sqrt{2}\sin t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{3}{2}\sin 3t\right)\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{2}\pi \Rightarrow \boxed{I=2\sqrt{2}\pi}$$