4 Дате су површи: $\Gamma_1: z = x^2+y^2$ - елиптички параболоид

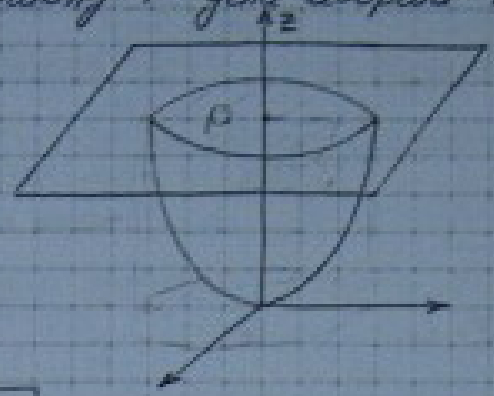
$\Gamma_2: z = 2\cdot(1+x+y)$ - раван

а) Израчунати V тела ограничена површима Γ_1 и Γ_2.

б) Израчунати површину P дела површи Γ_2 из које исеца површ Γ_1

а) $\Gamma_1: z = x^2+y^2$

$\Gamma_2: z = 2x+2y+2$



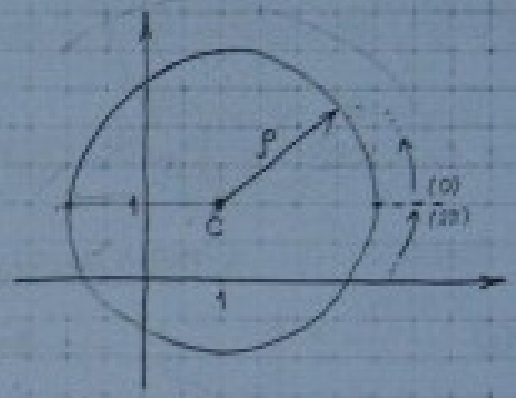
$$\boxed{V = \iint_D (z_{gr} - z_{do})\,dx\,dy}$$

D - површина пресека

Ј-на пресека: $z_1 = z_2$

$x^2+y^2-2x-2y+2=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ - круг



$x-1=\rho\cos\varphi \Rightarrow x = 1+\rho\cos\varphi$

$y-1=\rho\sin\varphi \Rightarrow y = 1+\rho\sin\varphi$

$\Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le 2$

$z = (1+\rho\cos\varphi)^2+(1+\rho\sin\varphi)^2 = 1+2\rho\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi+1+2\rho\sin\varphi+\sin^2\varphi =$

$= \rho^2+2\rho\sin\varphi+2\rho\cos\varphi+2$

$z = 2\cdot(1+1+\rho\cos\varphi+1+\rho\sin\varphi) = 2\rho\sin\varphi+2\rho\cos\varphi+6$

$z-z = \cancel{2\rho\sin\varphi}+\cancel{2\rho\cos\varphi}+6-\rho^2-\cancel{2\rho\sin\varphi}-\cancel{2\rho\cos\varphi}-2 = 4-\rho^2$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 (4-\rho^2)\cdot\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot I_1$$

$$I_1 = \int_0^2 (4\rho-\rho^3)\,d\rho = 4\int_0^2 \rho\,d\rho - \int_0^2 \rho^3\,d\rho = 2\rho^2\Big|_0^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 8-4=4$$

$$V = \int_0^{2\pi} 4\,d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi \Rightarrow \boxed{V=8\pi}$$