05. 07. 1991.

29. Дато је векторско поље $\vec{A}=(y^2-z^2,\ z^2-x^2,\ x^2-y^2)$.

а) Испитати природу тог векторског поља и одредити његове векторске линије.

б) Израчунати циркулацију поља дуж пресечне криве обртног конуса $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$ и параболичног цилиндра $z^2=2x$ $(z\geq 0)$. Како циркулација зависи од смера интегрирања?

в) Израчунати флукс (проток) тог поља у правцу спољне стране површи дате под б).

а) $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+0+0=0$

$\operatorname{rot}\vec{A}=(-2y-2z,\ -2z-2x,\ -2x-2y)\neq 0$

поље је соленоидно!

- Векторске линије поља:

$$\frac{dx+dy+dz}{y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2}=t$$

$dx+dy+dz=0 \quad \int$

$\boxed{x+y+z=C_1}$

$$\frac{x^2dx+y^2dy+z^2dz}{x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)}=t$$

$x^2dx+y^2dy+z^2dz=0 \quad /\int$

$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3=C_2$

$\boxed{\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)=C_2}$

б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ - конус

$z=\sqrt{2x} \Rightarrow x=\frac{1}{2}z^2$

$$I=\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$[-\pi,\pi]=[0,2\pi]$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\big(\sin^2t-4\cos^2\tfrac{t}{2}\big)\cdot(-\sin t)+\big(4\cos^2\tfrac{t}{2}-4\cos^4\tfrac{t}{2}\big)\cos t+$$

$$+\big(4\cos^4\tfrac{t}{2}-\sin^2t\big)\cdot\big(-\sin\tfrac{t}{2}\big)\Big]dt=\int_{-\pi}^{\pi}\big(4\cos^2\tfrac{t}{2}-4\cos^4\tfrac{t}{2}\big)\cos t\,dt=$$

$$=4\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\tfrac{t}{2}\big(1-\cos^2\tfrac{t}{2}\big)\cos t\,dt=4\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\tfrac{t}{2}\sin^2\tfrac{t}{2}\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2t\,d(\sin t)=$$

$$=\sin^3t\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

D: $(x-1)^2+y^2=1$

$x=1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{t}{2}$

$y=\sin\varphi$

$z=2\cos\frac{t}{2}$

$dx=-\sin t\,dt$

$dy=\cos t\,dt$

$dz=-\sin\frac{t}{2}\,dt$

в) $\Pi=\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\,dx\,dy\,dz=0$, јер је $\operatorname{div}\vec{A}=0$