20.06.2000.

35 Дато је векторско поље $\vec{A}=(\overset{P}{x},\overset{Q}{z},\overset{R}{y})$.

а) Испитати природу тог векторског поља и одредити његове векторске линије.

б) Израчунати циркулацију поља дуж пресечне криве сфери: $x^2+2y^2=z^2$ и $|y|=1-z$, ако је крива оријентисана позитивно гледано из координатног почетка.

а) $\operatorname{div}\vec{A}=1+0+0=1$

$\operatorname{rot}\vec{A}=(0,0,0)=\vec{0}$ } поље је потенцијално

Векторске линије поља

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$$

I) $y\,dy=z\,dz \quad /\int$

$\frac{y^2}{2}=\frac{z^2}{2}+\frac{C_1}{2}$

Ψ_1: $\boxed{y^2-z^2=C_1}$ први интеграл

II) $\frac{dx}{x}=\frac{d(y+z)}{y+z} \quad /\int$

$\ln|x|=\ln|y+z|+\ln C$

$x=C_2\cdot(y+z)$

Ψ_2: $\boxed{C_2=\frac{x}{y+z}}$ први интеграл

$$W\begin{bmatrix}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2y & -2z\\ \frac{1}{y+z} & \frac{-x}{(y+z)^2} & \frac{-x}{(y+z)^2}\end{bmatrix}$$

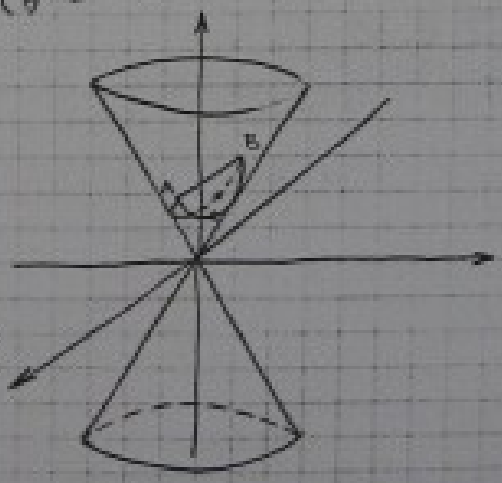
$\Delta=-\frac{2y}{y+z}\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} W=2 \Rightarrow$ први интеграли су независни

$\Rightarrow$ Опште решење диф ј-не. $\begin{cases}y^2-z^2=C_1\\ \frac{x}{y+z}=C_2\end{cases}$

б) $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}-z^2=0$ - конус

$y=1-z \quad (y\geq 0)$

$y=z-1 \quad (y\leq 0)$ - две полуравни



- Пошто је поље потенцијално интеграл не зависи од избора пута

$$I=\iint_{\Sigma}\underset{(0,0,0)}{\operatorname{rot}\vec{A}}\cdot\vec{N}\cdot dS=0$$