Вежба бр. 1. 24.09.2007.

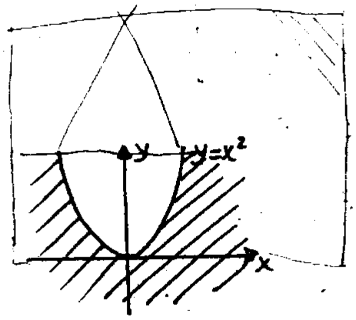
Функције више променљивих

Зад. 1. Одредити област дефинисаности дате ф-је и нацртати је у равни или простору.

а) $z = \ln(x^2-y)$
б) $z = \ln(x^2+y^2)$
в) $z = \sqrt{x^2+y^2-2x}$
г) $u = \sqrt{x^2-2x+y^2+z^2}$
д) $u = \frac{x+y+z}{z-1}$
ђ) $z = 1 / \ln(x+y)$

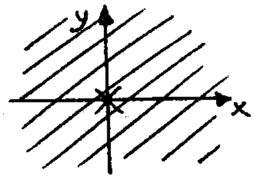
Решење: а) $x^2-y>0 \iff y<x^2$

$$\mathcal{D}_z = \{(x,y)\in R^2 \mid y<x^2\}$$



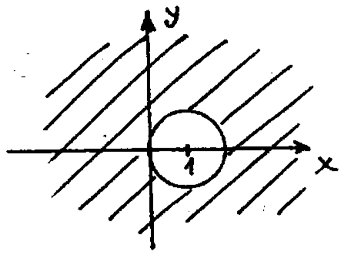
б) $x^2+y^2>0 \iff (x,y)\neq(0,0)$

$$\mathcal{D}_z = \{(x,y)\in R^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$$



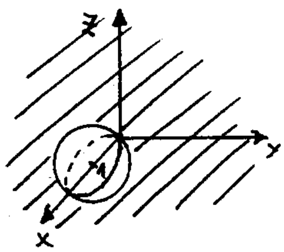
в) $x^2+y^2-2x\geq 0$
$(x-1)^2-1+y^2\geq 0$
$(x-1)^2+y^2\geq 1$

$$\mathcal{D}_z = \{(x,y)\in R^2 \mid (x-1)^2+y^2\geq 1\}$$



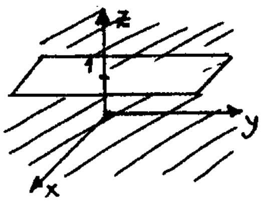
г) $x^2+y^2-2x+z^2\geq 0$
$(x-1)^2-1+y^2+z^2\geq 0$
$(x-1)^2+y^2+z^2\geq 1$

$$\mathcal{D}_u = \{(x,y,z)\in R^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2\geq 1\}$$



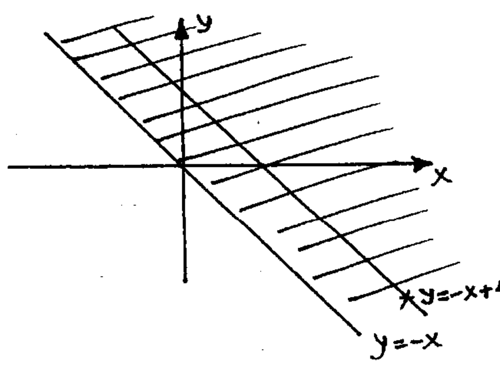
д) $z\neq 1$

$$\mathcal{D}_u = \{(x,y,z)\in R^3 \mid z\neq 1\}$$



ђ) $x+y>0 \ \wedge\ x+y\neq 1$
$y>-x \ \wedge\ y\neq -x+1$

$$\mathcal{D}_z = \{(x,y)\in R^2 \mid y>-x \wedge y\neq -x+1\}$$



Парцијални изводи. Први и други диференцијал ф-је

Зад. 1. Одредити парцијалне изводе 1. и 2. реда и 1. и 2. диференцијал:
$z = x^3 + 3xy^2 + \frac{x}{y} + 5$.

Решење:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= z_x' = 3x^2 + 3y^2 + \frac{1}{y}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= z_y' = 6xy - \frac{x}{y^2}\end{aligned}\right\}\ \text{п.и. 1. реда}$$

$$\boxed{dz = z_x dx + z_y dy} = \left(3x^2+3y^2+\frac{1}{y}\right)dx + \left(6xy - \frac{x}{y^2}\right)dy \quad \text{- диференцијал 1. реда}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= z_{xx} = 6x\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= z_{xy} = 6y - \frac{1}{y^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= z_{yy} = 6x + \frac{2x}{y^3}\end{aligned}\right\}\ \text{п.и. 2. реда}$$

$z_{xy} = z_{yx}$

$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\boxed{d^2 z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2}$$

$$= 6x\,dx^2 + \left(12y - \frac{2}{y^2}\right)dxdy + \left(6x + \frac{2x}{y^3}\right)dy^2 \quad \text{-диференцијал 2. реда}$$

Зад. 2. $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad dz(1,1)$, $d^2z(1,1)$

Решење:

$z_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_x' = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$

$z_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)_y' = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$

$dz(1,1) = -\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

$z_{xx} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x' = -y\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_x' = -y\,\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$

$z_{xy} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y' = \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(1,1)} = 0$

$z_{yy} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_y' = x\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_y' = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$

$d^2z(1,1) = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$

Зад. 3. $u = x^3 + 3xy + y^2 - xz + \frac{x}{z} \qquad du(1,0,1) \qquad d^2u(1,0,1)$

Решење:

$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz$

$d^2u = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 + u_{zz}dz^2 + 2u_{xy}dxdy + 2u_{xz}dxdz + 2u_{yz}dydz$

$$\left.\begin{aligned}u_x &= 3x^2 + 3y - z + \frac{1}{z}\Big|_{(1,0,1)} = 3\\ u_y &= 3x + 2y\Big|_{(1,0,1)} = 3\\ u_z &= -x - \frac{x}{z^2}\Big|_{(1,0,1)} = -2\end{aligned}\right\} du(1,0,1) = 3dx + 3dy - 2dz$$

$$\left.\begin{aligned}u_{xx} &= 6x\Big|_{(1,0,1)} = 6\\ u_{yy} &= 2\\ u_{zz} &= \frac{2x}{z^3}\Big|_{(1,0,1)} = 2\\ u_{xy} &= 3\\ u_{xz} &= -1 - \frac{1}{z^2}\Big|_{(1,0,1)} = -2\\ u_{yz} &= 0\end{aligned}\right\} d^2u(1,0,1) = 6dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 6dxdy - 4dxdz$$

Зад. 4. $u(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ $\quad du(1,1,1) \quad d^2u(1,1,1)$

Решење: $u_x = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$ $\quad u_{xx} = \frac{2z}{x^3}$ $\quad u_{xy} = -\frac{1}{y^2}$

$u_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$ $\quad u_{yy} = \frac{2x}{y^3}$ $\quad u_{xz} = -\frac{1}{x^2}$

$u_z = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}$ $\quad u_{zz} = \frac{2y}{z^3}$ $\quad u_{yz} = -\frac{1}{z^2}$

$$du(1,1,1) = u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0$$

$$d^2u(1,1,1) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz$$

Зад. 5. Одредити d^4u, $u(x,y,z) = \ln(x^x y^y z^z)$

Решење: $\ln(x^x y^y z^z) = \ln x^x + \ln y^y + \ln z^z = x\ln x + y\ln y + z\ln z$

$u'_x = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1 + \ln x$

$u''_{xx} = \frac{1}{x}$ $\quad u'''_{xxx} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad u^{IV}_{xxxx} = \frac{2}{x^3}$

мешовити изводи су нула

$$d^4u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}dz$$

Зад. 6. Одредити диференцијале d^2z, $z = y\ln x$

Решење: $z'_x = y\cdot\frac{1}{x}$ $\quad z'_y = \ln x$ $\quad z''_{xy} = \frac{1}{x}$

$z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$ $\quad z''_{yy} = 0$ $\quad z''_{yx} = \frac{1}{x}$

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

$$= -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dxdy + 0\cdot dy^2$$

Зад. 7. За ф-ју $z = z(x,y)$ дату у имплицитном облику $e^z = x^2 + y^2 + z^2$ наћи $dz(M)$ и $d^2z(M)$ где је $M(0,1,0)$.

Решење: $e^z = x^2 + y^2 + z^2 \;/\frac{\partial}{\partial x} \quad /\frac{\partial}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial x}\backslash\; e^z\cdot z'_x = 2x + 0 + 2z\cdot z'_x \Rightarrow z'_x = \frac{2x}{e^z - 2z} \Rightarrow z'_x(M) = \frac{0}{\cdots} = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}\backslash\; e^z\cdot z'_y = 0 + 2y + 2z\cdot z'_y \Rightarrow z'_y = \frac{2y}{e^z - 2z} \Rightarrow z'_y(M) = 2$

$\Rightarrow dz(M) = 2dy$

$e^z\cdot(z'_x)^2 + e^z\cdot z''_{xx} = 2 + 2(z'_x)^2 + 2z''_{xx} \Rightarrow z''_{xx}(M) = 2$

$e^z\cdot z'_y\cdot z'_x + e^z\cdot z''_{xy} = 2z'_y z'_x + 2z z''_{xy} \Rightarrow z''_{xy}(M) = 0$

$e^z\cdot(z'_y)^2 + e^z\cdot z''_{yy} = 2 + 2(z'_y)^2 + 2z z''_{yy} \Rightarrow z''_{yy}(M) = 6$

$\Rightarrow d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$

$d^2z = 2dx^2 + 6dy^2$

Зад. 8. Показати да ф-ја $z = y\cdot f(\underbrace{x^2-y^2}_{u})$ задовољава ј-ну $y^2\cdot z'_x + xy\cdot z'_y = xz$.

Решење: $u = x^2 - y^2$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'\cdot 2x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'\cdot(-2y)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot f'\cdot 2x = 2xyf'$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1\cdot f + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = f + y(-2yf') = f - 2y^2 f'$

$$y^2(2xyf') + xy(f - 2y^2f') = xyf = xz$$

вежба бр. 2

01.10.2007.

Екстремне вредности ф-је више променљивих

Посматраћемо ф-је 2. реда. $n=2$, $z=z(x,y)$

1° Решити систем $\underbrace{z_x=0,\ z_y=0}$

$M_1(x_1,y_1,z_1),\dots,M_k(x_k,y_k,z_k)$ – стационарне тачке

2° Одредимо изводе 2. реда z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}

3° Ово заменимо у некој тачки: $r=z_{xx}(M)$, $s=z_{xy}(M)$, $t=z_{yy}(M)$

4° Посматрамо $\Delta=rt-s^2$ да видимо шта смо добили

I $\Delta>0,\ r>0 \rightarrow M$ – локални минимум

II $\Delta>0,\ r<0 \rightarrow M$ – локални максимум

III $\Delta<0 \rightarrow M$ није екстремум

IV $\Delta=0 \rightarrow ?$ (потребна су додатна испитивања помоћу прираштаја ф-је)

Одредити локалне екстремуме

Зад. 1. $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

Решење: $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

$$\begin{array}{l} z_x=8x^3-2x=0 \\ z_y=4y^3-4y=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} 2x(4x^2-1)=0 \\ 4y(y^2-1)=0 \end{array} \iff \begin{array}{l} 2x=0 \ \vee\ x=\frac{1}{2} \ \vee\ x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \ \vee\ y=1 \ \vee\ y=-1 \end{array}$$

Имамо девет стационарних тачака

$M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(0,-1)$

$M_4(\frac{1}{2},0)$, $M_5(\frac{1}{2},1)$, $M_6(\frac{1}{2},-1)$

$M_7(-\frac{1}{2},0)$, $M_8(-\frac{1}{2},1)$, $M_9(-\frac{1}{2},-1)$

$z_{xx}=24x^2-2$

$z_{yy}=12y^2-4$

$z_{xy}=0$

$M_1(0,0)$: $r=-2$, $s=0$, $t=-4$, $\Delta=8 \Rightarrow \Delta>0,\ r<0$ max, $z_{max}=z(M_1)=0$

$M_2(0,1)$: $r=-2$, $t=8$, $s=0$, $\Delta=-16 \Rightarrow$ није екстремум

$M_3(0,-1)$: $r=-2$, $t=8$, $s=0$, $\Delta=-16 \Rightarrow$ није екстремум
(слично M_4, M_7)

$M_5(\frac{1}{2},1)$: $r=4$, $t=8$, $s=0$, $\Delta=32 \Rightarrow M_5$ је минимум, $z_{min}=z(M_5)$
(слично M_6, M_8, M_9)

Зад. 2. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$

Решење: $z_x=y-\frac{50}{x^2}=0\ /\cdot x$

$z_y=x-\frac{20}{y^2}=0\ /\cdot y$

$xy-\frac{50}{x}=0$

$xy-\frac{20}{y}=0$ $\Big\}-$

$y=\frac{2x}{5}$

$\frac{2x}{5}-\frac{50}{x^2}=0$

$x=5$

$M(5,2)$

$z_{xx}=\frac{100}{x^3}$

$z_{yy}=\frac{40}{y^3}$

$z_{xy}=1$

$r=\frac{4}{5}$, $t=5$, $s=1$, $\Delta=3$, $\Delta>0,\ r>0 \Rightarrow$ лок. мин. $z_{min}=z(M)=30$

Зад. 3. $z = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$

Решење: $z_x = y - 2xy - y^2 = 0 \iff y(1-2x-y) = 0$
$z_y = x - x^2 - 2xy = 0 \qquad x(1-x-2y) = 0$

1° $y=0$: $0=0$, $x(1-x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1 \Rightarrow M_1(0,0),\ M_2(1,0)$

2° $x=0$: $y(1-y)=0$, $0=0 \Rightarrow y=0,\ y=1 \Rightarrow M_3(0,1)$

3° $x\neq 0,\ y\neq 0$: $1-2x-y=0$, $1-x-2y=0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2x+y&=1\\ x+2y&=1 \,/\cdot(-2)\\ \hline 2x+y&=1\\ -2x-4y&=-2\\ \hline y=\tfrac{1}{3} \quad x&=\tfrac{1}{3} \end{aligned} \Rightarrow M_4\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)$$

$r = z_{xx} = -2y$
$t = z_{yy} = -2x$
$s = z_{xy} = 1-2x-2y$

$M_1(0,0)$: $r=0,\ t=0,\ s=1,\ \Delta=-1<0$ нема екстремума
$M_2(1,0)$: $r=0,\ t=-2,\ s=-1,\ \Delta=-1<0$ нема екстремума
$M_3(0,1)$: $r=-2,\ t=0,\ s=-1,\ \Delta=-1<0$ нема екстремума
$M_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: $r=-\frac{2}{3},\ t=-\frac{2}{3},\ s=-\frac{1}{3},\ \Delta=\frac{1}{3}>0$, M_4 је лок. макс. $z_{max} = z(M_4) = \frac{1}{27}$

Прираштај ф-је z у тачки $M(x_0,y_0)$ рачуна се по формули
$\Delta z(x_0,y_0) = z(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)$
$\Delta z>0 \rightarrow$ локални минимум
$\Delta z<0 \rightarrow$ локални максимум
$\Delta z \gtrless 0 \rightarrow$ није екстремум

Зад. 4. $z = (y-x)^2 + (y+2)^3$

Решење: $z_x = -2(y-x) = 0$
$z_y = 2(y-x) + 3(y+2)^2 = 0 \Rightarrow M(-2,-2)$

$z_{xx} = 2,\quad z_{xy} = -2,\quad z_{yy} = 2+6(y+2)$

$r=2,\ s=2,\ t=-2,\ \Delta = 4-4 = 0$?

$\Delta z(-2,-2) = z(-2+\Delta x,\ -2+\Delta y) - z(-2,-2)$
$= (\cancel{-2}+\Delta y \cancel{+2} - \Delta x)^2 + (\cancel{-2}+\Delta y \cancel{+2})^3 - 0$
$= (\Delta y - \Delta x)^2 + \Delta y^3$

1° $\Delta y = \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta z(-2,-2) = \Delta x^3 > 0$
2° $\Delta y = \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta z(-2,-2) = \Delta x^3 < 0$
$\Big\} \Rightarrow \Delta z \gtrless 0$ није екстремум

Посматрајмо ф-ју 3 променљиве. $n=3$, $u=u(x,y,z)$

1° Решимо систем

$$\left.\begin{matrix} u_x=0 \\ u_y=0 \\ u_z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_1(x_1,y_1,z_1),\ \dots,\ M_k(x_k,y_k,z_k)$$ – стационарне тачке

2° Тражимо изводе вишег реда

$u_{xx},\ u_{yy},\ u_{zz},\ u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}$

3° формира се диференцијал

$$d^2u = u_{xx}dx^2 + u_{yy}dy^2 + u_{zz}dz^2 + 2u_{xy}dxdy + 2u_{xz}dxdz + 2u_{yz}dydz$$

$d^2u(M) > 0 \rightarrow$ локални минимум

$d^2u(M) < 0 \rightarrow$ локални максимум

$d^2u(M) \gtrless 0 \rightarrow$ није екстремум

$d^2u(M) = 0 \rightarrow$ додатно испитивање

У неким случајевима знак првог диференцијала може се одредити помоћу Силвестеровог критеријума.

$$A = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{xy} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{xz} & u_{yz} & u_{zz} \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = u_{xx}(M), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \det A$$

1° $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \Rightarrow d^2u(M) > 0$ минимум

2° $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0 \Rightarrow d^2u(M) < 0$ максимум

Зад. 1. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Ивана Журић
288/06

Решење: $$\left.\begin{matrix} u_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u_y = 2y + 12x = 0 \\ u_z = 2z + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} M_1(0,0,-1) \\ M_2(24,-144,-1) \end{matrix}$$

$u_{xx} = 6x,\ u_{yy} = 2,\ u_{zz} = 2,\ u_{xy} = 12,\ u_{xz} = 0,\ u_{yz} = 0$ ✓

$$A = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_1(0,0,-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

не може Силвестер

$d^2u(M_1) = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy \gtrless 0$ – није екстремум M_1

1° $dz=0,\ dy=dx\neq 0 \Rightarrow d^2u(M_1) = 26dx^2 > 0$

2° $dz=0,\ dy=-dx\neq 0 \Rightarrow d^2u(M_1) = -22dx^2 < 0$

$$M_2(24,-144,-1) \qquad A = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 144 \qquad \Delta_2 = 288 - 144 = 144 \qquad \Delta_3 = 556 - 144\cdot 2 = 288$

$\Rightarrow d^2u(M_2) > 0$ лок. мин. $\Rightarrow u_{min} = u(M_2) = -6913$

Журић Ивана

Зад. 2. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x>0,\ y>0,\ z>0$

Решење: $u_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{2x}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{y}{2x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$u_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{y}\right)^2 = \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{z}{y} = 1 \Rightarrow y = 1$

$u_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z = 1$

$\Big\} M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

$u_{xx} = \frac{y^2}{2x^3}$ $\quad u_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}$ $\quad u_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$

$u_{xy} = -\frac{y}{2x^2}$ $\quad u_{xz} = 0$ $\quad u_{yz} = -\frac{2z}{y^2}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 4 \qquad \Delta_2 = 8 \qquad \Delta_3 = 32$$

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \Rightarrow d^2u(M) > 0 \Rightarrow M$ је лок. мин. $\quad u_{min} = u(M) = 3$

II начин:
$$\begin{aligned} d^2u &= 4dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy - 4dydz \\ &= (2dx - dy)^2 + 2dy^2 + 6dz^2 - 4dydz \\ &= (2dx - dy)^2 + 2(dy^2 + 3dz^2 - 2dydz) \\ &= (2dx - dy)^2 + 2((dy - dz)^2 + 2dz^2) \\ &= (2dx - dy)^2 + 2(dy - dz)^2 + 4dz^2 > 0 \Rightarrow \text{лок. мин.} \end{aligned}$$

$$d^2u(M) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} &2dx - dy = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ &dy - dz = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ &dz = 0 \end{aligned}$$

Зад. 3. $u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$

Решење: $u_x = 3x^2 + y - 2z = 0$

$u_y = x + 2y + 3 = 0$

$u_z = -2x + 4z = 0$

$\Big\} M_1\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

$u_{xx} = 6x$ $\quad u_{yy} = 2$ $\quad u_{zz} = 4$ $\quad u_{xy} = 1$ $\quad u_{xz} = -2$ $\quad u_{yz} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 6 \qquad \Delta_2 = 11 \qquad \Delta_3 = 48 - 8 - 4 = 36$$

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \Rightarrow d^2u > 0 \Rightarrow$ лок. мин.

