30.09.1992.

33 Дато је векторско поље $\vec{A}=(z, xz, y)$.

а) Испитати природу тог поља.

б) Наћи векторске линије поља $\vec{A}$.

в) Израчунати циркулацију векторског поља $\vec{A}$ дуж пресечне криве кружног цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и хиперболичког параболоида $z=xy$.

а) $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+0+0=0$

$\operatorname{rot}\vec{A}=(1-x, +1, z)\neq\vec{0}$

} поље је соленоидно

б) Векторске линије поља $\vec{A}$ добијају се у облику првих интеграла система диф. ј-на:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}.$$

Један први интеграл добија се непосредно:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz} \Rightarrow x\,dx=dy \Big/\int = \frac{x^2}{2}=y+\frac{C_1}{2} \Rightarrow \boxed{x^2-2y=C_1}$$

Још један први интеграл система може се добити из

$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{y}$ коришћењем већ нађеног првог интеграла:

из $y=\frac{1}{2}(x^2-C_1)$ и $y\,dx=z\,dz$ добија се

$$\frac{1}{2}(x^2-C_1)\,dx=z\,dz \quad /\int$$

$$\frac{1}{2}\int(x^2-C_1)\,dx=\int z\,dz=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-C_1x\right)=\frac{z^2}{2}+\frac{C_2}{3}$$, па пошто је $C_1=x^2-2y \Rightarrow$

$$\frac{x^3}{3}-(x^2-2y)\cdot x=z^2+\frac{C_2}{3} \quad /\cdot 3$$

$$\boxed{6xy-2x^3-3z^2=C_2}$$

в) $I=\oint_C \vec{A}\cdot\vec{t}\,dS=\iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{N}\,d\sigma=\iint_\Sigma[(1-x)\cos\alpha-\cos\beta+z\cos\gamma]\,d\sigma$

$z=xy$, $p=\frac{\partial z}{\partial x}=y$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}=x$, $\cos\alpha=\frac{-y}{\pm\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $\cos\beta=\frac{-x}{\pm\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $d\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$=\pm\iint_{x^2+y^2\le R^2}[(1-x)(-y)-x+xy]\,dx\,dy=\pm\iint_{x^2+y^2\le R^2}(2xy-x-y)\,dx\,dy=\left[\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=\rho\sin\varphi & 0\le\rho\le R \\ |J|=\rho & \end{array}\right]$$