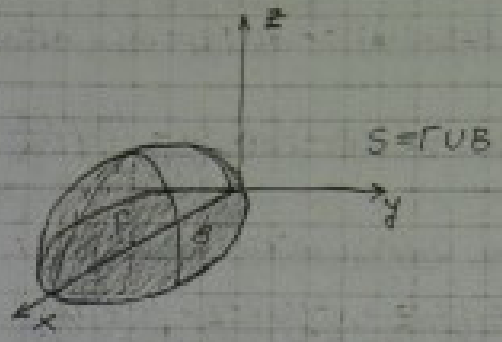
2. Израчунати површински интеграл:

$$I=\oiint_{\Gamma} y^2\,dy\,dz+(x^2+y^2)\,dx\,dz+(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy$$

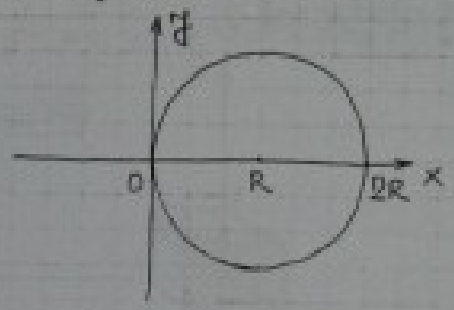
$\Gamma:\ x^2+y^2+z^2\geq 2Rx \ \wedge\ z\geq 0$

$\Gamma:\ (x-R)^2+y^2+z^2=R^2$



- Пошто је површ Г затворена са доње стране, да би услов Гаус-Остроградског био испуњен морамо је затворити са покривачем B. То је управо површина круга (пројекција на xoy раван). Да би се добила спољашња површина на добијено одузети површину тог круга.

Пројекција на xoy оку:



$P=y^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial x}=0$

$Q=x^2+y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=2y$

$R=x^2+y^2+z^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial z}=2z$

$$I=\oiint_{\Gamma} \Rightarrow \oiint_{S}=\oiint_{\Gamma}+\oiint_{B} \Rightarrow \oiint_{\Gamma}=\oiint_{S}-\oiint_{B}$$

$$\oiint_{S}=\iiint_{T}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint_{T}(0+2y+2z)\,dx\,dy\,dz$$

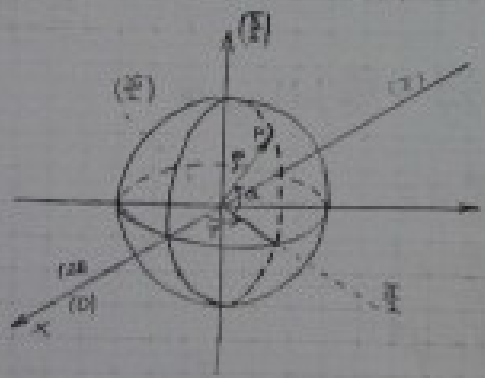
Сферне координате:

$x=\rho\cos\varphi\cdot\cos\theta$

$y=\rho\sin\varphi\cos\theta$

$z=\rho\sin\theta$

$J=\rho^2\cos\theta$



$0\leq\varphi\leq 2\pi$

$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$0\leq\rho\leq R$

$$\oiint_{S}=\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot\int_0^{R}(2\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta+2\rho\sin\theta)\cdot\rho^2\cdot\cos\theta\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot 2\cos\theta\cdot(\sin\varphi\cos\theta+\sin\theta)\cdot\int_0^{R}\rho^3\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\cdot\frac{1}{4}R^4=$$