$d^2u = \underline{-3dx^2} + 2dy^2 + \underline{4dz^2} + \underline{2dxdy} - \underline{4dxdz} \gtrless 0 \Rightarrow$ није екстрем

1° $dy = dz = 0,\ dx \neq 0 \Rightarrow -3dx^2 < 0$

2° $dx = dy = 0,\ dz \neq 0 \Rightarrow 4dz^2 > 0$

вежбе бр. 3

10.10.2007.

Условни екстремум

Посматрамо ф-ју две променљиве; $n=2$

$z=z(x,y)$ при услову $\varphi(x,y)=0$

1° формирамо Лагранжову ф-ју
$L(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

2° нађемо прве изводе
$\left.\begin{array}{l}L_x=0\\L_y=0\\L_\lambda=0\end{array}\right\}$ $M_1(x_1,y_1),\lambda_1,\ \dots,\ M_k(x_k,y_k),\lambda_k$ – стационарне тачке

3° $d^2L=L_{xx}dx^2+2L_{xy}dxdy+L_{yy}dy^2$

4° диференцирамо услов $\varphi(x,y)=0\Rightarrow\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0\Rightarrow dy=-\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}dx$

5° $d^2L(M)>0$ → минимум
$d^2L(M)<0$ → максимум
$d^2L(M)\gtrless 0$ → нема екстрема
$d^2L(M)=0$?

Напомена: У неким задацима могуће је изоставити корак 4° ако је знак 2 диференцијала видљив.

Зад. 1. Одредити локалне екстремуме ф-је под датим условима
$z=2xy+4$, $y-x=2$.

Решење: $L=2xy+4+\lambda(y-x-2)$

$\left.\begin{array}{l}L_x=2y-\lambda=0\\L_y=2x+\lambda=0\\L_\lambda=y-x-2=0\end{array}\right\}$ $M(-1,1)$, $\lambda=2$

$L_{xx}=L_{yy}=0,\ L_{xy}=2\Rightarrow d^2L=4dxdy=4dx^2>0\quad\Rightarrow z_{MIN}=z(-1,1)=2$

$y-x-2=0\Rightarrow -dx+dy=0\Rightarrow dy=dx$

Зад. 2. ф-ја: $z=x^2-y^2$, услов: $5x^2-6xy+5y^2=8$

Решење: $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(5x^2-6xy+5y^2-8)$

$L_x=2x+10\lambda x-6\lambda y=0$
$L_y=-2y-6\lambda x+10\lambda y=0$ $\iff$ $\left.\begin{array}{l}(1+5\lambda)x-3\lambda y=0\\-3\lambda x+(5\lambda-1)y=0\end{array}\right\}$ има нетривијална решења само ако $\Delta=0$
$L_\lambda=5x^2-6xy+5y^2-8=0$

$\Delta=\begin{vmatrix}1+5\lambda & -3\lambda\\-3\lambda & 5\lambda-1\end{vmatrix}=25\lambda^2-1-9\lambda^2=16\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{4}$

1° $\lambda\neq\pm\frac14\Rightarrow x=y=0\Rightarrow -8=0$ ✗

2° $\lambda=\frac14$: $\frac94x-\frac34y=0\Rightarrow y=3x$
$5x^2-18x^2+45x^2=8\Rightarrow x=\pm\frac12$

$M_1(\frac12,\frac32)$, $\lambda=\frac14$
$M_2(-\frac12,-\frac32)$, $\lambda=\frac14$
$M_3(\frac32,\frac12)$, $\lambda=-\frac14$
$M_4(-\frac32,-\frac12)$, $\lambda=-\frac14$

$L_{xx} = 2+10\lambda \qquad L_{yy} = -2+10\lambda \qquad L_{xy} = -6\lambda$

$d^2L = (2+10\lambda)dx^2 - 12\lambda\, dx dy + (10\lambda-2)dy^2$
$d^2L(M_{1/2}) = \frac{9}{2}dx^2 - 3dxdy + \frac{1}{2}dy^2$

морамо да диференцирамо услов
$5x^2-6xy+5y^2-8=0 \Rightarrow (10x-6y)dx + (10y-6x)dy=0$
$M_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2}): (\frac{10}{2}-\frac{18}{2})dx + (\frac{30}{2}-\frac{6}{2})dy=0 \Rightarrow -4dx+12dy=0 \Rightarrow dx=3dy$
$M_2(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}): 4dx-12dy=0 \Rightarrow dx=3dy$

$d^2L(M_{1/2}) = \frac{81}{2}dy^2 - 9dy^2 + \frac{1}{2}dy^2 = 32dy^2 > 0 \Rightarrow M_{1/2}$ минимум

$z_{min} = z(M_{1/2}) = -2$

Аналогно M_3 и M_4 су максимуми

Зад. 3. $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \quad , \quad x+y+z=\frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0$

Решење: $f(x)>0$
$\left.\begin{array}{l}\sqrt{f(x)}\\ \ln f(x)\\ e^{f(x)}\end{array}\right\}$ све ове ф-је достижу екстремне вредности где и $f(x)$ јер су монотоно растуће

$v=\ln u \rightarrow v$ и u достижу екстреме у истим тачкама

$L(x,y,z,\lambda) = \ln\sin x + \ln\sin y + \ln\sin z + \lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2})$
$\left.\begin{array}{l}L_x = ctg\, x+\lambda=0\\ L_y = ctg\, y+\lambda=0\\ L_z = ctg\, z+\lambda=0\end{array}\right\} \Rightarrow ctg\, x = ctg\, y = ctg\, z \Rightarrow x=y=z$ (јер $0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$)
$L_\lambda = x+y+z-\frac{\pi}{2}=0 \qquad x=y=z=\frac{\pi}{6} \qquad M(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}), \lambda=-\sqrt{3}$

$L_{xx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad L_{yy} = -\frac{1}{\sin^2 y} \qquad L_{zz} = -\frac{1}{\sin^2 z} \qquad L_{xy}=L_{xz}=L_{yz}=0$

$d^2L = -\frac{1}{\sin^2 x}dx^2 - \frac{1}{\sin^2 y}dy^2 - \frac{1}{\sin^2 z}dz^2$

$d^2L(M) = -4(dx^2+dy^2+dz^2) < 0 \Rightarrow$ максимум
(код оваквих се може прескочити диференцирање)

$u_{max} = u(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{8}$

Зад. 4. $u=xyz$, услови $x+y-z=1$, $x-y+3z=1$

Решење: $L(x,y,z,\lambda,\mu) = xyz + \lambda(x+y-z-1) + \mu(x-y+3z-1)$

$L_x = yz+\lambda+\mu=0$
$L_y = xz+\lambda-\mu=0$
$L_z = xy-\lambda+3\mu=0$
$\left.\begin{array}{l}L_\lambda = x+y-z-1=0\\ L_\mu = x-y+3z-1=0\end{array}\right\}\oplus \begin{array}{l}2x+2z=2 \Rightarrow x=1-z\\ 1-z+y-z=0 \Rightarrow y=2z\end{array}$

$\left.\begin{array}{l}2z^2+\lambda+\mu=0\\ z-z^2+\lambda-\mu=0\end{array}\right\}\oplus$
$2z-z^2\cdot 2-\lambda+3\mu=0$

$2\lambda+z^2+z=0$
$\lambda = -\frac{z^2+z}{2}$
$\mu = z-z^2-\frac{z^2+z}{2}$
$\mu = \frac{z-3z^2}{2}$

$2z-2z^2+\frac{z^2+z}{2}+\frac{3z-9z^2}{2}=0$
$2z-2z^2+2z-4z^2=0$
$4z-6z^2=0 \Rightarrow 2z(2-3z)=0 \Rightarrow z=0 \vee z=\frac{2}{3}$

$M_1(1,0,0), \lambda=0, \mu=0$
$M_2(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}), \lambda=-\frac{5}{9}, \mu=-\frac{1}{3}$

$L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = 0 \qquad L_{xy} = z \qquad L_{xz} = y \qquad L_{yz} = x$

$$d^2L = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz$$

$$d^2L(1,0,0) = 2dydz = 2\cdot(-2dx)(-dx) = 4dx^2 > 0 \rightarrow \text{минимум}$$

диференцирање услова : $\left.\begin{matrix} x+y-z=1 \\ x-y+3z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} dx+dy-dz=0 \\ dx-dy+3dz=0 \end{matrix}\right\}$ +

$u_{min} = u(1,0,0) = 0$

$$\begin{matrix} 2dx+2dz=0 \Rightarrow \\ dx+dy+dx=0 \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} dz=-dx \\ dy=-2dx \end{matrix}}$$

$$d^2L\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{4}{3}dxdy + \tfrac{8}{3}dxdz + \tfrac{2}{3}dydz$$

$$= \tfrac{4}{3}dx(-2dx) + \tfrac{8}{3}dx(-dx) + \tfrac{2}{3}(-2dx)(-dx)$$

$$= -\tfrac{8}{3}dx^2 - \tfrac{8}{3}dx^2 + \tfrac{4}{3}dx^2 = -4dx^2 < 0 \rightarrow \text{максимум}$$

$u_{max} = u\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{8}{27}$

Примена условног екстремума

1° Производ три реална позитивна броја једнак је p. Наћи минималну вредност њиховог збира.

$u = x+y+z$, услов $xyz = p \quad \Rightarrow L(x,y,z,\lambda) = x+y+z+\lambda(xyz-p)$

2° Одредити тачке на елипси $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ које су најближе и најдаље од тачке $A(10,10)$

функција $d=\sqrt{(x-10)^2+(y-10)^2}$, али је практичније $z=(x-10)^2+(y-10)^2$, а услов је да та тачка припада елипси

$L(x,y,\lambda) = (x-10)^2+(y-10)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}-1\right)$

3° Одредити тачке на елипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $0<c<b<a$ које су најближе и најдаље од координатног почетка

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; наша ф-ја биће $u=x^2+y^2+z^2$, услов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) \qquad M_{1/2}(\pm a,0,0)_{max} \quad M_{3/4}(0,0,\pm c)_{min}$

4° Одредити тачку на сфери $x^2+y^2+z^2=1$ за коју је збир квадрата растојања до тачака $A(2,2,3)$ и $B(3,3,2)$ минималан

$$\left.\begin{matrix} d_1^2 = (x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \\ d_2^2 = (x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 \end{matrix}\right\} +$$

ф-ја: $d_1^2+d_2^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-10x-10y-10z+39$, услов: $x^2+y^2+z^2=1$

$$L(x,y,z,\lambda) = 2x^2+2y^2+2z^2-10x-10y-10z+39+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

вежба бр. 4 17. 10. 2007.

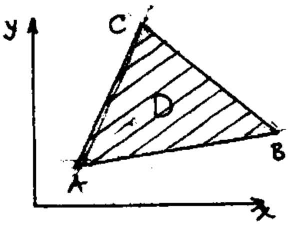
Најмања и највећа вредност функције на затвореној и ограниченој области

Теор. 1. Непрекидна ф-ја на затвореној и ограниченој области достиже своју најмању и највећу вредност

Описаћемо алгоритам за случај $n=2$, $z=z(x,y)$

1° Одредимо стационарне тачке у унутрашњости без испитивања њиховог типа

$$\left.\begin{array}{l} z_x=0 \\ z_y=0 \end{array}\right\} M_1, \dots, M_k$$



$D = \operatorname{int} D \cup \partial D$

$\operatorname{int} D$ - унутрашњост

∂D - руб

$\partial D = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

2° Одредимо стационарне тачке на рубу (као код условних екстрема)

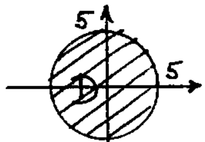
$$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) \quad \rightarrow M_{k+1}, \dots, M_m$$

3° Израчунамо стационарне тачке ф-ја и рогљеве

$$z(M_1),\ z(M_2), \dots, z(M_k), \dots, z(M_m),\ z(A),\ z(B),\ z(C)$$

Зад. 1. Одредити најмању и највећу вредност у датој области.

$z = x^2+y^2-12x+16y \qquad D=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \le 25\}$



Решење: 1° унутрашњост

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x-12 \\ z_y = 2y+16 \end{array}\right\} (6,-8)\notin \operatorname{int} D$$

(нема стационарних тачака у унутр.)

$\operatorname{int} D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 25\}$

$\partial D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 25\}$

2° $z = x^2+y^2-12x+16y + \lambda(x^2+y^2-25)$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x-12+2\lambda x=0 \\ L_y = 2y+16+2\lambda y=0 \\ L_\lambda = x^2+y^2-25=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M_1(3,-4),\ \lambda_1=1 \\ M_2(-3,4),\ \lambda_2=-3 \end{array}$$

две тачке (једна минимум, једна максимум)

$$z(M_1) = -75 = \min_D z \qquad z(M_2) = 125 = \max_D z$$

Зад. 2. $u = x^2+2y^2+3z^2$, области $D = \{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 100\}$

Решење: 1° унутрашњост

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2x=0 \\ u_y = 2y\cdot 2=0 \\ u_z = 6z=0 \end{array}\right\} M_1(0,0,0) - \text{стационарна тачка}$$

2° руб → условни екстрем

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+2y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-100)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x+2\lambda x=0 \\ L_y = 4y+2\lambda y=0 \\ L_z = 6z+2\lambda z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1+\lambda)x=0 \\ (2+\lambda)y=0 \\ (3+\lambda)z=0 \end{array}$$

$$L_\lambda = x^2+y^2+z^2-100=0$$

I) $\lambda \notin \{-1,-2,-3\}$: $x=y=z=0 \Rightarrow -100=0$ ✗

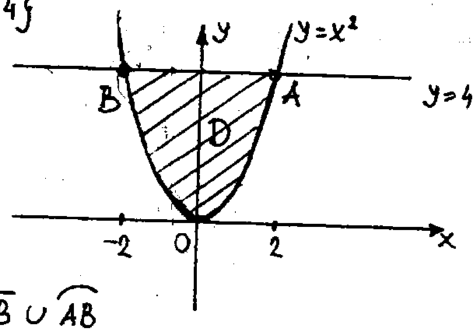
II) $\lambda=-1$: $y=z=0$, $x=\pm 10 \Rightarrow M_{2/3}(\pm 10,0,0)$

III) $\lambda=-2$: $x=z=0$, $y=\pm 10 \Rightarrow M_{4/5}(0,\pm 10,0)$

IV) $\lambda=-3$: $x=y=0$, $z=\pm 10 \Rightarrow M_{6/7}(0,0,\pm 10)$

3° $u(M_1)=0 = \min_D u$ $\quad u(M_{2/3})=100 \quad u(M_{4/5})=200 \quad u(M_{6/7})=300 = \max_D u$

Зад. 3. $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2\le y\le 4\}$



Решење: 1° унутрашњост

$z_x = 6x^2+8x-2y=0 \Rightarrow 6x(x+1)=0$

$z_y = 2y-2x=0 \Rightarrow y=x$

$(0,0)\notin \mathrm{int}D$

$(-1,-1)\notin \mathrm{int}D$

2° руб (састоји се из два дела) $\partial D = \overline{AB}\cup \widehat{AB}$

$\overline{AB}$: $y=4$, $-2<x<2$

$z(x,y)=z(x,4)=2x^3+4x^2+16-8x=\varphi(x)$

$\varphi'(x)=6x^2+8x-8=2(3x^2+4x-4)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}= \begin{cases}-2\\ \frac{2}{3}\end{cases}$

$(-2,4)$ – рогаљ ✗ $\qquad M_1\left(\frac{2}{3},4\right)$

$\widehat{AB}$: $y=x^2$, $-2<x<2$

$z(x,y)=z(x,x^2)=2x^3+4x^2+x^4-2x^3=x^4+4x^2=\psi(x)$

$\psi'(x)=4x^3+8x=4x(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \qquad M_2(0,0)$

3° кандидати M_1, M_2, A, B

$z(M_1)=\frac{22\cdot 16}{27}$

$z(M_2)=0 = \min_D z$

$z(A)=z(B)=32=\max_D z$

Извод сложене и имплицитне функције

$z=z(u,v) \qquad u=u(x,y) \qquad z_x = z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x$

$\qquad\qquad\quad v=v(x,y) \qquad z_y = z_u\cdot u_y + z_v\cdot v_y$

Зад. 1. Дата је ф-ја $g(x,y)=f(2x^3+3y^2)$. Показати да важи $y\cdot\frac{\partial g}{\partial x} = x^2\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$

Решење: $z=2x^3+3y^2$

$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2\cdot f'(z) \qquad y\frac{\partial g}{\partial x}=6x^2y\,f'(z)$

$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=6y\cdot f'(z) \qquad x^2\frac{\partial g}{\partial y}=6x^2y\,f'(z)$

ИЗВОДИ СЛОЖЕНИХ ФУНКЦИЈА

Нека је $z = z(u,v)$ и $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Тада су парцијални изводи:

$z_x = z_u u_x + z_v v_x$ и $z_y = z_u u_y + z_v v_y$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_u u_x + z_v v_x)_x \\ &= (z_u)_x u_x + z_u u_{xx} + (z_v)_x v_x + z_v v_{xx} \\ &= [(z_u)_u u_x + (z_u)_v v_x] u_x + z_u u_{xx} + [(z_v)_u u_x + (z_v)_v v_x] v_x + z_v v_{xx} \\ &= z_{uu}(u_x)^2 + 2z_{uv} u_x v_x + z_{vv}(v_x)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= (z_u u_x + z_v v_x)_y \\ &= (z_u)_y u_x + z_u u_{xy} + (z_v)_y v_x + z_v v_{xy} \\ &= [(z_u)_u u_y + (z_u)_v v_y] u_x + z_u u_{xy} + [(z_v)_u u_y + (z_v)_v v_y] v_x + z_v v_{xy} \\ &= z_{uu} u_x u_y + z_{uv} u_x v_y + z_{uv} u_y v_x + z_{vv} v_x v_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= (z_u u_y + z_v v_y)_y \\ &= (z_u)_y u_y + z_u u_{yy} + (z_v)_y v_y + z_v v_{yy} \\ &= [(z_u)_u u_y + (z_u)_v v_y] u_y + z_u u_{yy} + [(z_v)_u u_y + (z_v)_v v_y] v_y + z_v v_{yy} \\ &= z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv} u_y v_y + z_{vv}(v_y)^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy} \end{aligned}$$

1. Ако је $z = z(x^2y\ ,\ x^y)$ израчунати парцијалне изводе првог реда функције z.
Решење: $z = z(u,v)$, $u = x^2y$, $v = x^y$
$u_x = 2xy$, $u_y = x^2$, $v_x = yx^{y-1}$, $v_y = x^y \ln x$
$z_x = 2xyz_u + yx^{y-1}z_v$, $z_y = x^2 z_u + x^y \ln x z_v$

2. Узимајући u и v за нове независно промењливе трансформисати једначину $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$, ако су $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

Решење:

први начин: $u_x = y$, $u_y = x$, $v_x = \dfrac{1}{y}$, $v_y = -\dfrac{x}{y^2}$

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = y z_u + \frac{1}{y} z_v$$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= y(z_u)_x + \frac{1}{y}(z_v)_x \\ &= y(z_{uu}u_x + z_{uv}v_x) + \frac{1}{y}(z_{vu}u_x + z_{vv}v_x) \\ &= y\left(z_{uu}y + z_{uv}\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y}\left(z_{vu}y + z_{vv}\frac{1}{y}\right) \\ &= y^2 z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{y^2} z_{vv} \end{aligned}$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = z_u x + z_v\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= x(z_u)_y - (z_v)_y \frac{x}{y^2} - z_v\left(\frac{x}{y^2}\right)_y \\ &= x(z_{uu}u_y + z_{uv}v_y) - (z_{vu}u_y + z_{vv}v_y)\frac{x}{y^2} + z_v \frac{2x}{y^3} \\ &= x^2 z_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2} z_{uv} + \frac{x^2}{y^4} z_{vv} + \frac{2x}{y^3} z_v \end{aligned}$$

други начин: $u_x = y$, $u_{xx} = 0$, $u_y = x$, $u_{yy} = 0$, $u_{xy} = 1$
$v_x = \dfrac{1}{y}$, $v_{xx} = 0$, $v_y = -\dfrac{x}{y^2}$, $v_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$, $v_{xy} = -\dfrac{1}{y^2}$

$$z_{xx} = z_{uu}(u_x)^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}(v_x)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} = y^2 z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{y^2} z_{vv}$$

$$z_{yy} = z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv}u_y v_x + z_{vv}(v_y)^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy} = x^2 z_{uu} - 2\frac{x^2}{y^2} z_{uv} + \frac{x^2}{y^4} z_{vv} + \frac{2x}{y^3} z_v$$

Дата једначина постаје : $2u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0.$

3. Функција $z(x,y)$ дата је имплицитно једначином $F\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right) = 0$, где је $F(u,v)$ диференцијабилна функција. Показати да важи $xz_x + yz_y = z$.

