29 Дато је векторско поље:

$$\vec{A}=\Big(\underbrace{\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3}_{P};\ \underbrace{\frac{2x^3\cdot y}{z}+3y^3}_{Q};\ \underbrace{z^3-\frac{x^3\cdot y^2}{z^2}}_{R}\Big)$$

а) Показати да је поље потенцијално и наћи потенцијал.

б) Израчунати проток тог поља кроз сферу у правцу спољне нормале.

$$\Gamma: x^2+y^2+z^2=1$$

а) $$\operatorname{rot}\vec{A}=\Big(-\frac{2x^3y}{z^2}+\frac{2x^3y}{z^2}+\frac{3x^2\cdot y^2}{z^2}-\frac{3x^2y^2}{z^2}+\frac{6x^2\cdot y}{z}-\frac{6x^2y}{z}\Big)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\vec{A}=0}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{6xy^2}{z}-6x^2+\frac{2x^3}{z}+9y^2+3z^2+\frac{2x^3y^2}{z^3}\neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{A}\neq 0}$$

- Пошто је $\operatorname{rot}\vec{A}=0$ и $\operatorname{div}\vec{A}\neq 0$ => поље је потенцијално!

- Потенцијал поља:

$$P=\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{3x^2\cdot y^2}{z}-2x^3\Big)dx+\int_{y_0}^{y}\Big(\frac{2x_0^3\cdot y}{z}+3y^3\Big)dy+\int_{z_0}^{z}\Big(z^3-\frac{x_0^3\cdot y_0^2}{z^2}\Big)dz$$

$$\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{3x^2y^2}{z}-2x^3\Big)dx=\frac{3y^2}{z}\int_{x_0}^{x}x^2dx-2\int_{x_0}^{x}x^3dx=\frac{3y^2}{z}\frac{x^3}{3}\Big|_{x_0}^{x}-2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{x_0}^{x}=$$

$$=\frac{y^2x^3}{z}-\frac{y^2x_0^3}{z}-\frac{x^4}{2}+\frac{x_0^4}{2}$$

$$\int_{y_0}^{y}\Big(\frac{2x_0^3y}{z}+3y^3\Big)dy=\frac{2x_0^3}{z}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y_0}^{y}+3\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_{y_0}^{y}=\frac{x_0^3y^2}{z}-\frac{x_0^3y_0^2}{z}+\frac{3y^4}{4}-\frac{3y_0^4}{4}$$

$$\int_{z_0}^{z}\Big(z^3-\frac{x_0^3y_0^2}{z^2}\Big)dz=\frac{z^4}{4}\Big|_{z_0}^{z}+\frac{2x_0^3y_0^2}{z}\Big|_{z_0}^{z}=\frac{z^4}{4}-\frac{z_0^4}{4}+\frac{2x_0^3y_0^2}{z}-\frac{2x_0^3y_0^2}{z_0}$$

$$P=\frac{y^2x^3}{z}-\frac{y^2x_0^3}{z}+\frac{x_0^4}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x_0^3y^2}{z}-\cancel{\frac{x_0^3y_0^2}{z}}+\frac{3y^4}{4}-\frac{3y_0^4}{4}+\frac{z^4}{4}+$$

$$+\cancel{\frac{2x_0^3y_0^2}{z}}-\frac{2x_0^3y_0^2}{z_0}$$

$$P=\underbrace{\frac{y^2x^3}{z}-\frac{x^4}{2}+\frac{3y^4}{4}+\frac{z^4}{4}}_{\text{потенцијал поља}}+\underbrace{\Big(\frac{x_0^4}{2}-\frac{3y_0^4}{4}-\frac{z_0^4}{4}-\frac{x_0^3y_0^2}{z_0}\Big)}_{C}$$

$$\boxed{P=\frac{y^2x^3}{z}-\frac{x^4}{2}+\frac{3y^4}{4}+\frac{z^4}{4}+C}$$