$D: (x-R)^2+y^2=R^2$

Полярные коорд.

$$x-R=\rho\cdot\cos\varphi \qquad 0\leqslant\rho\leqslant R$$
$$y=\rho\sin\varphi \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$
$$J=\rho$$

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{y^2\cdot(x-R)+y\cdot(x^2+y^2)}{\sqrt{R^2-(x-R)^2-y^2}}+2Rx\right)dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^R\left(\frac{\rho^3\cdot\sin^2\varphi\cos\varphi+\rho^3\sin\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+2R\cdot(R+\rho\cos\varphi)\right)\cdot\rho\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left((\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\int_0^R\frac{\rho^4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+2R\cdot\int_0^R(\rho R+\rho^2\cos\varphi)\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot(I_1+I_2)$$

$$I_1=(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\int_0^R\frac{\rho^4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=\left(\begin{array}{l}\sqrt{R^2-\rho^2}=t\Rightarrow R^2-\rho^2=t^2\Rightarrow\rho=\sqrt{R^2-t^2}\\ d\rho=\frac{-t\,dt}{\sqrt{R^2-t^2}}\end{array}\right.$$

$$=(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)\cdot\int_R^0\frac{(R^2-t^2)^2}{t}\cdot\frac{(-t)}{\sqrt{R^2-t^2}}$$