Решење:
први начин:
$F = F(u,v),\ u = u(x,y) = \frac{x}{y},\ v = v(x,y) = \frac{y}{z},\ z = z(x,y)$

$F_x = F_u u_x + F_v v_x = \frac{1}{y}F_u - \frac{y}{z^2}z_x F_v = 0 \Rightarrow\ z_x = \frac{z^2F_u}{y^2F_v}$

$F_y = F_u u_y + F_v v_y = \frac{-x}{y^2}F_u + \frac{z-yz_y}{z^2}F_v = 0 \Rightarrow\ z_y = -\frac{xz^2F_u}{y^3F_v} + \frac{z}{y}$

Заменимо у дату једначину и добијемо идентитет.

Други начин:
$F = F(x,y,z)$, сматрамо да су x,y,z независно променљиве.

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u u_x + F_v v_x}{F_u u_z + F_v v_z} = -\frac{\frac{1}{y}F_u}{-\frac{y}{z^2}F_v}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u u_y + F_v v_y}{F_u u_z + F_v v_z} = -\frac{-\frac{x}{y^2}F_u + \frac{1}{z}F_v}{-\frac{y}{z^2}F_v}$$

4. Одредити највећу и најмању вредност функције $z(x,y) = xy(x+y+1)$ у затвореној области ограниченој правама $y = 1,\ y = x-1,\ y = -x-1$.

Решење :

а) Тражимо прво стационарне тачке на $D_z = \mathbf{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{r} p = y(2x+y+1) = 0 \\ q = x(x+2y+1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} M_1(0,0), M_2(0,-1), M_3(-1,0), M_4(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) \\ z(M_1) = z(M_2) = z(M_3) = 0, z(M_4) = \frac{1}{27} \end{array}\right.$$

б) по дужи AB: $y = 1$; $z(x,1) = u(x) = x(x+2),\ x \in [-2,2]$

$$\left.\begin{array}{r} z'(x) = 2x+2 = 0 \\ z''(x) = 2 \end{array}\right\} x = -1, M_5(-1,1) \in D,\ z(M_5) = -1$$

в) по дужи AC; $y = -x-1$, $z(x,-x-1) = u(x) = 0,\ x \in [-2,0]$

г) по дужи CB: $y = x-1,\ z(x,x-1) = u(x) = 2x^2(x-1),\ x \in [0,2]$

$$\left.\begin{array}{r} z'(x) = 2x(3x-2) = 0 \\ z''(x) = 12x-4 \end{array}\right\} x = 0(M_1) \vee x = \frac{2}{3}, M_6(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}), z(M_6) = -\frac{8}{27}$$

д) у крајњим тачкама : $z(A) = z(C) = 0, z(B) = z(2,1) = 8.$

Коначно: $max(z) = z(B) = 8,\ min(z) = z(M_5) = -1.$

5. Дата је кружница $k = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 4\ ,\ x+y+z = 2\}$. Одредити тачку на кружници која је најближа , односно најдаља тачки $M(-1,0,0)$. $[P : M_1(2,0,0), M_2(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})]$

Зад. 2. Дата је ф-ја $z=f(u,v)$, $u=x+y$, $v=x-y$. Доказати да важи $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \Leftrightarrow z_{xy}=z_{uu}-z_{vv}$.

Решење: $z_x = z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x$ $\qquad u_x=1 \quad u_y=1 \quad v_x=1 \quad v_y=-1$

$$z_{xy}=(z_u+z_v)_y = z_{uu}\cdot u_y + z_{uv}\cdot v_y + z_{vu}\cdot u_y + z_{vv}\cdot v_y$$
$$= z_{uu} - \cancel{z_{uv}} + \cancel{z_{vu}} - z_{vv} = z_{uu}-z_{vv}$$

Зад. 3. Функција $z=z(x,y)$ имплицитно је задата једначином $F(x+z, y+z)=0$ где је F два пута диференцијабилна функција. Израчунати z_{xx}.

Решење: $F(\underbrace{x+z}_{u},\underbrace{y+z}_{v})=0 \;/_x$ $\qquad u=x+z \quad v=y+z$; $\quad u_x=1+z_x \quad v=z_x$

$$F_u\cdot u_x + F_v\cdot v_x = 0 \Rightarrow F_u(1+z_x)+F_v\cdot z_x = 0 \;/_x \Rightarrow z_x = -\frac{F_u}{F_u+F_v}$$

$$(F_{uu}\cdot u_x + F_{uv}\cdot v_x)(1+z_x) + F_u z_{xx} + (F_{vu}\cdot u_x + F_{vv}\cdot v_x)z_x + F_v z_{xx} = 0$$

$$z_x\left(F_{uu}(1+z_x)+F_{uv}z_x\right)(1+z_x) + (F_u+F_v)z_{xx} + \left(F_{uv}(1+z_x)+F_{vv}z_x\right)=0$$

$$z_{xx} = -\frac{F_v^2\cdot F_{uu} - 2F_uF_vF_{uv} + F_u^2F_{vv}}{(F_u+F_v)^2}$$

Зад. 4. Дата је ф-ја $z=\sqrt{\frac{x}{y}}\,f(xy)+g\left(\frac{x}{y}\right)$ где су f и g диференцијабилне ф-је. Израчунати вредности израза $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} - 2y z_y$.

Решење: $u=\frac{x}{y} \qquad v=xy$

$$\boxed{\begin{matrix} u_x=\frac{1}{y} & v_x=y \\ u_y=-\frac{x}{y^2} & v_y=x \end{matrix}}$$

$$z=z(u,v)=\sqrt{u}\,f(v)+g(u)$$

$$z_x = z_u\cdot u_x + z_v\cdot v_x = \frac{1}{y}z_u + y z_v \;/_x$$

$$z_{xx} = \frac{1}{y}(z_{uu}u_x + z_{uv}v_x) + y(z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)$$
$$= \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}z_{uu} + y\cdot z_{uv}\right) + y\left(\frac{1}{y}z_{uv} + y z_{vv}\right) = \frac{1}{y^2}z_{uu} + 2z_{uv} + y^2 z_{vv}$$

$$z_y = z_u\cdot u_y + z_v\cdot v_y = -\frac{x}{y^2}z_u + x z_v \;/_y$$

$$z_{yy} = \frac{2x}{y^3}z_u - \frac{x}{y^2}(z_{uu}u_y + z_{uv}v_y) + x(z_{vu}u_y + z_{vv}v_y)$$
$$= \frac{2x}{y^3}z_u - \frac{x}{y^2}\left(-\frac{x}{y^2}z_{uu} + x z_{uv}\right) + x\left(z_{uv}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + x z_{vv}\right)$$
$$= \frac{2x}{y^3}z_u + \frac{x^2}{y^2}z_{uu} - \frac{2x^2}{y^2}z_{uv} + x^2 z_{vv}$$

$$A = \frac{x^2}{y^2}z_{uu} + 2x^2 z_{uv} + x^2y^2 z_{vv} - \frac{2x}{y}z_u - \frac{x^2}{y^2}z_{uu} + 2x^2 z_{uv} - x^2y^2 z_{vv} + \frac{2x}{y}z_u - 2xy z_v$$
$$= 4x^2 z_{uv} - 2xy z_v = 2x(2x z_{uv} - y z_v)$$

$$z_v = \sqrt{u}\,f'(v)$$
$$z_{uv} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot f'(v)$$

$$2x\cdot z_{uv} - y z_v = \left(\frac{x}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\,y\right)f'(v) = \left(\frac{x-uy}{\sqrt{u}}\right)f'(v) = 0$$

вежба бр. 5 — 24. 10. 2007.

Степени редови

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\quad x_0=0: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

полупречник конвергенције $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Ред АКВ за $|x-x_0|<R$

Ред ДВ за $|x-x_0|>R$

$|x-x_0|=R$ – ? $\Rightarrow$ крајеви се морају посебно испитати (бројни редови)

Теор. 1. (Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, монотоно опадајућа и ненегативна ф-ја. Тада је $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \sim \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Теор. 2. (Рабеов критеријум) $L=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$

- $L>1$: ред конвергира
- $L<1$: ред дивергира
- $L=1$: ред не даје одговор

Два битна реда: 1° хармонијски $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{КВ} & p>1 \\ \text{ДВ} & p\le 1\end{cases}$

2° $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ $\begin{cases} \text{АКВ} & p>1 \\ \text{УКВ} & 0<p\le 1 \\ \text{ДВ} & p\le 0\end{cases}$

Степени ред може се диференцирати и интегралити „члан по члан" у области своје конвергенције, тј. важи

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}, \quad \forall x\in(-R,R)$$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx \qquad [a,b]\in(-R,R)$$

Добијени редови имају исти полупречник конвергенције.

Зад. 1. Одредити полупречник конвергенције следећих редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n}x^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{n^2+2n}}{\frac{n+2}{n^2+2n+1+2n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+4n+3)}{(n+2)(n^2+2n)} = 1$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\,(x+1)^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \sqrt{1} = 1$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}x^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}} = \frac{1}{e}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n (x-1)^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n}{(-1)^{n+1}2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

ђ) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln n \cdot x^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}=1$

Зад. 2. Одредити области конвергенције следећих степених редова.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}\, x^n$ $\quad < \quad \sum \quad \quad < \ell \quad (-1,1)$

2 Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dots=1$

$|x|<1$ КВ $\qquad |x|>1$ ДВ $\qquad |x|=1$?

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to$ ДВ

$\frac{n+1}{n^2+2}=\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})}\sim\frac{1}{n},\ n\to\infty$

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}(-1)^n$ $\qquad$ Лајбницов

1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2}=0$

2) $a_n \searrow$: $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2}$

$f'(x)=\frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x+2)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x+2)^2}=-\frac{+x^2+2x-2}{(x^2+2)^2}=-\frac{(x+1)^2-3}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=\frac{3-(x+1)^2}{(x^2+2)^2}<0 \iff (x+1)^2>3$

$\iff |x+1|>\sqrt{3} \iff x+1<-\sqrt{3} \ \vee\ x+1>\sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}-1 \ \vee\ x>\sqrt{3}-1$

Област конвергенције $[-1,1)$?

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n}(x-1)^n$

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+2}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\left(\frac{n+1}{n}\right)\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|=1$

АКВ : $|x-1|<1 \iff -1<x-1<1 \iff 0<x<2$

ДВ : $|x-1|>1 \iff x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

$x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$

$\frac{\sqrt{n+1}}{n}=\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ ДВ

$x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}(-1)^n \Rightarrow$ Лајбницов критеријум $\Rightarrow$ УКВ

Област конвергенције $(0,2]$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+2)^{2n}$

Решење: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{2}$

АКВ: $|x+2| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x+2 < \frac{1}{2} \iff -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$

$x = -\frac{3}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ КВ

$x = -\frac{5}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ КВ

Област конвергенције $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

Решење: $R = 1$

$x = 1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sim \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx \overset{\ln x = t}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty \rightarrow$ ДВ

$x = -1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln 1 = 0$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e \iff n \geq 3 \rightarrow$ УКВ

Област конвергенције $[-1, 1)$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Решење: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ДВ јер $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \not\to 0$

Област конвергенције $(-2, 0)$

ђ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!!}$

Решење: $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots = 2\cdot n \cdot 2(n-1)\cdot 2(n-2)\cdots = 2^n \cdot n!$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n n!}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2(n+1) = +\infty$

Ред АКВ за $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p (n+1) x^n$, $p \in R$

Решење: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^p(n+1)}{(n+1)^p(n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1$

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^p(n+1)$ $\quad n^p(n+1) = n^{p+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^{p+1} = \frac{1}{n^{-p-1}}$, $n \to \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^p(n+1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-p-1}}$ КВ $-p-1 > 1$, $p < -2$; ДВ $-p-1 \leq 1$, $p \geq -2$

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p (n+1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{-p-1}}$ АКВ $-p-1 > 1 \iff p < -2$; УКВ $0 < -p-1 \leq 1 \iff -2 \leq p < -1$; ДВ $-p-1 \leq 0 \iff p \geq -1$

Област конвергенције
$p < -2$: $[-1, 1]$
$-2 \leq p < -1$: $[-1, 1)$
$p \geq -1$: $(-1, 1)$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n^2+1)n^p} x^n$

Решење: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n^2+1)n^p}}{\frac{\sqrt[3]{n+2}}{(n^2+2n+2)(n+1)^p}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}} \left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right) = 1$

$x=1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n^2+1)n^p}$

$\frac{\sqrt[3]{n}\,\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{n^{p+2}(1+\frac{1}{n^2})} \sim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{p+2}} = \frac{1}{n^{p+\frac{5}{3}}}$ КВ $p+\frac{5}{3}>1$, $p>-\frac{2}{3}$; ДВ $p+\frac{5}{3}\le 1$, $p\le -\frac{2}{3}$

$x=-1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+5/3}}$ АКВ $p+\frac{5}{3}>1$, $p>-\frac{2}{3}$; УКВ $-\frac{5}{3}<p\le -\frac{2}{3}$, $0<p+\frac{5}{3}\le 1$; ДВ $p+\frac{5}{3}\le 0$, $p\le -\frac{5}{3}$

Област конвергенције $p>-\frac{2}{3}$: $[-1,1]$

$-\frac{5}{3}<p\le-\frac{2}{3}$: $[-1,1)$

$p\le -\frac{5}{3}$: $(-1,1)$

вежби. бр. 6 31. 10. 2007.

Таблица Маклоренових развоја

1° $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$

2° $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$, $x\in(-1,1)$

3° $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$

4° $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$

5° $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$

6° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $x\in[-1,1)$

7° $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$

8° $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$

Напомена: 3° се добија ако у 2° ставимо $\alpha=-1$ и уместо $x\to -x$
4° се добија диференцирањем 3°
6° се добија из развоја 5° заменом $x\to -x$

Развој у степени ред. Сумирање редова

Зад. 1. Наћи суме следећих редова у области њихове конвергенције.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$

Решење: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - (-x)^0\right)$

$= -\left(\frac{1}{1-(-x)} - 1\right) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, $x\in(-1,1)$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}$

Решење: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \overset{x\neq 0}{=} \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right), \quad x \neq 0, \; f(0)=0$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

Решење: $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{x^0}{0!} - \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!}\right)$

$= \frac{1}{x}\left(e - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right), \quad x \neq 0, \; f(0)=0$

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}$

Решење: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!} = x^2 \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^2 \cdot \sin x$

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

Решење: не може да се намести на неки таблични, па диференцирамо

$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{(2n+3)} \cdot x^{2n+2}}{\cancel{2n+3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^2)^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^2)^n - (x^2)^0$

$= \frac{1}{1-x^2} - 1$

$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)\,dx + C = \int \frac{dx}{1-x^2} - x + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - x + C$

$\left.\begin{aligned} f(0) &= \tfrac{1}{2}\ln 1 - 0 + C \\ f(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - x$

ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!!}$

Решење: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^0}{0!} = e^{\frac{x}{2}} - 1$

е) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n x^{n+1}$

Решење: $f(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} n x^{n+1} = x^2 \sum\limits_{n=3}^{\infty} n x^{n-1} = x^2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - 1 \cdot x^0 - 2 \cdot x^1\right)$

$= x^2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x\right)$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

Решење: I начин: диференцирање

II начин: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$= -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^1}{1}\right)$

$= -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1$

Испитни задаци из степених редова

Зад. 1. Дат је степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n!)^p (2n+1)^q}$, $p, q \in R$

а) Испитати конвергенцију реда у зависности од параметра

б) Наћи следеће суме $p=0, q=1$; $p=1, q=0$; $p=0, q=2$; $p=1, q=1$.

Решење: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{\frac{(-1)^n}{(n!)^p (2n+1)^q}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!^p (2n+3)^q}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\left(\frac{(n+1)!^p}{n!^p} \cdot \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^q\right) \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)^p \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^q$$

$$= \begin{cases} +\infty, & p>0 \\ 1, & p=0 \\ 0, & p<0 \end{cases}$$

1° $p>0$, $R=+\infty$: ред апсолутно конвергира за $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

2° $p<0$, $R=0$: ред конвергира само у тачки $x=0$

3° $p=0$, $R=1$:

$$x=1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^q} \begin{cases} \text{АКВ} & q>1 \\ \text{УКВ} & 0<q\le 1 \\ \text{ДВ} & q\le 0 \end{cases}$$

$$x=-1: -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^q} \begin{cases} \text{АКВ} & q>1 \\ \text{УКВ} & 0<q\le 1 \\ \text{ДВ} & q\le 0 \end{cases}$$

$p=0$, $q>0$ $[-1,1]$

$p=0$, $q\le 0$ $(-1,1)$

б) $p=0$, $q=1$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n - (-x^2)^0 = \frac{1}{1+x^2} - 1$$

$$f_1(x) = \int f_1'(x)dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int dx + C = \operatorname{arctg} x - x + C$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(0) &= \operatorname{arctg} 0 - 0 + C = C \\ f_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f_1(x) = \operatorname{arctg} x - x$$

$p=1$, $q=0$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} - \frac{(-x^2)^0}{0!}\right)$$

$$= x\cdot\left(e^{-x^2} - 1\right) = x\cdot e^{-x^2} - x$$

$p=0$, $q=2$

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \Big/ ' \Rightarrow f_3'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{(2n+1)} x^{2n}}{(2n+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} f_1(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1$$

$$f_3(x) = \int f_3'(x)dx + C = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - x + C$$

Следеће ф-је немају интеграл

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int e^{-x^2}dx$$

$p=1,\ q=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Rightarrow f_4'(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}=\frac{1}{x}f_2(x)=e^{-x^2}-1$$

$$f_4(x)=\int e^{-x^2}dx-x+C$$

Зад. 2. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^q e^{-np}x^n$, $p,q\in\mathbb{R}$

а) Испитати конвергенцију реда

б) Наћи суме $p\in\mathbb{R}$, $q=0$; $p=0, q=1$; $p=0, q=-2$; $p=0, q=2$.

Решење: $R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q \frac{e^{-np}}{e^{-(n+1)p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^q e^p=e^p$

$x=e^p$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^q\cdot e^{-np}\cdot e^{np}=\sum_{n=1}^{\infty} n^q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-q}}$ — КВ $-q>1 \iff q<-1$; ДВ $-q\le 1 \iff q\ge -1$

$x=-e^p$: $\sum_{n=1}^{\infty} n^q\cdot e^{-np}\cdot(-1)^n e^{np}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{-q}}$ — АКВ $-q>1$; УКВ $0<-q\le 1$; ДВ $-q\le 0$

Област конвергенције

$q<-1$: $[-e^p, e^p]$

$-1\le q<0$: $[-e^p, e^p)$

$q\ge 0$: $(-e^p, e^p)$

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-np}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-p}x)^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-p}x)^n-1\right)=\frac{1}{1-xe^{-p}}-1=\frac{xe^{-p}}{1-xe^{-p}}$$

$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$f_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\Big/' \Rightarrow f_3'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}x^{n-1}}{n^{\cancel{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$f_3(x)=-\int\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}+C$$

$$f_4(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot x^n=x\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cdot n^2}_{g(x)}$$

$$\int g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}+C\Big/'$$

$$g(x)=\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$f_4(x)=x\cdot g(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

вежбе бр. 7 07. 11. 2007.

Развој у степени ред

Зад. 1. Развити ф-ју у степени ред у околини нуле и испитати конвергенцију добијеног реда

а) $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$

Решење: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\le 1$ $\quad -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ -1\le x<1$

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\qquad -1<2x\le 1\ \wedge\ -1\le x<1 \iff -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n+1}{n}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]=\text{О.К.}$$

б) $f(x) = sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Решење: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2n!} x^n$$

$$\frac{1-(-1)^n}{2n!} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{1}{(2k+1)!}, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$sh\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$ch\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

в) $f(x) = x^3 \cdot ch\,2x$

Решење: $f(x) = x^k \cdot g(x)$, $k \in N$ – развијају се у степени ред тако што се развије $g(x)$, па се помножи са x^k.

$$ch\,2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} \cdot x^{2k+3}}{(2k)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Зад. 2. Развити функцију у степени ред у околини нуле. Испитати конвергенцију добијеног реда и наћи суму.

а) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \qquad f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2}$

Решење: $f'(x) = \mathrm{arctg}\,x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}$ (радимо да би изгубили arctg у таблици)

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad -1 < x < 1 \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n!} = (-1)^n$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x^2 < 1,\ -1 < x < 1$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= \mathrm{arctg}\,0 = 0 \\ f'(0) &= C \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \qquad \left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(0) &= C \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0$$

$R = 1$ зато што је добијен интеграцијом степеног реда полупречника 1. Шта са крајевима? (могли смо и да диференцирамо)

Када диференцирамо и интегралимо ред, његове крајеве морамо посебно испитати.

