- Формула Гаус-Остроградског:

- односи површински интеграл у запремину

УСЛОВИ:

① - Ако је Г затворена површ;

② - P, Q, R непрекидно-диференцијабилне у T. (D)

$$\oiint_{\Gamma} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

20

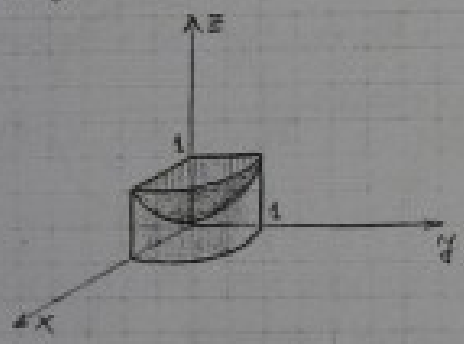
22 Израчунати површински интеграл:

$$I = \oiint_{\Gamma} xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz + y^2z\,dx\,dy$$

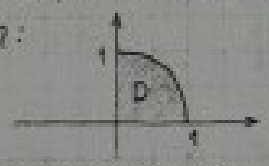
$\Gamma: z = x^2 + y^2 \quad , x, y, z \geq 0$

$x^2 + y^2 = 1$

- Пошто су xz, x^2y, y^2z непрекидно диференцијабилне, а површ Г је затворена, то на основу, може се применити формула Гаус-Остроградског!



⇒ пројекција на xoy-оу је четвртина круга:



Цилиндричне коорд:

$x = \rho\cos\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \rho\sin\varphi \qquad 0 \leq \rho \leq 1$

$z = z \qquad 0 \leq z \leq \rho^2$ јер: из $\begin{cases} 0 \leq z \\ z = x^2 + y^2 \\ \rho^2 \end{cases}$

$J = \rho$

$$I = \iiint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$P = xz \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = z$

$Q = x^2y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2$

$R = y^2z \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = y^2$

$$I = \iiint_{D} (z + x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{\rho^2} (z + \rho^2)\cdot\rho\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^1 d\rho \left(\rho\frac{\rho^2}{2} + \rho^3 z\right)\Big|_0^{\rho^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^1 d\rho \left(\frac{1}{2}\rho^5 + \rho^5\right) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{3}{2}\int_0^1 \rho^5\,d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{8}$$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{8}}$