05.09.1991.

30 Дато је векторско поље $\vec{F}=\left(\frac{1}{x^2yz}+\frac{1}{x},\ \frac{1}{xy^2z}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{xyz^2}+\frac{1}{z}\right)$

а) Доказати да је поље потенцијално и одредити му потенцијал

б) Наћи векторске линије тог поља.

в) Израчунати проток (флукс) тока $\vec{F}$ кроз сферу $x^2+y^2+z^2=1$ у правцу њене спољне нормале. Да ли се може применити формула Гаус-Остроградског?

а) $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{2}{x^3yz}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy^3z}-\frac{1}{y^2}-\frac{2}{xyz^3}-\frac{1}{z^2}\neq 0$

$\operatorname{rot}\vec{A}=(0,0,0)=\vec{0}$

$$P=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y^2z}\cdot(x^{-2})\,dx+\int_{x_0}^{x_0}\frac{dx}{x}+\int_{y_0}^{y}\frac{1}{xz}\cdot(y^{-2})\,dy+\int_{y_0}^{y}y^{-1}\,dy+\int_{z_0}^{z}\frac{1}{x_0y_0}z^{-2}\,dz+\int_{z_0}^{z}z^{-1}\,dz=$$

$$=\left(\frac{1}{y^2z}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\right)\Big|_{x_0}^{x}+\ln x\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{x_0z}\cdot\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big|_{y_0}^{y}+\ln|y|\Big|_{y_0}^{y}+\frac{1}{x_0y_0}\left(\frac{z^{-1}}{-1}\right)\Big|_{z_0}^{z}+\ln|z|\Big|_{z_0}^{z}=$$

$$=-\frac{1}{xyz}+\cancel{\frac{1}{x_0yz}}+\ln|x|-\ln|x_0|-\cancel{\frac{1}{x_0yz}}+\cancel{\frac{1}{x_0y_0z}}+\ln|y|-\ln|y_0|-$$

$$-\cancel{\frac{1}{x_0y_0z}}+\frac{1}{x_0y_0z_0}+\ln|z|-\ln|z_0|=$$

$$P=-\frac{1}{xyz}+\ln|x|+\ln|y|+\ln|z|+\frac{1}{x_0y_0z_0}-\ln|x_0|-\ln|y_0|-\ln|z_0|$$

$$=-\frac{1}{xyz}+\ln|x\cdot y\cdot z|+\frac{1}{x_0y_0z_0}-\ln|x_0y_0z_0|$$

$$\boxed{P=-\frac{1}{xyz}+\ln|xyz|+C_1}$$

б) $\frac{dx}{\frac{1}{xyz}+\frac{1}{x}}=\frac{dy}{\frac{1}{xyz}+\frac{1}{y}}=\frac{dz}{\frac{1}{xyz}+\frac{1}{z}}\Rightarrow\frac{x\,dx}{\frac{1}{xyz}+1}=\frac{y\,dy}{\frac{1}{xyz}+1}=\frac{z\,dz}{\frac{1}{xyz}+1}\Rightarrow$

$$\frac{x\,dx-y\,dy}{0}=\frac{x\,dx-z\,dz}{0}=\frac{y\,dy-z\,dz}{0}\Rightarrow$$

$x\,dx-y\,dy=0\ /\int$ $\quad x\,dx-z\,dz=0\ /\int$ $\quad y\,dy-z\,dz=0\ /\int$

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=C$ $\quad \frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{2}=C$ $\quad \frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}=C$

$\boxed{x^2-y^2=C_1}$ $\quad \boxed{x^2-z^2=C_2}$ $\quad \boxed{y^2-z^2=C_3}$

Било која два од ова три интеграла независна су фундаментални