$x = \pm 1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \sum \frac{1}{4n^2+6n+4} \sim \sum \frac{1}{n^2} \text{ кв} \Rightarrow \text{АКВ}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+1)(2n+2)} \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 2f(1) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)$$

Зад. 3. $f(x) = x \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$, $\quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!}$

Решење: $f'(x) = \ldots = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$f''(x) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (x^2)^n, \quad -1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n \geq 1$$

$$f''(x) = \binom{-\frac{1}{2}}{0} (x^2)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$f'(x) = \int f''(x)dx + C = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1} + C$$

$$f'(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} x^{2n+1} \qquad \left.\begin{matrix} f'(0) = \ln 1 = 0 \\ f'(0) = C \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx + C = \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + C$$

$$f(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{(2n+1)(2n+2)!!} x^{2n+2}$$

$x = \pm 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!} \qquad L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ - Рабеов тест

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)n}{(2n+1)(2n+2)!!} \qquad \text{АКВ}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+3)(2n+4)!!}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n+4)(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{4n^2 + 14n + 12 - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2+4n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2 + 11n}{4n^2+4n+1} = 5/2 > 1 \Rightarrow \text{КВ}$$

Заменимо 1 у f

$$f(1) = -1 + \frac{1}{2} + S \Rightarrow S = f(1) - \frac{1}{2} = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Развој у степени ред

1° таблица
2° $x^k \cdot$ нешто
3° диференцирањем

вежба бр. 8 14. 11. 2007.

Фуријеови редови

Нека је ф-ја $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$

$\Phi(x) \sim f(x)$ - Фуријеов ред придружен функцији $f(x)$

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$ — периодична ф-ја

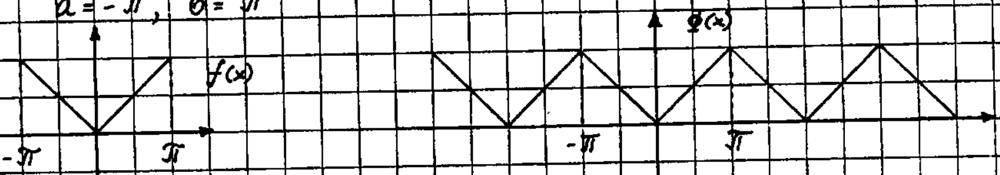
$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \qquad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx$$

Дирихлеова теорема

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x\in(a,b) \text{ у којима је } f(x) \text{ непрекидна} \\ \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, & x_0 \text{ је тачка прекида} \\ \dfrac{f(a+0)+f(b-0)}{2}, & x=a \vee x=b \end{cases}$$

Зад. 1. Развити ф-ју $f(x)=|x|$ у Фуријеов ред на $[-\pi,\pi]$ и применом добијеног развоја одредити суме $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Решење: $a=-\pi,\ b=\pi$



$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi$$

* f парна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
* f непарна $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

* неп · пар = неп
* неп · неп = пар
* пар · пар = пар

(као сабирање два броја)

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|x|\cos\frac{2n\pi x}{2\pi}}_{n}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1\end{cases} \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overset{\text{пар}}{|x|}\cdot\overset{\text{неп}}{\sin nx}\,dx = 0$$

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\cos(2k+1)x$$

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

$$\boxed{|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x\in[-\pi,\pi]}$$

Смемо да заменимо било коју тачку x на интервалу $x\in[-\pi,\pi]$

Бирамо за x вредности такву да Фуријеов ред одговара траженом реду у задатку.

$x=0: \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2}\underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)}_{S_2}$$

$$S_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S_2$$

$S_2 = S_1 + \frac{1}{4}(S_2)$

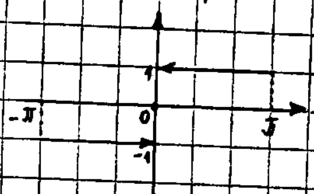
$$\frac{3}{4} S_2 = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

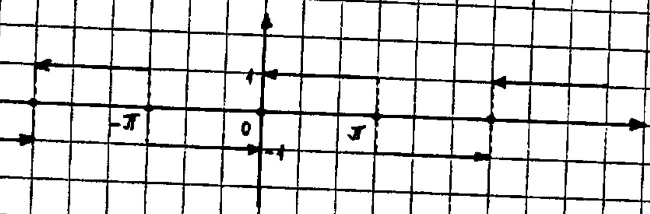
* $\int \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$, $\int \sin \alpha x = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$

Зад. 2. Развити ф-ју $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ у Фуријеов ред на $[-\pi, \pi]$ и применом добијеног развоја одредити суму $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Решење: $a = -\pi \quad b = \pi$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$





$\Phi(x)$ се не поклапа са $f(x)$ у тачкама $-\pi$ и π

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = -\pi \lor x = \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{\operatorname{sgn} x}_{\text{НЕП}} \cdot \underbrace{\cos nx}_{\text{ПАР}}}^{\text{НЕП}} \cdot dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\operatorname{sgn} x \cdot \sin nx}_{\text{ПАР}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \cdot \sin nx \cdot dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}, \quad x \in (-\pi, \pi)}$$

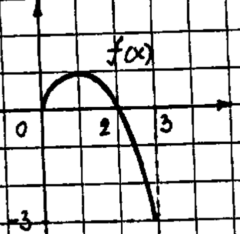
$$\operatorname{sgn} \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}$$

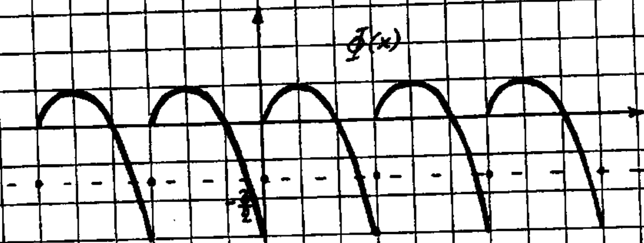
* $\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin k\pi \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos k\pi = \cos k\pi = (-1)^k$

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{\pi} S \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}$$

Зад. 3. $f(x) = 2x - x^2$, $[0,3]$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Решење:





$$\Phi(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \in (0,3) \\ -\frac{3}{2}, & x=0 \lor x=3 \end{cases} \qquad \Phi(0) = -\frac{3}{2},\ f(0)=0 \Rightarrow \Phi(0) \neq f(0)$$

$a=0,\ b=3,\ b-a=3$

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x-x^2)\,dx = \cdots = 0$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x-x^2)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx = \cdots = -\frac{9}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (2x-x^2)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx = \cdots = \frac{3}{n\pi}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)$$

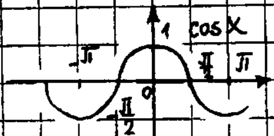
$x=0$: $\Phi(0) = -\frac{9}{\pi^2} S$

$$! \quad -\frac{3}{2} = -\frac{9}{\pi^2} S \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

Зад. 4. (испитни) Развити ф-ју $f(x) = \cos x + |\cos x|$ у Фуријеов ред и применом добијеног развоја одредити суме $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

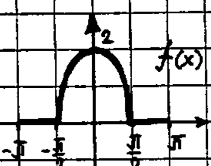
Напомена: Ако у задатку није дат интервал (a,b) онда се ф-ја развија на произвољно одабраном интервалу дужине једне периоде ($T=2\pi$). Обично бирамо да буде симетричан. $[-\pi,\pi]$

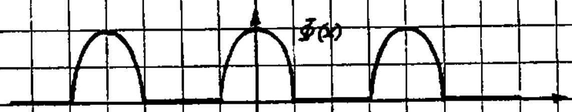
Решење:



$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$





$$\Phi(x) = f(x),\ \forall x \in [-\pi,\pi]$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{пар}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2\cos x\cdot\cos nx\,dx + 0\right)$$

$$* \quad 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(x+nx) + \cos(x-nx)\right]dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right]dx$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(m+1)x}{m+1} + \frac{\sin(m-1)x}{m-1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}, \quad m \neq 1$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{m+1} + \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{m-1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1} - \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m-1}\right)$$

$$a_m = \frac{2\cos\frac{m\pi}{2}}{\pi}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1}\right) = \frac{-4\cos\frac{m\pi}{2}}{\pi(m^2-1)} = \begin{cases} 0, & m=2k+1 \\ \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)}, & m=2k \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + 1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{2} + x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$b_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cdot \sin mx}_{неп}\,dx = 0$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx = \frac{2}{\pi} + a_1\cos x + \sum_{m=2}^{\infty} a_m \cos mx$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} + \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}\cos 2kx = \frac{2}{\pi} + \cos x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$$

$x=0:\quad \Phi(0) = f(0) = \frac{2}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi}S_1 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}:\quad 0 = \frac{2}{\pi} + 0 - \frac{4}{\pi}S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}$

вежба бр. 9

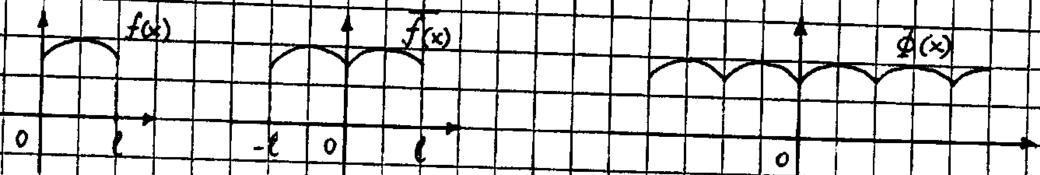
21.11.2007.

Косинусни и синусни Фуријеов ред

Посматрамо ф-ју $f(x)$ на интервалу $[0, l]$

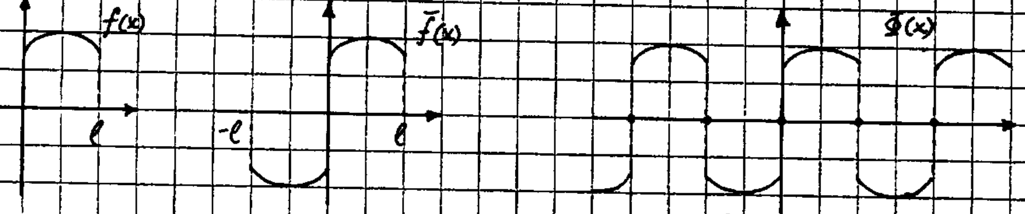
$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l}$$

$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx \qquad a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad b_m = 0$ } Косинусни Фуријеов ред



$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$a_0 = a_m = 0 \qquad b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$ } Синусни Фуријеов ред



Зад. 1. Дата је ф-ја $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$. Развити функцију у
а) Фуријеов ред
б) Косинусни Фуријеов ред
в) Синусни Фуријеов ред
Нацртати графике добијених редова и утврдити одговарајуће везе са ф-јом.

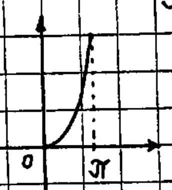
Решење: а) $a=0$, $b=\pi$

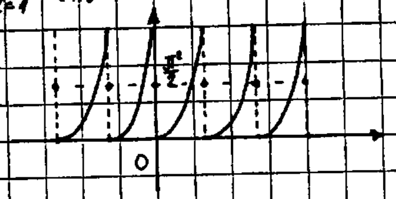
$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos 2nx\,dx = \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin 2nx\,dx = -\frac{\pi}{n}$$

$$\Phi(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)$$





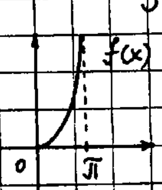
$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2, & x\in(0,\pi) \\ \frac{\pi^2}{2}, & x=0 \vee x=\pi \end{cases}$$

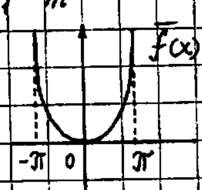
б) $b_n = 0$

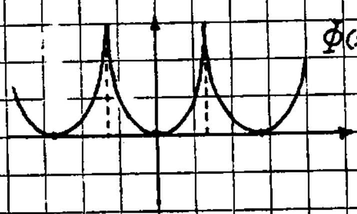
$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

$$\Phi(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$





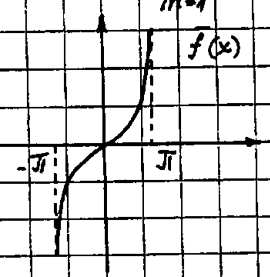


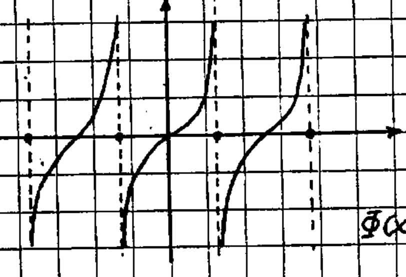
$\Phi(x) = x^2,\ x\in[0,\pi]$

в) $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin xn\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin xn$$





$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,\pi) \\ 0, & x=\pi \end{cases}$$

Зад. 2 (испитни) Одредити синусни Фуријеов ред ф-је $f(x) = x\cdot\sin^2 x$ на интервалу $[0,\pi]$

Решење:

$$\boxed{\begin{aligned} * \quad & \sin\alpha\cdot\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \\ * \quad & \cos\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \\ * \quad & \sin\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right) \end{aligned}}$$

$a_0 = a_n = 0$, $l = \pi$, $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\sin^2 x\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\sin nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\cdot\sin nx\,dx - \int_0^\pi x\cdot\sin nx\cdot\cos 2x\,dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\cdot\sin nx\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi x\left(\sin(n+2)x + \sin(n-2)x\right)dx\right.$$

$$\int x\cdot \sin\alpha x\cdot dx = \int x\, d\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right) = -\frac{x\cos\alpha x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int \cos\alpha x\, dx$$

$$= -\frac{x\cdot\cos\alpha x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sin\alpha x + C, \quad \alpha \neq 0 \ !$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos(n+2)x}{n+2} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2} - \frac{x\cos(n-2)x}{n-2} + \frac{\sin(n-2)x}{(n-2)^2}\right)\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \dots = \frac{4\cdot(-1)^n}{n(n^2-4)} \qquad n\neq 2 \ !$$

$n=2$: $\quad b_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin 2x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin 4x\, dx\right) = \frac{3}{8}$

Диференцијалне једначине

Тип 1. Диференцијална ј-на која раздваја променљиве

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Решава се непосредном интеграцијом, тј. опште решење дато је формулом

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Зад. 1. $xy' - y = y^2$

Решење: $x\cdot\frac{dy}{dx} = y + y^2 \ /\cdot dx$

$x\cdot dy = (y+y^2)dx \ /: x(y+y^2), \quad x\neq 0, \ y\neq 0, \ y\neq -1$

$\frac{dy}{y+y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y+y^2} = \int\frac{dx}{x}$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1>0$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln C_1|x|, \quad C_2 = \pm C_1$$

$$\frac{y}{y+1} = C_2 x, \qquad C_2\neq 0$$

$y=0$: $\quad y'=0, \ x\cdot 0 - 0 = 0 \Rightarrow 0=0$

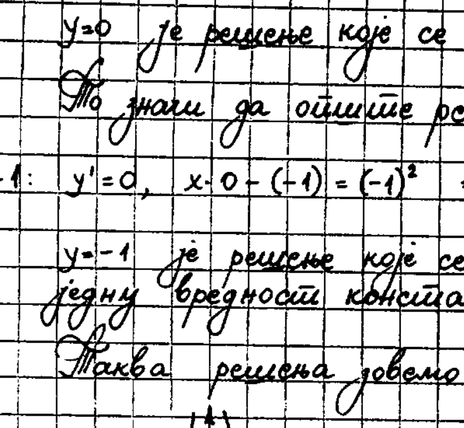
$y=0$ је решење које се може добити из општег за $C_2=0$.

То значи да опште решење можемо писати у облику $\frac{y}{y+1} = Cx$, $C\in\mathbb{R}$

$y=-1$: $\quad y'=0, \ x\cdot 0 - (-1) = (-1)^2 \Rightarrow 1=1$

$y=-1$ је решење које се не може добити из општег ни за једну вредност константе.

Таква решења зовемо сингуларна решења.



Зад. 2. $tg\,x \cdot \sin^2 y \cdot dx + \cos^2 x \cdot ctg\,y\,dy = 0 \quad /: \sin^2 y \cdot \cos^2 x$ (не мора то јер има tg, ctg

Решење: $\frac{tg\,x}{\cos^2 x}dx + \frac{ctg\,y}{\sin^2 y}dy = 0$

$$\Rightarrow \int \frac{tg\,x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{ctg\,y}{\sin^2 y}dy = C_1$$

$tg\,x = t \qquad ctg\,y = t$

$$\Rightarrow \frac{tg^2 x}{2} - \frac{ctg^2 y}{2} = C_1 \Rightarrow tg^2 x - ctg^2 y = C, \quad C = 2C_1$$

Тип 2. Диференцијална једначина облика

$$y' = f(ax+by+c)$$

сменом $ax+by+c = z$ где је $z = z(x)$, своди се на Тип 1.

Зад. 3. $y' = (x+y)^2$

Решење: смена $x+y = z \;/'$

$$\Rightarrow 1+y' = z' \Rightarrow y' = z'-1 \Rightarrow z^2 = z'-1 \Rightarrow z' = z^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2+1 \Rightarrow \int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

$$\Rightarrow arctg\,z = x + C \Rightarrow arctg(x+y) - x = C$$

Зад. 4. $y' = \frac{1}{x+y-1}$, $y(0)=1$. Наћи опште решење, као и партикуларно решење које задовољава услов $y(0)=1$

Решење: смена $x+y-1 = z \;/'$

$1+y' = z'$

$y' = z'-1 \Rightarrow \frac{1}{z} = z'-1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{z} \Rightarrow \frac{z\,dz}{z+1} = dx$

$$\int \frac{z+1-1}{z+1}dz = \int dx \Rightarrow z - \ln|z+1| = x + C$$

$$\Rightarrow x+y-1 - \ln|x+y| - x = C$$

$\Rightarrow y - \ln|x+y| = C_1, \; C_1 = C+1$ – опште решење

$y(0)=1: \; 1 - \ln|0+1| = C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y - \ln|x+y| = 1$ – партикуларно ре

Тип 3. Хомогена диференцијална једначина

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

сменом $\frac{y}{x} = z$, $z = z(x)$ своди се на Тип 1.

Зад. 5. $xy' = y - x \;/:x$ смена $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$

Решење: $y' = \frac{y}{x} - 1 \Rightarrow \cancel{z} + xz' = \cancel{z} - 1 \Rightarrow \frac{x\,dz}{dx} = -1$

$$\int dz = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow z = -\ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = -\ln|x| + C \Rightarrow y = -x\ln|x| + Cx$$

Зад. 6. $x\,dy = \frac{2y^2+6xy+2x^2}{2y+5x}\,dx \quad /: x\,dx$

Решење: $y' = \frac{2y^2+6xy+2x^2}{2xy+5y^2} = \frac{x^2\left(2\left(\frac{y}{x}\right)^2+6\frac{y}{x}+2\right)}{x^2\left(\frac{2y}{x}+5\right)}$

$y' = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2+6\frac{y}{x}+2}{2\frac{y}{x}+5}, \quad \frac{y}{x} = z, \quad y' = z + xz'$

$z + xz' = \frac{2z^2+6z+2}{2z+5} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z^2+6z+2-2z^2-5z}{2z+5} = \frac{z+2}{2z+5}$

$\int \frac{2z+5}{z+2}\,dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 2z + \ln|z+2| = \ln|x| + C$

$\Rightarrow 2\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}+2\right| - \ln|x| = C$

Тип 4. Диференцијална једначина облика

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ I) $\Delta \neq 0$ своди се на Тип 3

II) $\Delta = 0$ своди се на Тип 2

Зад. 7. $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

Решење: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ смена $x = X+\alpha$, $y = Y+\beta$; $dx = dX$, $dy = dY$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{X+\alpha-Y-\beta+1}{X+\alpha+Y+\beta-3}$ $\quad \alpha-\beta+1=0, \ \alpha+\beta-3=0 \quad \alpha=1, \ \beta=2 \quad x = X+1, \ y = Y+2$

$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-X/Y}{1+X/Y}$, смена $\frac{Y}{X} = z$, $Y' = z + Xz'$

$z + Xz' = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow z^2+2z-1 = \frac{C}{X^2}$

$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{Y}{X}\right) - 1 = \frac{C}{X^2}$

$Y^2 + 2XY - X^2 = C$

Тип 5. Линеарна диференцијална једначина

$y' + p(x)y = q(x)$ (може и обрнуто)

опште решење $y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

Зад. 8. $xy' + y = e^x \quad /: x$

Решење: $y' + \overset{=p(x)}{\frac{1}{x}}\,y = \overset{=q(x)}{\frac{e^x}{x}}$

$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(C + \int \frac{e^x}{x} e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right) = e^{-\ln x}\left(C + \int \frac{e^x}{x} e^{\ln x}dx\right)$ - без апс. вредности

$y = \frac{1}{x}\left(C + \int \frac{e^x}{x}x\,dx\right) = \frac{1}{x}\left(C + e^x\right)$

Зад. 9. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$

Решење: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x} \Rightarrow x' = 2\ln y + 1 - \dfrac{x}{y}$

$$x' + \underbrace{\frac{1}{y}}_{p(y)} x = \underbrace{1 + 2\ln y}_{q(y)} \Rightarrow x = e^{-\int\frac{dy}{y}}\left(C + \int (1+2\ln y)\, e^{\int \frac{dy}{y}}\, dy\right)$$

$$x = \frac{1}{y}\left(C + \int (y + 2y\ln y)\, dy\right) = \frac{C}{y} + y\ln y$$

Тип 6 Бернулијева диференцијална једначина

$y' + p(x)y = q(x)\, y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ (x и y могу да замене улоге)

сменом $z = y^{1-\alpha}$ где је $z = z(x)$ своди се на Тип 5

Зад. 10. $y' = \dfrac{4}{x} y + x\sqrt{y}$

Решење: $y' - \dfrac{4}{x} y = x y^{\frac{1}{2}} \Big/ \cdot \dfrac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$

смена $z = y^{\frac{1}{2}}$, $\boxed{z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}} \cdot y'$

$$\underbrace{\frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'}_{z'} - \frac{2}{x} \underbrace{y^{\frac{1}{2}}}_{z} = \frac{1}{2} x \Rightarrow z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2} \quad \text{(линеарна по } z\text{)}$$

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx}\left(C + \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x} dx}\right) = x^2\left(C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx\right)$$

$$z = Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| \Rightarrow y = \left(Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x|\right)^2$$

Тип 7. Диференцијална једначина у тоталном диференцијалу

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array}} \quad \text{(услов)}$$

опште решење је дато $u(x,y) = C = \int P\,dx + \int\left[Q - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy$

Зад. 11. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$

Решење: Увек прво проверавамо да ли је ј-на у тоталном диференцијалу

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ услов задовољен

$\int P\,dx = \int \frac{y}{x}\,dx = y\ln x$

$\int\left[Q - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy = \int (y^3 + \cancel{\ln x} - \cancel{\ln x})\,dy = \dfrac{y^4}{4}$

$u(x,y) = y\ln x + \dfrac{y^4}{4} \Rightarrow y\ln x + \dfrac{y^4}{4} = C$ - ф-ја чији диференцијал дат у тексту задатка

Зад. 12. $\dfrac{1}{x^2y}\,dx + \left(1 + \dfrac{1}{xy^2}\,dy\right) = 0 \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2y^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Решење: $\int P\,dx = \int \dfrac{dx}{x^2y} = -\dfrac{1}{xy}$ $\qquad$ опште решење $y - \dfrac{1}{xy} = C$

$\int\left[Q - \dfrac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy = \int\left(1 + \cancel{\dfrac{1}{xy^2}} - \cancel{\dfrac{1}{xy^2}}\right)dy = y \qquad u(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + y$

вежба бр. 10

28. 11. 2007.

Диференцијалне ј-не вишег реда

Тип 1. Хомогена диференцијална ј-на вишег реда са константним коефицијентима

$$y^{(n)} + C_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + C_1 y' + C_0 y = 0, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

1. корак: Направимо карактеристичну ј-ну $r^n + C_{n-1} r^{n-1} + \cdots + C_1 r + C_0 = 0$ и нека су $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ нуле полинома.

I) $r_1, r_2, \ldots, r_n$ су реални и различити

Тада нам одговара фундаментални систем решења $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$

II) међу коренима постоји вишеструки реалан корен вишеструкости k (нпр. $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = r$). Тада њему одговара фундаменталан систем решења $e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots, x^{k-1} e^{rx}$

III) међу коренима постоји комплексан корен $r = \alpha + i\beta$ $(\bar{r} = \alpha - i\beta)$ и њима одговара фундаментални систем решења $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$

IV) међу коренима постоји вишеструки комплексан корен вишеструкости k, тада њему одговара фундаментални систем решења

$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$

$xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x$

$\vdots \qquad \vdots$

$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Зад. 1. $y'' + 3y' = 0$

Решење: $r^2 + 3r = 0 \Rightarrow r(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \ r_2 = -3$ реални и различити $\Rightarrow$ I

ф.с.р. $e^{0x}, e^{-3x} \Leftrightarrow 1, e^{-3x}$

$y_{oh} = C_1 + C_2 e^{-3x}$

Зад. 2. $y'' + y' - 2y = 0$

Решење: $r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \ r_2 = -2$

ф.с.р. $e^x, e^{-2x} \Rightarrow y_{oh} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Зад. 3. $y'' + 2y' + y = 0$

Решење: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$

ф.с.р. $e^{-x}, xe^{-x} \Rightarrow y_{oh} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

Зад. 4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Решење: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

ф.с.р. $e^x, xe^x, x^2e^x \Rightarrow y_{oh} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

* диф. ј-на реда $n \Rightarrow$ има n различитих константи

Зад. 5. $y'' + y' + y = 0$

Решение: $r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \overset{\alpha}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \pm \overset{\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}} i$

ф.с.р. $e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x, \ e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \Rightarrow y_{oн} = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

Зад. 6. $y'' + 9y = 0$

Решение: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 3i = \overset{\alpha}{0} \pm \overset{\beta}{3} i$

ф.с.р. $e^{0 \cdot x} \cos 3x, \ e^{0 \cdot x} \sin 3x \Rightarrow y_{oн} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$\cos 3x, \ \sin 3x$

Зад. 7. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

Решение: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = i = \overset{\alpha}{0} + \overset{\beta}{1} i$

$r_3 = r_4 = -i = 0 - 1 \cdot i$

ф.с.р. $\cos x, \ \sin x$

$x \cos x, \ x \sin x \Rightarrow y_{oн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$

Зад. 8. $y'' + y' + py = 0, \ p \in R$

Решение: $r^2 + r + p = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}, \ D = 1 - 4p$

I) $D > 0$: $1 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{4} \Rightarrow r_1, r_2$ реални и различни $\Rightarrow$ ф.с.р. $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$

II) $D = 0$: $1 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ ф.с.р. $e^{-\frac{x}{2}}, \ x e^{-\frac{x}{2}}$

III) $D < 0$: $1 - 4p < 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{4} \Rightarrow r_1, r_2$ конјугирано комплексни

$\Rightarrow$ ф.с.р. $e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{4p-1}}{2}, \ e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{4p-1}}{2}$

$$y_{oн} = \begin{cases} C_1 e^{\left(\frac{-1+\sqrt{1-4p}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{-1-\sqrt{1-4p}}{2}\right)x}, & p < \frac{1}{4} \\ C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}, & p = \frac{1}{4} \\ C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{4p-1}}{2} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{4p-1}}{2}, & p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Зад. 9. $y'' + py = 0, \ p \in R$

Решение: $r^2 + p = 0, \ D = -4p$

I) $p < 0$: $r_{1,2} = \pm \sqrt{-p} \Rightarrow$ ф.с.р. $e^{\sqrt{-p}x}, \ e^{-\sqrt{-p}x}$

II) $p = 0$: $r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow$ ф.с.р. $1, \ x$

III) $p > 0$: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{p} \Rightarrow$ ф.с.р. $\cos \sqrt{p} x, \ \sin \sqrt{p} x$

$$y_{oн} = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-p}x} + C_2 e^{-\sqrt{-p}x}, & p < 0 \\ C_1 + C_2 x, & p = 0 \\ C_1 \cos \sqrt{p} x + C_2 \sin \sqrt{p} x, & p > 0 \end{cases}$$

Тип 2. Нехомогена линеарна диференцијална ј-на вишег реда са константним коефицијентима

$$y^{(n)} + C_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + C_1 y' + C_0 y = F(x)$$

I) Решимо хомогену једначину y_{oh}

II) Одредимо једно партикуларно решење y_p целе једначине методом неодређених коефицијената (користећи таблицу) или, ако то није могуће, користећи Лагранжев метод варирања константи

III) $y_{on} = y_{oh} + y_p$

Метод неодређених коефицијената

$F(x)$	услов:	y_p
$P_n(x)$	0 није корен кар. ј-не	$Q_n(x)$
	0 је корен к.ј. реда k	$x^k Q_n(x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	α није корен к.ј.	$Q_n(x)e^{\alpha x}$
	α је корен к.ј. реда k	$x^k Q_n(x) e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ $t = \max\{m, n\}$	$\alpha + i\beta$ није корен к.ј.	$e^{\alpha x}(R_t(x)\cos\beta x + S_t(x)\sin\beta x)$
	$\alpha + i\beta$ је корен к.ј. реда k	$x^k e^{\alpha x}(R_t(x)\cos\beta x + S_t(x)\sin\beta x)$

Зад. 1. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \underbrace{x^2}_{F_1(x)} + \underbrace{e^x}_{F_2(x)}$

Решење: I) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 1+i, \quad r_3 = 1-i$

$e^x, \quad e^x\cos x, \quad e^x \sin x$

$$y_{oh} = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x$$

II) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = x^2$

$\left.\begin{array}{l} F(x) = x^2 \\ 0 \text{ није корен} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$
$y_p'' = 2A$
$y_p''' = 0$

$0 - 6A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2$

$\left.\begin{array}{l} -2A = 1 \\ 8A - 2B = 0 \\ -6A + 4B - 2C = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = -2 \\ C = -\frac{5}{2} \end{array} \Rightarrow y_{p_1} = -\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{5}{2}$

$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = e^x$

$\left.\begin{array}{l} F(x) = e^x \\ \alpha = 1 \text{ корен 1. реда} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = x^1 \cdot A \cdot e^x$

$y_p' = A(x+1)e^x$
$y_p'' = A(x+2)e^x$
$y_p''' = A(x+3)e^x$

$(A(x+3) - 3A(x+2) + 4A(x+1) - 2Ax)e^x = e^x$

$Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{p_2} = xe^x$

III) $y_{on} = y_{oh} + y_{p_1} + y_{p_2} = e^x(C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x) + xe^x - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{5}{2}$

Вежба бр. 11 29.11.2007.

Решавање нехомогених једначина

Решавамо Лагранжовом методом варијације константи

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)\,y' + P_0(x)\,y = f(x)$$

$y_1, \dots, y_n$ решења (линеарно независна) одговарајућих хомогених једначина

$$y_{OH} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$$

Сада је $C_i = C_i(x)$

$$y_{ON} = C_1(x)\,y_1 + \dots + C_n(x)\,y_n$$

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\,y_1 + \dots + C_n'(x)\,y_n &= 0\\
C_1'(x)\,y_1' + \dots + C_n'(x)\,y_n' &= 0\\
C_1'(x)\,y_1'' + \dots + C_n'(x)\,y_n'' &= 0\\
&\vdots\\
C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

Зад. 1. $y'' - 6y' + 9y = \boxed{\dfrac{e^{3x}}{x^2}}$

Решење:
$$\begin{aligned}
y'' - 6y' + 9 &= 0\\
\lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0\\
(\lambda - 3)^2 &= 0\\
y_{OH} &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}
\end{aligned}$$

$$y_{ON} = C_1(x)\cdot e^{3x} + C_2(x)\cdot x \cdot e^{3x}$$

$$\begin{aligned}
C_1'\cdot e^{3x} + C_2'\cdot x\cdot e^{3x} &= 0 \qquad /: e^{3x}\\
C_1'\cdot 3e^{3x} + C_2'(1+3x)\,e^{3x} &= \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad /: e^{3x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1' + C_2' x &= 0 \qquad /\cdot(-3)\\
3C_1' + (1+3x)\,C_2' &= \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2' &= \frac{1}{x^2} \Rightarrow C_2 = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + D_2\\
C_1' &= -x\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow C_1 = -\ln|x| + D_1
\end{aligned}$$

$$y_{ON} = \left(-\ln|x| + D_1\right) e^{3x} + \left(-\frac{1}{x} + D_2\right) x\, e^{3x}$$

$$y_{ON} = \underbrace{(D_1 + D_2 x)\,e^{3x}}_{\text{опште решење хомогене}} \underbrace{- \ln|x|\,e^{3x} - e^{3x}}_{\text{партикуларно решење}}$$

Зад. 2. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

Решење:
$$\begin{aligned}
y'' - y &= 0\\
\lambda^2 - 1 &= 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0\\
y_1 = e^{x}, \quad y_2 &= e^{-x} \Rightarrow y_{OH} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}
\end{aligned}$$

$$y_{ON} = C_1(x)\,e^{x} + C_2(x)\,e^{-x}$$

$$C_1' e^x + C_2' \cdot e^{-x} = 0$$
$$C_1' \cdot e^x - C_2' \cdot e^{-x} = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad +$$

$$2 \cdot C_1' \cdot e^x = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow C_1' = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)e^{-x}$$

$$C_1 = \int 2\sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot dx + \int \frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{-x} dx = -\int 2\sqrt{x}\, d(e^{-x}) dx + \int e^{-x} d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= -2\sqrt{x}\cdot e^{-x} + \cancel{\int e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx} + e^{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \cancel{\int e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx}$$

$$C_1 = \left(-2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{-x} + D_1$$

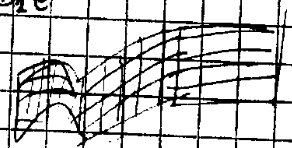
$$C_2' e^{x} = -C_1 e^{x} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow C_2' = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^x$$

$$C_2 = \left(-2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^x + D_2$$

$$y_{on} = \left(\left(-2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{-x} + D_1\right)e^x + \left(\left(-2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^x + D_2\right)e^{-x}$$

$$y_{on} = -2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + D_1 e^x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + D_2 e^{-x}$$

$$y_{on} = \underbrace{D_1 e^x + D_2 e^{-x}}_{y_{oh}} \underbrace{- 4\sqrt{x}}_{y_p}$$



Лиувилова формула

(1) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Треба знати једно решење одговарајуће формуле (хомогене)

Ако је y_1 једно партикуларно решење одговарајуће хомогене једначине, друго решење хомоген једначине је тада

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

$$y_{oh} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$y_{on} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ – варијација константи

Зад. 1. $(1+x)y'' + (1-x)y' - y = 0$ ако се зна да је једно решење $y_1 = \frac{1}{1+x}$

Решење: $y'' + \frac{1-x}{1+x}y' - \frac{1}{1+x}y = 0$

$$y_2 = \frac{1}{1+x}\int \frac{1}{\frac{1}{(1+x)^2}} e^{-\int \frac{1-x}{1+x}dx} dx$$

$$y_2 = \frac{1}{1+x}\int (1+x)^2 e^{\int \frac{x+1-2}{x+1}dx} dx$$

$$= \frac{1}{1+x}\int (1+x)^2 e^{x-2\ln(x+1)} dx$$

$$= \frac{1}{1+x}\int \cancel{(1+x)^2} e^x \cdot \frac{1}{\cancel{(1+x)^2}} dx = \frac{1}{1+x}e^x$$

$$y_{oh} = C_1 \frac{1}{1+x} + C_2 \frac{1}{1+x} e^x$$

Зад. 2. $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = e^x$

Решење: $y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{2x-2}{x}dx} dx = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{2x-2\ln x} dx$

$= e^x \int \frac{1}{\cancel{e^{2x}}} \cancel{e^{2x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = e^x\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^x}{x}$

$y_{oh} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2\left(-\frac{e^x}{x}\right)$

Зад. 3. $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2+2$ Решити ј-ну ако је једно партикуларно решење хомогене једначине полином.

Решење: $y_1 = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$y_1' = mx^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \dots + a_1$

$y_1'' = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)a_{m-1}x^{m-3} + \dots + a_2$

$(1+x^2)(m(m-1)x^{m-2} + \dots) + 2x(mx^{m-1} + \dots) - 2(x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots) = 0$

$(m(m-1) + 2m - 2)x^m + (\dots)x^{m-1} + \dots = 0$

$m(m-1) + 2m - 2 = 0$

$m^2 + m - 2 = 0$

$(m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 1 \vee \cancel{m=-2} \Rightarrow y = x + a$

$(1+x^2)\cdot 0 + 2x \cdot 1 - 2(x+a) = 0$

$2x - 2x - 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow y_1 = x$

$y_2 = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1+x^2)} dx$

$= x \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) = x\left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) = -1 - x\cdot\operatorname{arctg} x$

$y_{oh} = C_1 x + C_2(1 + \operatorname{arctg} x) \Rightarrow$ варирају константе

$y_{oh} = C_1(x)\cdot x + C_2(x)(1 + \operatorname{arctg} x)$

$C_1' x + C_2'(1 + x\operatorname{arctg} x) = 0$

$C_1' + C_2'\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{4x^2+2}{x^2+1}$

Крамер $\Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} x & 1+x\operatorname{arctg} x \\ 1 & \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+x^2}$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 1+x\operatorname{arctg} x \\ \frac{4x^2+2}{1+x^2} & \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \end{vmatrix} = -\frac{(1+x\operatorname{arctg} x)(4x^2+2)}{x^2+1}$

$\Delta y = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{4x^2+2}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{x(4x^2+2)}{x^2+1}$

$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = (4x^2+2)(1 + x\operatorname{arctg} x)$

$C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -x(4x^2+2)$

$C_1 = \int (4x^2+2)dx + \int (4x^3+2x)\operatorname{arctg} x\, dx = x^3 + 2x + (x^4+x^2)\operatorname{arctg} x + D_1$

$C_2 = \int (-4x^3 - 2x)dx = -x^4 - x^2 + D_2$

$y_{oh} = (x^3 + 2x + (x^2+x^4)\operatorname{arctg} x + D_1)x + (x^2 + x^4 + D_2)(1 + x\cdot\operatorname{arctg} x)$

$y_{oh} = D_1 x + D_2(1 + x\operatorname{arctg} x) + x^2$

Вежбе бр. 12

05. 12. 2007.

Смене зависне и независне променљиве. Ојлерова диф. ј-на

Зад. 1. Методом смене дату једначину свести на познату $(1+x^2)y''+xy'+\lambda^2 y=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$, уводећи смену $x=sh\,t$.

Решење:

* $ch^2x-sh^2x=1$
* $(ch\,x)'=sh\,x$
* $(sh\,x)'=ch\,x$

$x=sh\,t \Rightarrow dx=ch\,t\,dt \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{ch\,t}$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\dot y}{ch\,t}$

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\ddot y\,ch\,t-sh\,t\,\dot y}{ch^2t}\cdot\left(\frac{1}{ch\,t}\right)=\frac{\ddot y\,ch\,t-sh\,t\,\dot y}{ch^3t}$ } диференцирамо y по t

$1+x^2=1+sh^2t=ch^2t$

$\cancel{ch^2t}\cdot\frac{\ddot y\,ch\,t-\dot y\,sh\,t}{ch^{\cancel{3}}t}+sh\,t\,\frac{\dot y}{ch\,t}+\lambda^2 y=0$

$\ddot y-\cancel{\dot y\frac{sh\,t}{ch\,t}}+\cancel{\dot y\frac{sh\,t}{ch\,t}}+\lambda^2 y=0$

$\ddot y+\lambda^2 y=0$

$r^2+\lambda^2=0,\quad D=-4\lambda^2$

I) $\lambda=0,\ r_1=r_2=0 \Rightarrow y_{oh}=C_1+C_2t$

II) $\lambda\neq 0,\ r_{1/2}=\pm i|\lambda| \Rightarrow y_{oh}=C_1\cos|\lambda|t+C_2\sin|\lambda|t$

$x=sh\,t \Rightarrow t=arsh\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$

Зад. 2. $y''+\left(4x-\frac{1}{x}\right)y'+4x^2y=3xe^{-x^2},\ x^2=t,\ x>0$

Решење:

$x^2=t \Rightarrow x=\sqrt t \Rightarrow dx=\frac{1}{2\sqrt t}dt \Rightarrow \frac{dt}{dx}=2\sqrt t$ (тражим $\frac{dt}{dx}$ у ф-ји t)

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot y\cdot 2\sqrt t=2\sqrt t\cdot\dot y$

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{1}{\sqrt t}\dot y+2\sqrt t\,\ddot y\right)\cdot 2\sqrt t=2\dot y+4t\ddot y$

$4t\ddot y+2\dot y+\left(4\sqrt t-\frac{1}{\sqrt t}\right)\cdot 2\sqrt t\,\dot y+4ty=3\sqrt t\cdot e^{-t}$

$4t\ddot y+\cancel{2\dot y}+8t\dot y-\cancel{2\dot y}+4ty=3\sqrt t\cdot e^{-t}\quad /:4t$

$\ddot y+2\dot y+y=\frac{3}{4\sqrt t}e^{-t}$

$r^2+2r+1=0$

$r_1=r_2=-1 \Rightarrow y_{oh}=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$

$C_1'\cdot e^{-t}+C_2'\cdot t\cdot e^{-t}=0\quad /\cdot e^t$

$-C_1'e^{-t}+C_2'\cdot(1-t)e^{-t}=\frac{3}{4\sqrt t}e^{-t}\quad /\cdot e^t$

$\left.\begin{array}{l} C_1'+tC_2'=0 \\ -C_1'+(1-t)C_2'=\frac{3}{4\sqrt t}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_2'=\frac{3}{4\sqrt t}\qquad C_1'=-\frac{3\sqrt t}{4}$

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,dt + D_1 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + D_1 = -\frac{1}{2}t\sqrt{t} + D_1$$

$$C_2(t) = \int C_2'(t)\,dt + D_2 = \frac{3}{2}\sqrt{t} + D_2$$

$$y_{он} = \left(-\frac{1}{2}t\sqrt{t} + D_1\right)e^{-t} + \left(\frac{3}{2}\sqrt{t} + D_2\right)t\cdot e^{-t}$$

$$y_{он} = \underbrace{D_1 e^{-t} + D_2 t e^{-t}}_{y_{оh}} + \underbrace{t\sqrt{t}\cdot e^{-t}}_{y_p}$$

$$y_{он} = D_1 e^{-x^2} + D_2 x^2 e^{-x^2} + x^3\cdot e^{-x^2}$$

Зад. 3. $(1-x^2)^2 y'' + y = 0$, смена $x = th\,t$, $y = \frac{z}{ch\,t}$, $z = z(t)$

Решење:

$$\dot{y} = \frac{\dot{z}\,ch\,t - z\,sh\,t}{ch^2 t}$$

$$x = th\,t \Rightarrow dx = \frac{dt}{ch^2 t} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = ch^2 t$$

све треба изразити преко z и t

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{z}\,ch\,t - z\,sh\,t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (\ddot{z}\,ch\,t + \cancel{\dot{z}\,sh\,t} - \cancel{\dot{z}\,sh\,t} - z\,ch\,t)\cdot ch^2 t = (\ddot{z} - z)\,ch^3 t$$

$$(1 - th^2 t)^2 = \left(1 - \frac{sh^2 t}{ch^2 t}\right)^2 = \left(\frac{ch^2 t - sh^2 t}{ch^2 t}\right)^2 = \frac{1}{ch^4 t}$$

$$\frac{1}{ch^4 t}(\ddot{z} - z)\,ch^3 t + \frac{z}{ch\,t} = 0$$

$$\frac{\ddot{z}}{ch\,t} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow z = C_1 + C_2 t \Rightarrow y = \frac{C_1 + C_2 t}{ch\,t} = \ldots \quad \left(arth\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)$$

Зад. 4. $(x^2-1)y'' + (x - 8\sqrt{x^2-1})y' + 15y = x$, $x = ch\,t$

Решење:

$$dx = sh\,t\,dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{sh\,t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{1}{sh\,t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\,sh\,t - \dot{y}\,ch\,t}{sh^2 t}\cdot\frac{1}{sh\,t} = \frac{\ddot{y}\,sh\,t - \dot{y}\,ch\,t}{sh^3 t}$$

$$(ch^2 t - 1)y'' + (ch\,t - 8\sqrt{ch^2 t - 1})\,\dot{y}\,\frac{1}{sh\,t} + 15y = ch\,t$$

$$\frac{\cancel{sh^2 t}(\ddot{y}\,sh\,t - \dot{y}\,ch\,t)}{sh^3 t} + \frac{(ch\,t - 8\,sh\,t)}{sh\,t}\dot{y} + 15y = ch\,t$$

$$\frac{(\ddot{y}\,sh\,t - \dot{y}\,ch\,t)}{sh\,t} + \frac{ch\,t}{sh\,t}\dot{y} - 8\dot{y} + 15y = ch\,t$$

$$\ddot{y} - \cancel{\frac{ch\,t}{sh\,t}\dot{y}} + \cancel{\frac{ch\,t}{sh\,t}\dot{y}} - 8\dot{y} + 15y = ch\,t$$

$$\ddot{y} - 8\dot{y} + 15y = ch\,t$$

$$\vdots$$

$$y_{он} = C_1\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^3 + C_2\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^5 + \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{16} + \frac{1}{48(x + \sqrt{x^2-1})}$$

$$\left(t = arch\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)$$

Зад. 5. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^3$

а) решити одговарајућу хомогену једначину уводећи смену $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

б) решити диференцијалну једначину

Решење: а) $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$

$$y' = u'v + uv' \qquad y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$x^2u''v + 2x^2u'v' + x^2uv'' - 2xu'v - 2xuv' + (x^2+2)uv = 0$$

$$x^2vu'' + \underbrace{(2x^2v' - 2xv)}_{=0}u' + (x^2v'' - 2xv' + (x^2+2)v)u = 0$$

$$2x^2v' - 2xv = 0$$

$$xv' = v \Rightarrow \int\frac{v'}{v} = \int\frac{1}{x} \Rightarrow \ln|x| + \ln C_1 = \ln|v| \Rightarrow v = C\cdot x$$

нпр. $C=1$: $v = x$, $v' = 1$, $v'' = 0$

$$x^3u'' + (\cancel{-2x} + x^3 + \cancel{2x})u = 0$$

$$x^3u'' + x^3u = 0$$

$$u'' = -u, \quad r^2 + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i$$

$$u(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$y_{oh} = C_1\cdot x\cdot\cos x + C_2\cdot x\cdot\sin x$$

б) урадимо варијацију константи

$$y_{oн} = C_1(x)\cdot x\cdot\cos x + C_2(x)\cdot x\cdot\sin x$$

$\vdots$

$$y_{oн} = D_1x\cos x + D_2x\sin x + x$$

Ојлерова диференцијална једначина

$$A_n(ax+b)^ny^{(n)} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + A_1(ax+b)y' + A_0y = F(x), \quad A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}$$

сменом $ax+b = e^t$ своди се на диференцијалну ј-ну са константним коефицијенти.

Зад. 6. $(3x-2)^2y'' - 3(3x-2)y' + 4y = 0$

Решење: смена $3x-2 = e^t$

$$3dx = e^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 3e^{-t}\cdot\dot{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (-3e^{-t}\cdot\dot{y} + 3e^{-t}\ddot{y})\cdot 3e^{-t} = 9e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$e^{2t}\cdot 9e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - 3e^t\cdot 3e^{-t}\dot{y} + 4y = 0$$

$$9\ddot{y} - 18\dot{y} + 4y = 0$$

$$9r^2 - 18r + 4 = 0$$

$\vdots$

$$y_{oh} = C_1(3x-2)^{1-\frac{\sqrt{5}}{3}} + C_2(3x-2)^{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

Зад. 7. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$. Наћи оно партикуларно решење које задовољава услов $y(1)=1$, $y'(1)=3$

Решење: смена $x=e^t \Rightarrow dx=e^t\,dt \Rightarrow \frac{dt}{dx}=e^{-t}$

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}\cdot e^{-t}$$

$$y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(-e^{-t}\cdot\dot{y}+e^{-t}\cdot\ddot{y})e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$$

$$\cancel{e^{2t}}(\ddot{y}-\dot{y})\cancel{e^{-2t}}-2\cancel{e^{t}}\cancel{e^{-t}}\dot{y}+2y=2e^{3t}-e^{t}$$

$$\ddot{y}-3\dot{y}+2y=2e^{3t}-e^{t}$$

$$r^2-3r+2=0 \qquad r_1=1,\ r_2=2$$

$$y_{oh}=C_1e^{t}+C_2e^{2t}$$

таблица $\longrightarrow$ $y_{p_1}=Ae^{3t}$, $A=1$ $\qquad$ $y_{p_2}=A\,t\cdot e^{t}$, $A=1$

$$y_{on}=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+e^{3t}+t\cdot e^{t}=C_1x+C_2x^2+x^3+x\ln x=y(x)$$

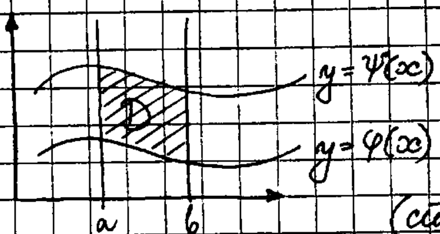
$$C_1+2C_2x+3x^2+\ln x+1=y'(x)$$

$$\begin{matrix}C_1+C_2+1=1 \\ C_1+2C_2+3+1=3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}C_1+C_2=0 \\ C_1+2C_2=-1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}C_1=1 \\ C_2=-1\end{matrix}$$

$$y_p=x-x^2+x^3+x\ln x$$

вежба бр. 13 — 12.12.2007.

Двојни интеграл. Промена поретка интеграције. Смена променљиве

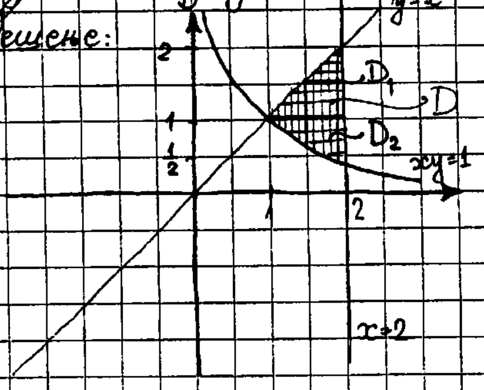


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

(специјално за $f(x,y)=1 \longrightarrow \iint_D dx\,dy=P(D)$)

Зад. 1. $I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ $\qquad$ $y=x,\ xy=1,\ x=2$

Решење:



I) $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ \frac{1}{x}\le y\le x\end{cases}$

$$I=\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int_1^2 dx\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{1/x}^{x}$$

$$=\int_1^2(-x+x^3)\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{9}{4}$$

II) $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$

2. начин

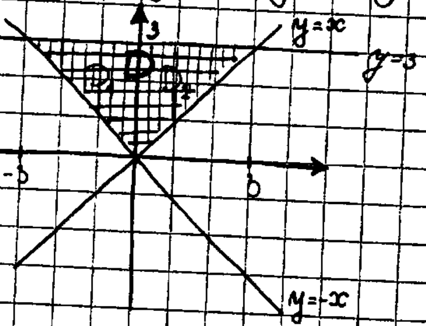
$D_1: \begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 2 \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} \frac{1}{2} \le y \le 1 \\ \frac{1}{y} \le x \le 2 \end{cases}$

$$= \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx + \int_{1/2}^1 dy \int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 dy \left(\frac{x^3}{3y^2}\right)\Big|_y^2 + \int_{1/2}^1 dy \left(\frac{x^3}{3y^2}\right)\Big|_{1/y}^2$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3}\right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}\right) dy = \frac{9}{4}$$

Зад. 2 $\iint_D dx\,dy$, $y = x$, $y = -x$, $y = 3$



I) $I = P(D) = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

II) $D_1: \begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ -x \le y \le 3 \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x \le y \le 3 \end{cases}$

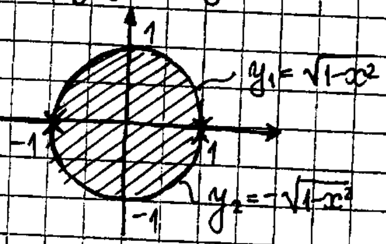
$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 dy + \int_0^3 dx \int_x^3 dy$$

$$= \int_{-3}^0 (3+x)\,dx + \int_0^3 (3-x)\,dx = 9$$

III) $D: \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ -y \le x \le y \end{cases}$

$$I = \int_0^3 dy \int_{-y}^{y} dx = \int_0^3 x\Big|_{-y}^{y} dy = \int_0^3 2y\,dy = y^2\Big|_0^3 = 9$$

Зад. 3. $\iint_D y\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

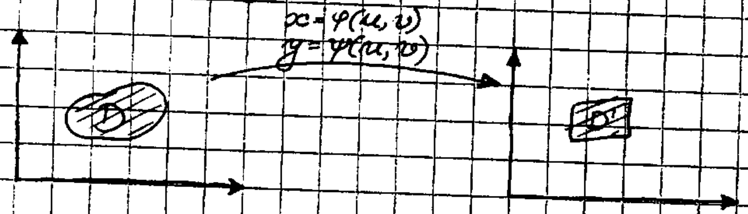


$-1 \le x \le 1$
$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 0\,dx = 0$$

Смена променљиве

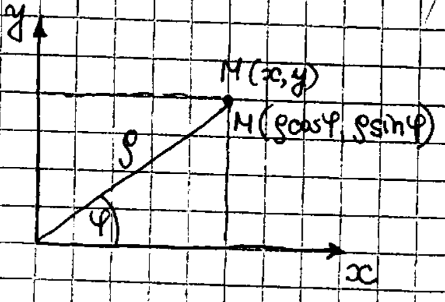
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|J|\,du\,dv$$



Јакобијан

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}$$

Поларне координате



$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} \rightarrow x = \rho\cos\varphi$ $\quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \rightarrow y = \rho\sin\varphi$

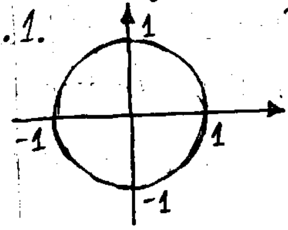
$0 \le \rho \le +\infty$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

Параметризовати следеће области уводећи поларне координате.

Зад. 1. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$



Решење: $x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$k:\ x^2+y^2=1$

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1$

$\rho^2=1 \rightarrow \underline{\rho=1}\quad(\rho>0)$ ј-на кружнице у поларним координатама

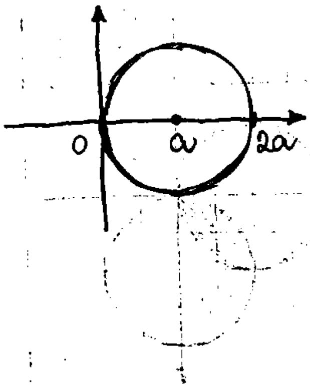
$|J|=\rho$

$0\le\rho\le 1$

$0\le\varphi\le 2\pi \Leftrightarrow -\pi\le\varphi\le\pi$

Зад. 2. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2ax\}$

Решење:



$k:\ x^2+y^2=2ax$

$x^2-2ax+y^2=0$

$(x-a)^2+y^2=a^2$

I) $\left.\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right\}\rightarrow k \Rightarrow \rho^{\cancel{2}}=2a\cancel{\rho}\cos\varphi \Rightarrow \rho=2a\cos\varphi$

$0\le\rho\le 2a\cos\varphi$

$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

II) померимо се у центар круга

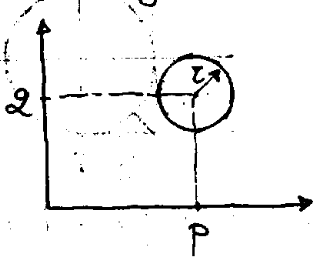
$\left\{\begin{array}{l}x-a=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right.\rightarrow k \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=a^2 \Rightarrow \rho^{\cancel{2}}=a^{\cancel{2}}$

$0\le\rho\le a$

$0\le\varphi\le 2\pi$

Зад. 3. $D=\{(x,y)\mid (x-p)^2+(y-q)^2\le r^2\}$

Решење:



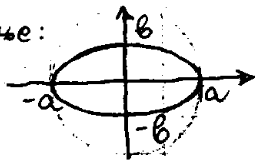
код оваквих задатака уводимо померене коо-те

$x-p=\rho\cos\varphi$ $\qquad 0\le\rho\le r$

$y-q=\rho\sin\varphi$ $\qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

Зад. 4. $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$

Решење:



$x=a\rho\cos\varphi$

$y=b\rho\sin\varphi$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\cancel{a^2}\rho^2\cos^2\varphi}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}\rho^2\sin^2\varphi}{\cancel{b^2}}=\rho^2=1 \Rightarrow \rho=1$

Јакобијан је другачији

$J=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$

$0\le\rho\le 1$

$0\le\varphi\le 2\pi$

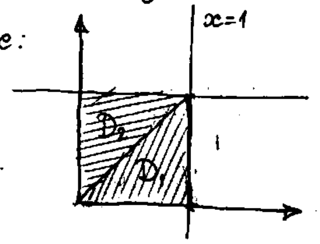
Зад. 5. $D=\{(x,y)\mid \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}\le 1\}$

Решење: $x-p=a\rho\cos\varphi$ $\qquad 0\le\rho\le 1$ $\qquad J=ab\rho$

$y-q=b\rho\sin\varphi$ $\qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

Зад. 6. $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

Решење:



$x = \rho\cos\varphi$ $\quad x = 1$

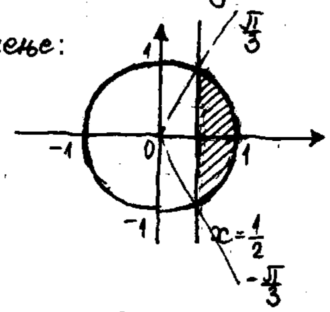
$y = \rho\sin\varphi$ $\quad \rho\cos\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{\cos\varphi}}$

$D_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\varphi} \end{cases}$ $\qquad D_2: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\sin\varphi} \end{cases}$

$D = D_1 \cup D_2$

Зад. 7. $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge \frac{1}{2}\}$

Решење:



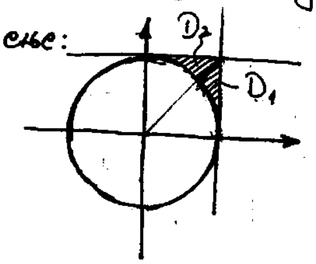
$x = \rho\cos\varphi$ $\quad x = \frac{1}{2}$

$y = \rho\sin\varphi$ $\quad \rho\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2\cos\varphi}$

$D: \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2\cos\varphi} \le \rho \le 1 \end{cases}$

Зад. 8. $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

Решење:



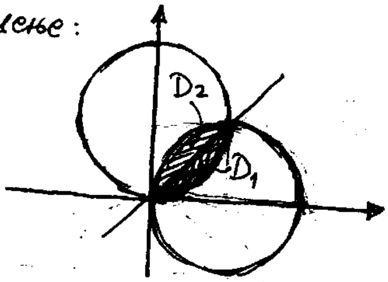
$x = \rho\cos\varphi$ $\quad \rho \ge 1 \quad 0 \le \rho\cos\varphi \le 1 \quad 0 \le \rho\sin\varphi \le 1$

$y = \rho\sin\varphi$

$D_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 1 \le \rho \le \frac{1}{\cos\varphi} \end{cases}$ $\qquad D_2: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le \rho \le \frac{1}{\sin\varphi} \end{cases}$

Зад. 9. $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x,\ x^2+y^2 \le 2y\}$

Решење:



$\boxed{\rho^2 = 2\rho\cos\varphi}$ $\qquad \rho^2 = 2\rho\sin\varphi$ $\qquad \boxed{\rho = 2\cos\varphi}$

$D_1: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \end{cases}$ $\qquad D_2: \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \rho = 2R\cos\varphi$

$D = D_1 \cup D_2$

вежба бр. 14

19. 12. 2007.

Примена двојног интеграла на рачунање површине и запремине

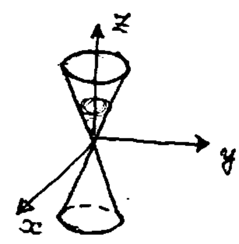
Подсетник из М1 – елементарне површи

1° Раван : $Ax + By + Cz + D = 0$

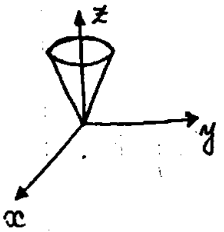
2° Сфера : $(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = R^2$

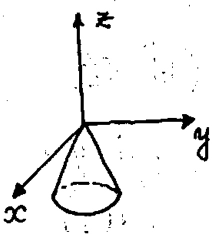
3° Елипсоид : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

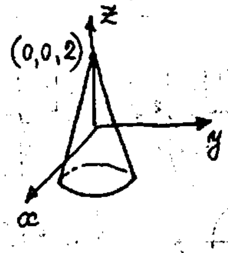
4° Конус : $z^2 = x^2 + y^2$ (оса ротације z)

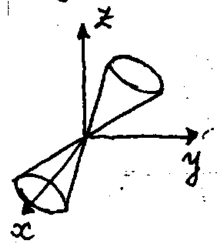


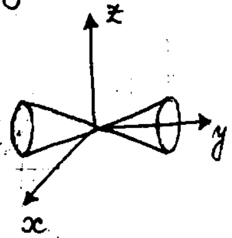
$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z=-\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x^2=y^2+z^2$ $\quad y^2=x^2+z^2$



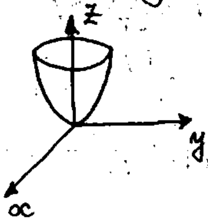


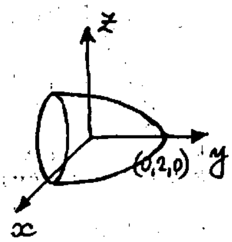




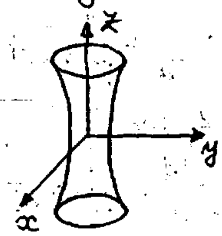


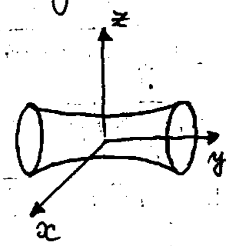
5° Параболоид : $z=x^2+y^2$ $\qquad y=2-x^2-z^2=2-(x^2+z^2)$

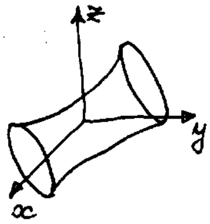




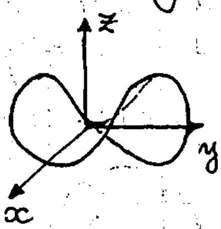
6° Једнокрилни хиперболоид: $x^2+y^2-z^2=1$ $\qquad x^2-y^2+z^2=1$ $\qquad -x^2+y^2+z^2=1$





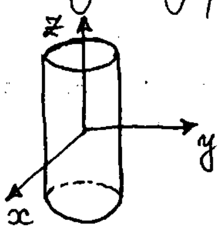


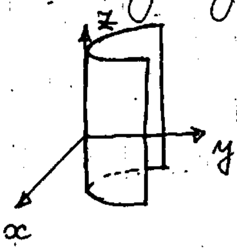
7° Хиперболички параболоид (седло): $2z=x^2-y^2$ или $z=xy$



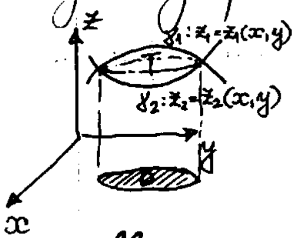
8° Цилиндричне површи (недостаје једна променљива)

Кружни цилиндар $x^2+y^2=1$ $\qquad$ Параболички цилиндар $y=x^2$



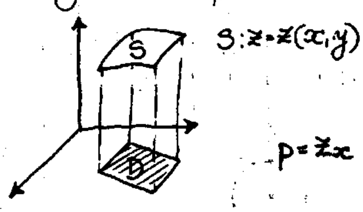


Рачунање запремине



$$V(T)=\iint_D \left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)dx\,dy$$

Рачунање површине

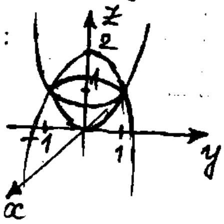


$p=z_x \qquad q=z_y$

$$P(S)=\iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

Зад. 1. Наћи P и V тела T ограничену површинама $\Gamma_1: z=x^2+y^2$ $\quad \Gamma_2: z=2-x^2-y^2$

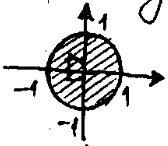
Решење:



одредимо пресек $\left(z^{\Gamma_1}=z^{\Gamma_2}\right)$

$x^2+y^2=2-x^2-y^2$

$x^2+y^2=1$ пројекција је кружница полупречника 1



$x=\rho\cos\varphi \qquad 0\le\rho\le 1$

$y=\rho\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi \qquad |J|=\rho$

$$V=\iint_D\left(2-x^2-y^2-(x^2+y^2)\right)dx\,dy=\iint_D\left(2-2(x^2+y^2)\right)dx\,dy$$

одакле ово?

$$=2\iint_D dx\,dy-2\iint_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=2P(D)-2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho$$

$f(x,y)=1\rightarrow$ једнак површини

преко поларних координата

$$=2\pi-2\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=2\pi-4\pi\cdot\frac{1}{4}=\pi$$

$\Gamma_1: p=2x \qquad \Gamma_2: p=-2x$

$\quad\; q=2y \qquad\quad\;\; q=-2y$

$$P(T)=P_1+P_2=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy+\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$=2\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho \qquad \begin{bmatrix}1+4\rho^2=t\\ \rho\,d\rho=\frac{dt}{8}\end{bmatrix}$$

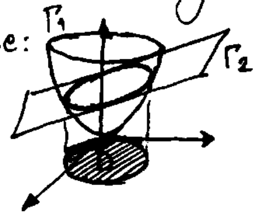
$$=\frac{2}{8}\cdot 2\pi\int_1^5\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^5=\frac{\pi}{3}\left(5\sqrt5-1\right)$$

Зад. 2. Дате се две површи $\Gamma_1: z=x^2+y^2$ $\quad \Gamma_2: z=2x+2y+2$

а) Наћи V тела ограниченог овим површинама

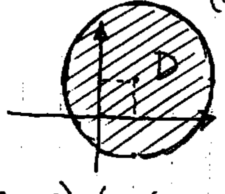
б) Наћи P дела површи Γ_2 коју исеца Γ_1

Решење:



пресек: $x^2+y^2=2x+2y+2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$



$x-1=\rho\cos\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

$y-1=\rho\sin\varphi \qquad 0\le\rho\le 2$

$|J|=\rho$

$$V=\iint_D\left(2x+2y+2-x^2-y^2\right)dx\,dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(2(1+\rho\cos\varphi)+2(1+\rho\sin\varphi)+2-(\rho\cos\varphi+1)^2-(\rho\sin\varphi+1)^2\right)d\rho$$

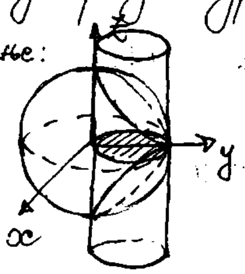
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4-\rho^2)\rho\,d\rho=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2=8\pi$$

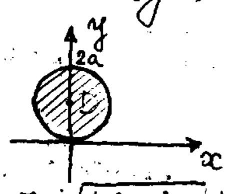
$$P=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint_D\sqrt9\,dx\,dy=3\iint_D dx\,dy=3P(D)=12\pi$$

($p=2$, $q=2$)

Зад. 3. Одредити V оног дела лопте $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $a>0$ који се налази унутар цилиндра $x^2+(y-a)^2=a^2$.

Решење:





$z_1=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$

$z_2=-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$

$$V=\iint_D(z_1-z_2)\,dx\,dy$$

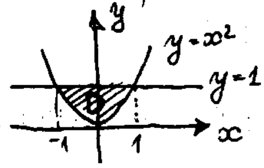
$D:\; 0\le\varphi\le\pi$

$\quad\;\; 0\le\rho\le 2a\sin\varphi$

$$V=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi}2\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\,d\rho=\dots=\frac{16}{9}a^3(3\pi-4)$$

Зад. 4. Тело T ограничено је површинама $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$. Нађи V

Решење:



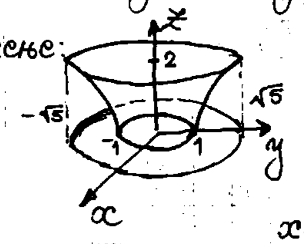
D: $-1\le x\le 1$

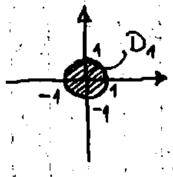
$x^2\le y\le 1$

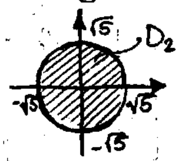
$$V=\iint_D (x^2+y^2-0)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy$$
$$=\int_{-1}^{1}dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{1}=\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac13-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{88}{105}$$

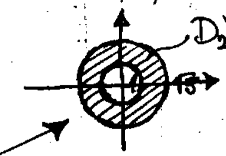
Зад. 5. Дато је тело задато површима $x^2+y^2-z^2=1$, $z=0$, $z=2$. Пронађи V.

Решење:









$x=\rho\cos\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le 2\pi$

$y=\rho\sin\varphi$ $\quad 1\le\rho\le\sqrt5$

$$V=V_1-V_2=\iint_{D_2}(2-0)\,dx\,dy-\iint_{D_2\setminus D_1}(z_{\text{хиперболоида}}-0)\,dx\,dy$$
$$=2\iint_{D_2}dx\,dy-\iint_{D_2\setminus D_1}\sqrt{x^2+y^2-1}\,dx\,dy=2P(D_2)-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^{\sqrt5}\rho\sqrt{\rho^2-1}\,d\rho=10\pi-\frac{16\pi}{3}=\frac{14\pi}{3}$$

Зад. 6. Нађи запремину тела у првом октанту ограниченог параболоидом $z=x^2+y^2$ и елиптичким конусом $z^2=xy$.

Решење: Овај задатак не може да се скицира.

1. октант $\Rightarrow x,y,z\ge 0$, $z=\sqrt{xy}$

Занима нас пројекција

$xy=(x^2+y^2)^2$

Уводимо поларне координате

$\rho^2\cos\varphi\sin\varphi=\rho^4$

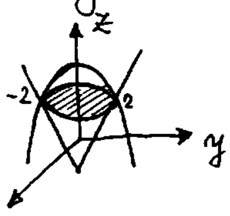
$\rho^2=\frac12\sin2\varphi \quad\Rightarrow\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$0\le 2\varphi\le\pi \qquad 0\le\rho\le\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\sin2\varphi}$

$$V=\iint_D\left(\sqrt{xy}-(x^2+y^2)\right)dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{\sin2\varphi}{2}}}\rho\left(\sqrt{\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}-\rho^2\right)d\rho=\cdots=\frac{\pi}{192}$$

Зад. 7. Нађи површину и запремину тела ограниченог са $\Gamma_1: x^2+y^2=4-z$ и $\Gamma_2: z+2=\sqrt{x^2+y^2}$

Решење:



$z+2=\sqrt{4-z}$, $\quad 4-z\ge 0$

$z^2+4z+\cancel{4}=\cancel{4}-z$

$z^2+5z=0 \Rightarrow z=0$, $z=-5$

D: $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\rho\le2$

$$V=\iint_D\left(4-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}+2\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(6-\rho^2-\rho)\rho\,d\rho=\frac{32\pi}{3}$$

$$P=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy+\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\sqrt2\,d\rho=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)+4\sqrt2\,\pi$$

вежба бр. 15

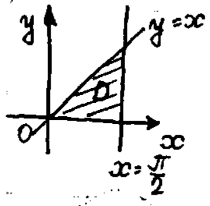
20. 12. 2007.

Вежбање из практикума за тест

Зад. 1. Израчунати следеће двојне интеграле ако је дата област интеграције D.

6.2.7. $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, D ограничена линијама $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=y$

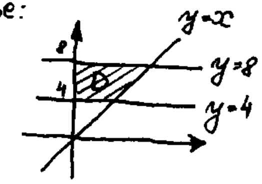
Решење:



$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} dx\int_0^x \cos(x+y)\,dy = \int_0^{\pi/2} dx\,\sin(x+y)\Big|_0^x$$
$$= \int_0^{\pi/2}[\sin 2x-\sin x]\,dx = \left(-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0 = -\frac{1}{2}(-1-1)+0-1=0$$

6.2.16. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D ограничена линијама $y=4$, $y=8$, $y=x$, $x=2y$

Решење:

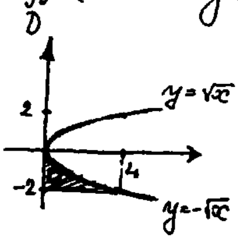


$$\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_4^8 dy\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx = \int_4^8 y^2dy\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_0^y$$
$$= \int_4^8 y^2dy(\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\,0) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_4^8 = \frac{\pi}{12}(8^3-4^3) = \frac{112\pi}{3}$$

2. начин $\iint\limits_D \frac{y^3dxdy}{x^2+y^2} = \int_0^4 dx\int_4^8 \frac{y^3dy}{x^2+y^2} + \int_0^4 dx\int_x^8 \frac{y^3dy}{x^2+y^2} = \dots$

6.2.23. $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy$, D ограничена линијама $x=0$, $x=y^2$, $y=-2$

Решење:

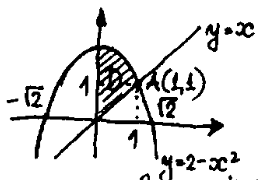


$$\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx\int_{-2}^{-\sqrt{x}} (3x^2-2xy+y)\,dy$$
$$= \int_0^4 dx\left(3x^2y-xy^2+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{-2}^{-\sqrt{x}} = \int_0^4 dx\left[-3x^2\sqrt{x}-x^2+\frac{1}{2}x-(-6x^2-4x+2)\right]$$
$$= \int_0^4\left(-3x^{5/2}+5x^2+\frac{9}{2}x-2\right) = -3\frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{5}{3}x^3+\frac{9}{4}x^2-2x = 5-\frac{1}{21}$$

Зад. 2. Заменити поредак интеграције у следећим двојним интегралима.

6.3S.19. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} f(x,y)\,dy$

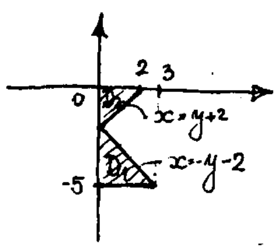
Решење: $y=x$, $y=2-x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2-y}$



$$I = \int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} f(x,y)\,dy = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$$

6.3S.16. $\int_{-5}^0 dy\int_0^{|y+2|} f(x,y)\,dx$

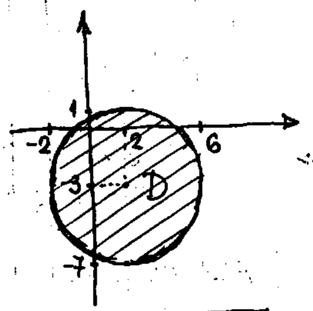
Решење: $x=0$ $x=|y+2|$



$$I = \int_{-5}^0 dy\int_0^{|y+2|} f(x,y)\,dx = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^3 dx\int_{-5}^{-x-2} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx\int_{x-2}^0 f(x,y)\,dy$$

6.3б.29. $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx$

Решење:



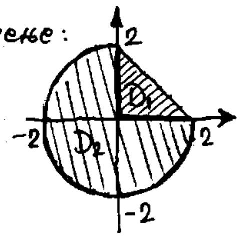
$$x = 2 \pm \sqrt{7-6y-y^2}$$
$$(x-2) = \pm\sqrt{7-6y-y^2} \;\Big/^2$$
$$(x-2)^2 = 7-6y-y^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 16 \text{ – кружница}$$
$$\Downarrow$$
$$y+3 = \pm\sqrt{16-(x-2)^2}$$
$$y = -3 \pm \sqrt{12-x^2+4x}$$

$$\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12-x^2+4x}}^{-3+\sqrt{12-x^2+4x}} f(x,y)\,dy$$

3.4.3. Параметризовати области D у Декартовој равни уводећи поларне координате $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$

6.4а.4. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4 \ \wedge\ x+y-2 \le 0\}$

Решење:



$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

$$x^2+y^2 = 4 \qquad\qquad x+y-2=0$$
$$\rho^2 = 2 \qquad\qquad \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi - 2 = 0$$
$$\rho = 2 \qquad\qquad \rho = \frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}$$

$D = D_1 \cup D_2$

$D_1:\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $\ 0 \le \rho \le \frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}$

$D_2:\ \pi/2 \le \varphi \le 2\pi$, $\ 0 \le \rho \le 2$

6.4а.19. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1 \ \wedge\ y-1 \le x \le 1-y\}$

Решење:

$$x = 1-y \qquad\qquad x = y-1$$
$$\rho\cos\varphi = 1-\rho\sin\varphi \qquad\qquad \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi - 1$$
$$\rho = \frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi} \qquad\qquad \rho = \frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}$$

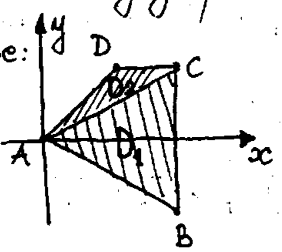
$D = D_1 \cup D_2$

$D_1:\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$

$D_2:\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, $\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}$

6.4а.28. D: унутрашност четвороугла ABCD, $A(0,0)$, $B(\sqrt{3},-1)$, $C(\sqrt{3},1)$, $D(1,1)$

Решење:



AC: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$
$$\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

AB: $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$
$$\varphi = -\frac{\pi}{6}$$

AD: $y = x$
$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

BC: $x = \sqrt{3}$
$$\rho\cos\varphi = \sqrt{3}$$
$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}$$

DC: $y = 1$
$$\rho\sin\varphi = 1$$
$$\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

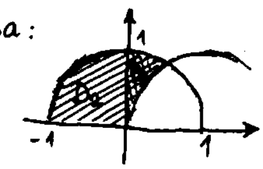
$D = D_1 \cup D_2$

$D_1:\ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, $\ 0 \le \rho \le \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}$

$D_2:\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $\ 0 \le \rho \le \frac{1}{\sin\varphi}$

17. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1 \;\wedge\; x^2+y^2\ge 2x \;\wedge\; y\ge 0\}$

Решење:



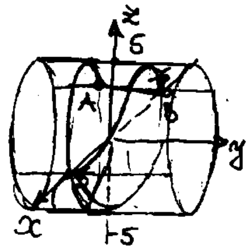
$D = D_1 \cup D_2$

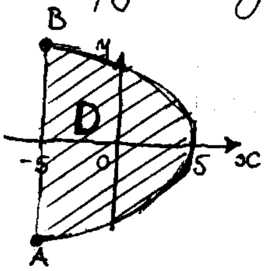
$D_1:\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 2\cos\varphi\le\rho\le 1$ $\qquad D_2:\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\rho\le 1$

Зад. 4. Израчунати површину, односно запремину тела

6.5б.21. $\Gamma: x^2+z^2=25 \quad [y^2=25-5x]$

Решење: $x^2+z^2=25$ – кружни цилиндар паралелан y-оси





$$\left.\begin{matrix} y^2=25-5x\\ x=-5\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix} y^2=50\\ y=5\sqrt2\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix} A(-5,-5\sqrt2)\\ B(-5,5\sqrt2)\end{matrix}$$

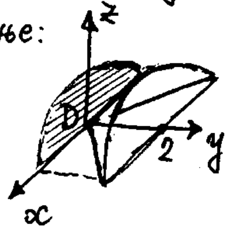
$\Gamma: z=\pm\sqrt{25-x^2}$; $z=\sqrt{25-x^2}$ – горњи део цилиндра

$$p=z'_x=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\qquad q=z'_y=0$$

$$P=2\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=2\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx\,dy=2\iint_D\frac{5\,dx\,dy}{\sqrt{25-x^2}}$$
$$=10\int_{-5}^{5}dx\int_{-\sqrt{25-5x}}^{\sqrt{25-5x}}\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dy=10\int_{-5}^{5}\frac{dx}{\cancel{\sqrt{25-x^2}}}\cdot2\cdot\cancel{\sqrt{25-x^2}}=20\int_{-5}^{5}dx=20\cdot10=200$$

6.5б.29. $\Gamma: y=\sqrt{x^2+z^2}\quad [z\ge0,\ y\le2]$

Решење:

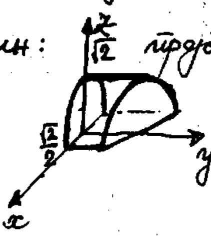


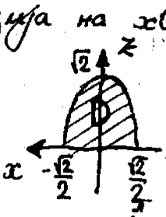
$$p=y'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\qquad q=y'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$P=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dz=\iint_D\sqrt2\,dx\,dz=\sqrt2\iint_D\rho\,d\rho\,d\varphi$$
$$=\sqrt2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2}\rho\,d\rho=\frac{\sqrt2}{2}\cdot4\pi=2\sqrt2\,\pi$$

6.6б.13. $4x^2+z^2=2,\ y=0,\ z\ge0,\ x+y=\sqrt2$

Решење: I начин: пројекција на xOz

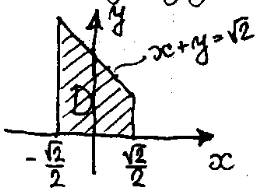




$$\left.\begin{matrix} x=\frac{\sqrt2}{2}\rho\cos\varphi\\ y=\sqrt2\rho\sin\varphi\end{matrix}\right\}\ J=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\cos\varphi & -\frac{\sqrt2}{2}\rho\sin\varphi\\ \sqrt2\sin\varphi & \sqrt2\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$$

$$V=\iint_D(\sqrt2-x)\,dx\,dz=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{1}\left(\sqrt2-\frac{\sqrt2}{2}\rho\cos\varphi\right)\rho\,d\rho$$
$$=\int_0^{\pi}d\varphi\,\sqrt2\left(\frac12\rho^2-\frac16\rho^3\cos\varphi\right)\Big|_0^1=\sqrt2\int_0^{\pi}\left(\frac12-\frac16\cos\varphi\right)d\varphi=\sqrt2\cdot\frac12\pi$$

II начин: пројекција на xOy



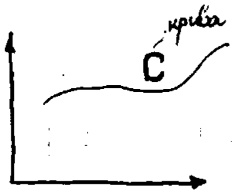
$$V=\iint_D\sqrt{2-4x^2}\,dx\,dy=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_0^{\sqrt2-x}\sqrt{2-4x^2}\,dy$$
$$=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\,\sqrt{2-4x^2}\,(\sqrt2-x)=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\,\sqrt2\sqrt{2-4x^2}+\underbrace{\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}-x\sqrt{2-4x^2}\,dx}_{0}$$

НЕПАР. · ПАР = НЕПАР

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}2\sqrt{1-2x^2}\,dx=[\sqrt2x=\cos t]=\frac{4}{\sqrt2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2t}{2}\,dt=\frac{\pi}{\sqrt2}$$

вежба бр.16 21.12.2007.

Криволинијски интеграл 1. врсте



$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\underbrace{\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt}_{ds}$$

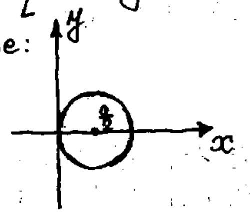
$C:\ x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[t_1,t_2]$

$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$

$\oint_C$ - ако је C затворена

Зад. 1. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ $\quad L: x^2+y^2=ax,\ a>0$

Решење:



$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

$x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t$ $\quad t\in[0,2\pi]$

$y=\frac{a}{2}\sin t$

$$\left.\begin{aligned} x_t'&=-\frac{a}{2}\sin t\\ y_t'&=\frac{a}{2}\cos t\end{aligned}\right\}\Rightarrow ds=\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2t+\cos^2t)}\,dt=\frac{a}{2}dt$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\tfrac{a}{2})^2((1+\cos^2t)+\sin^2t)}=\frac{a}{2}\sqrt{2+2\cos t}=\frac{a}{2}\sqrt{2(1+\cos t)}=\frac{a}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}=a\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

$t\in[-\pi,\pi]\Rightarrow\cos\frac{t}{2}\geq 0$

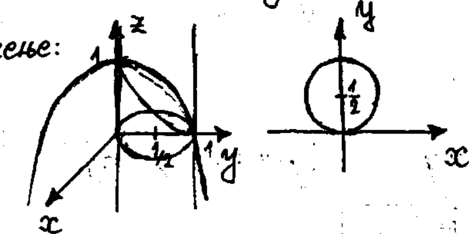
$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\pi}^{\pi}a\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{a}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt=2a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=2a^2$$

Примена: z_1, z_2 - површи

$\int_C(z_1-z_2)\,ds$ - део површи над C између z_1 и z_2

Зад. 2. Израчунати површину дела цилиндра $x^2+y^2=y$ ограниченог површима $z=0$ и $z=1-x^2-y^2$

Решење:



$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t \Rightarrow y_t'=\frac{1}{2}\cos t$

$x=\frac{1}{2}\cos t \Rightarrow x_t'=-\frac{1}{2}\sin t$

$t\in[0,2\pi]$ $\quad ds=\sqrt{\frac{1}{4}(\sin^2t+\cos^2t)}dt=\frac{1}{2}dt$

$z=1-(x^2+y^2)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin t=\frac{1}{2}(1-\sin t)$

$$\int_C z_1\,ds=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\sin t)\,dt=\frac{1}{4}(t+\cos t)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4}(2\pi+0)=\frac{\pi}{2}$$

Криволинијски интеграл 2. врсте

$$\int_C P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(P(x(t),y(t),z(t))x_t'+Q(x(t),y(t),z(t))y_t'+R(x(t),y(t),z(t))z_t'\Big)\,dt$$

$C:\ x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[t_1,t_2]$

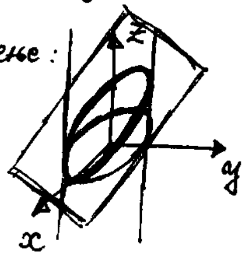
$dx=x'_t\,dt,\quad dy=y'_t\,dt,\quad dz=z'_t\,dt$

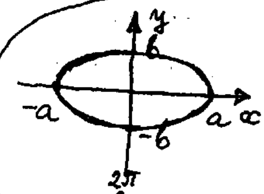
$C\to$ затворена крива $\Rightarrow \oint\limits_C$

○ - позитиван смер $\qquad I=\pm\int\limits_C$

Зад. 1. Израчунати $\int (x-y)dx+(x-z)dy+(y-z)dz$, а крива C је пресек $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $x+z=a$, $a>0$.

Решење:





$x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=a-x=a-\cos t$, $t\in[0,2\pi]$

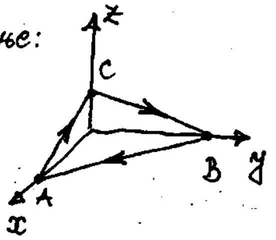
$dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$, $dz=a\sin t\,dt$

$$=\int_0^{2\pi}(a\cos t-b\sin t)(-a\sin t)dt+(2a\cos t-a)b\cos t\,dt+(b\sin t-a+a\cos t)a\sin t\,dt$$

$$=\cdots=4ab\pi$$

Зад. 2. Израчунати интеграл $\oint (z+2y)dx+(x-z)dy+(x+z)dz$. C је контура ΔABC, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ који је оријентисан позитивно из тачке $(0,0,0)$.

Решење:



$$\int\limits_C\cdots=\int\limits_{\vec{AC}}\cdots+\int\limits_{\vec{CB}}\cdots+\int\limits_{\vec{BA}}\cdots$$

$AC:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}=t \qquad \vec{AC}=(-2,0,1)$

$x=2-2t$, $y=0$, $z=t$ $\qquad t\in[0,1]$ $\quad (0\to A,\ 1\to C)$

$\vec{CB}=(0,3,-1)$

$CB:\ \frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-1}{-1}=t \qquad x=0,\ y=3t,\ z=-t+1,\ t\in[0,1]$

$\vec{BA}=(2,-3,0)$

$BA:\ \frac{x-0}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-0}{0}=t \qquad x=2t,\ y=-3t+3,\ z=0,\ t=[0,1]$

$$\int\limits_C\cdots=\int_0^1(1+2\cdot0)(-2dt)+(-2t+2t-t)\cdot0+(-2t+2+0)dt+\int\limits_{\vec{CB}}\cdots+\int\limits_{\vec{BA}}\cdots=0-3+3=0$$

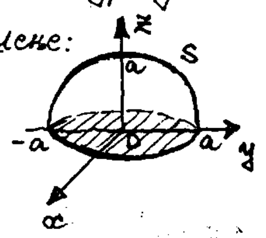
Површински интеграл 1. врсте

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \qquad (p=z'_x,\ q=z'_y)$$

специјално $P(S)=\iint\limits_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \qquad ds=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$, $D\subset xOy$

Зад. 1. Израчунати интеграл $\iint\limits_S (x+y+z)ds$. $S=x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>0$, $a>0$

Решење:



$D:\ x^2+y^2\le a^2$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $\quad z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$1+z_x'^2+z_y'^2=\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+a^2-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{a^2-x^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

$$ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy\Rightarrow\iint\limits_S(x+y+z)ds=\iint\limits_D\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy$$

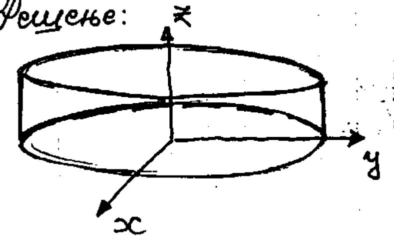
$$I=a\underbrace{\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy}_{0}+a\underbrace{\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy}_{0}+a\iint\limits_D dx\,dy=aP(D)=a^2\pi\cdot a=a^3\pi$$

непар. по x, а D сим. по x $\qquad$ непар. по y, а D сим. по y

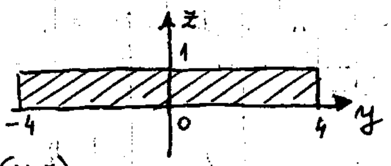
$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ $\qquad \varphi\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,a]$

Зад. 2. $I=\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, S - део цилиндра $x^2+y^2=16$ ограничен равнима $z=0, z=1$

Решење:



yOz



$x=x(y,z)$

$p=x_y$, $q=x_z$

$S_1: x_1=\sqrt{16-y^2}$

$p=x_y=\frac{-y}{\sqrt{16-y^2}}$

$q=x_z=0$

$ds_1=\sqrt{\frac{y^2}{16-y^2}+1}\,dy\,dz=\frac{4}{\sqrt{16-y^2}}dy\,dz$

$S_2: x_2=-\sqrt{16-y^2}$

$p=\frac{y}{\sqrt{16-y^2}}$

$q=0$

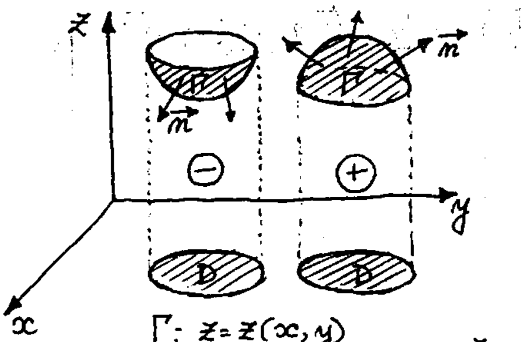
$ds_1=ds_2$

$$I=\iint\limits_{S_1}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\iint\limits_{S_2}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_D\frac{ds_1}{4+z^2}+\iint\limits_D\frac{ds_2}{4+z^2}$$

$$=2\iint\limits_D\frac{4\,dy\,dz}{\sqrt{16-y^2}(4+z^2)}=2\cdot4\int_{-4}^{4}\frac{dy}{\sqrt{16-y^2}}\int_0^1\frac{dz}{4+z^2}=4\pi\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$$

вежба бр. 17 — 26. 12. 2007.

Површински интеграл 2. врсте. Интегралне формуле



$\Gamma: z=z(x,y)$

$\vec{m}=(-p,-q,+1)$ $\quad p=z_x$, $q=z_y$

$$\iint\limits_\Gamma P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\pm\iint\limits_D(P,Q,R)\cdot(-p,-q,1)\,dx\,dy$$

$P=P(x,y,z)$

$Q=Q(x,y,z)$

$R=R(x,y,z)$

Знак „+" ако вектор нормале гради оштар угао са позитивним смером осе Oz, знак „-" ако гради туп угао.

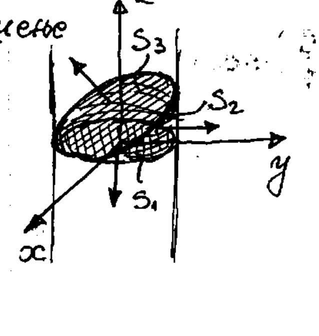
Веза са површинским интегралом 1. врсте

$$\iint\limits_\Gamma P\,dx\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds$$

где су углови α,β и γ углови које вектор нормале гради са координатним осама; $ds=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$

1. Израчунати површински интеграл 2. врсте површи $\iint z^2\,dx\,dy$ где је S спољна страна површи која ограничава тело ограничено површинама $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x+z=a$, $z=0$, $a>0$

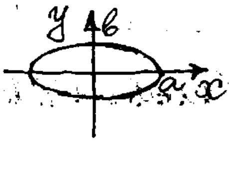
Решење



$$\iint\limits_S=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}+\iint\limits_{S_3}$$

$$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{S_1}0^2\,dx\,dy=0$$

$$\iint\limits_{S_2}z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{S_2}z^2\cos\gamma\,ds=0$$



$z=a-x$

$p=-1$

$q=0$

$\vec{m}=(1,0,1)$

$$\iint\limits_{S_3}z^2\,dx\,dy=+\iint\limits_D(0,0,z^2)\cdot(1,0,1)\,dx\,dy=\iint\limits_D z^2\,dx\,dy=\iint\limits_D(a-x)^2\,dx\,dy=*$$

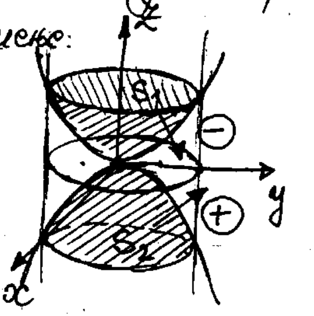
Лема: Нека је област интеграције D симетрична у односу на координатни почетак и нека је подинтегрална ф-ја непарна по x или y. Тада је $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

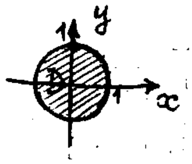
$$* = \iint_D a^2\,dx\,dy - 2a\underbrace{\iint_D x\,dx\,dy}_{0} + \iint_D x^2\,dx\,dy \qquad x = a\rho\cos\varphi$$

$$= a^2 \underbrace{P(D)}_{a\cdot b\cdot\pi} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho\cdot a^2\rho^2\cos^2\varphi\,d\rho = \frac{5a^3 b\pi}{4} \qquad y = b\rho\sin\varphi$$

Зад. 2. Површински интеграл $\iint xz\,dy\,dz + yz\,dx\,dz + y^2z^2\,dx\,dy$ где је S спољни део површи $|z| = x^2+y^2$ коју одсеца цилиндар $x^2+y^2=1$.

Решење:





$$I = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$$

S_1: $p = 2x$, $q = 2y$, $\vec{n} = (-2x, -2y, 1)$ $\qquad$ S_2: $p = -2x$, $q = -2y$, $\vec{n} = (2x, 2y, 1)$

$$\iint_{S_1} = -\iint_D (xz_1, yz_1, y^2z_1^2)\cdot(-2x,-2y,1)\,dx\,dy$$

$$= -\iint_D (-2x^2z_1 - 2y^2z_1 + y^2z_1^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(2(x^2+y^2)z_1 - y^2z_1^2\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(2(x^2+y^2)^2 - y^2(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy = \iint_D (2-y^2)(x^2+y^2)^2\,dx\,dy$$

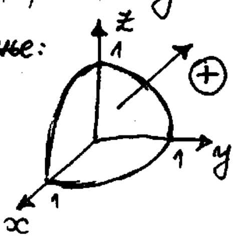
$$\iint_{S_2} = +\iint_D (xz_2, yz_2, y^2z_2^2)\cdot(2x, 2y, 1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(-2(x^2+y^2)^2 + y^2(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D (y^2-2)(x^2+y^2)^2\,dx\,dy = -\iint_{S_1} \Rightarrow I = 0$$

Зад. 3. $\iint (x^2+y^2+zy)\,dy\,dz + (2xy+xz)\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, где је S спољни део сфере $x^2+y^2+z^2=1$ у 1. октанту.

Решење:



S_1: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$I = \iint_D (x^2+y^2+yz,\ 2xy+xz,\ xy)\cdot\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)dx\,dy$$

$$= \frac{5\pi}{16} + \frac{3}{8}$$

Формула Гаус-Остроградског

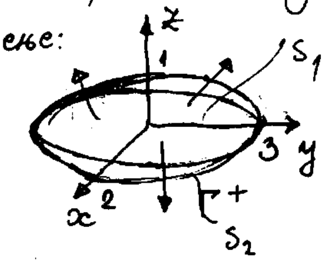
Нека је Γ затворена површ која ограничава тело T и нека су ф-је P, Q, R непрекидне и диференцијабилне на T. Тада важи

$$\iint_{\Gamma^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Γ^+ – спољна страна

Зад. 1. Израчунати интеграл $\iint\limits_{\Gamma} x^2dydz + zdzdx + (y-2xz)dxdy$, где је Γ површ елипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$.

Решење:



$$I \overset{(GO)}{=} \iiint\limits_T (2x+0-2x)\,dxdydz = 0$$

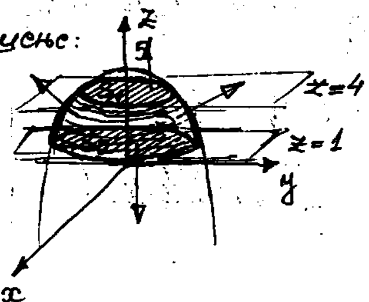
2. начин: директно

$$S_1: z = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$$

$$S_2: z = -\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$$

Зад. 2. $\iint (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$, где је S спољна страна површи $S: z=5-(x^2+y^2)$, $1 \le z \le 4$.

Решење:



Не можемо применити формулу јер није затворена површ. Због тога затварамо површ S „поклопцима" S_1 и S_2 оријентисаним као на слици.

$$\iint\limits_S = \iint\limits_{S\cup S_1\cup S_2} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2}$$

$$\iint\limits_{S\cup S_1\cup S_2} \overset{GO}{=} \iiint\limits_T (1+1+1)\,dxdydz = 3\iiint\limits_T dxdydz = 3V(T) = \dots\dots = 45\frac{\pi}{2}$$

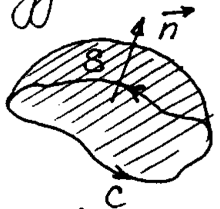
$$S_1: z=4 \to dz=0 \Rightarrow \iint\limits_{S_1} = \iint\limits_{S_1}(4+x)dxdy = 4P(D_1) + \underbrace{\iint\limits_{D_1} x\,dxdy}_{0} = 4\pi$$

$$S_2: z=1 \to dz=0 \Rightarrow \iint\limits_{S_2} = -\iint\limits_{S_2}(1+x)dxdy = -P(D_2) - \underbrace{\iint\limits_{D_2} x\,dxdy}_{0} = -4\pi$$

$$\iint\limits_S = \frac{45\pi}{2} - 4\pi + 4\pi = \frac{45\pi}{2}$$

Стоксова формула

Нека је C затворена крива која ограничава површ S и нека су ф-је P, Q и R непрекидно диференцијабилне на S и нека су оријентације криве C и површи S сагласне (да површ када идемо у смеру криве увек буде с леве стране).

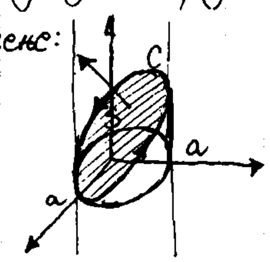


$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Зад. 1. $\oint (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \qquad C: \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \end{cases}, a,h>0$

где је C оријентисана позитивно гледано из тачке $A(a,0,0)$

Решење:



$$S: z=h\left(1-\frac{x}{a}\right) \qquad p=-\frac{h}{a} \qquad q=0 \qquad \vec{n}=\left(\frac{h}{a},0,1\right)$$

$$I = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \iint\limits_S -2dydz - 2dzdx - 2dxdy$$

$$= \iint\limits_D (-2,-2,-2)\left(\frac{h}{a},0,1\right)dxdy$$

$$= \left(-\frac{2h}{a}-2\right)\iint\limits_D dxdy = -2\left(\frac{h}{a}+1\right)a^2\pi = -2a\pi(h+a)$$

2. начин: $x = a\cos t$

$y = a\sin t$

$z = h\cdot(1-\cos t)$

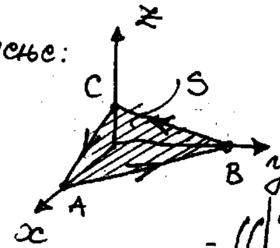
$-\pi \le t \le \pi$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left[(a\sin t - h(1-\cos t))(-a\sin t) + (h(1-\cos t) - a\cos t)a\cos t + (a\cos t - a\sin t)h\sin t \right] dt$$

$$= \dots = -2a\pi(a+h)$$

2. $\oint (z+2y)dx + (x-z)dy + (x+y)dz$ где је c контура троугла ABC са тачкама $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$

Решење:

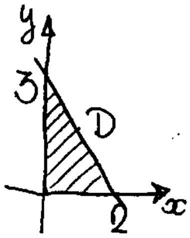


Ако се ништа не каже узимамо позитивну оријентацију.

$S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1 \Rightarrow z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \Rightarrow p = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{3}$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+2y & x-z & x+y \end{vmatrix} = \iint_S 2dydz - dxdy = \iint_D (2,0,-1)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1\right) dxdy$$

$$= \iint_D (1-1)dxdy = 0$$



2. начин: параметризација (делимо на 3)

1

а) Израчунати P и V тела T ограничeног површима:
S_1: $4-2z=x^2+y^2$; (S_2): $2z=x^2-y^2$ и (S_3) $z=0$.

б) израчунати $\oiint_\Gamma x\,dydz+y\,dxdz+(xy+z)\,dxdy$, где је Γ спољашња страна површи тела T.

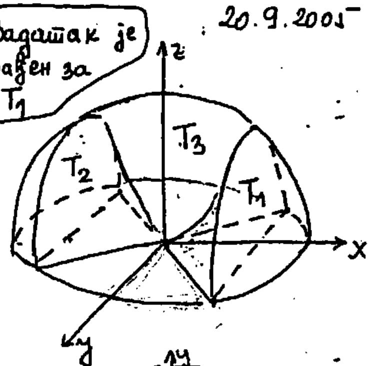
в) израчунати $\oint_C x\,dx+y\,dy+(xy+z)\,dz$ (за криву C погледај слику!) крива C је позитивно орјентисана гледано са позитивног дела x-осе.

20.9.2005

а) $S_1: 4-2z=x^2+y^2$
$S_2: 2z=x^2-y^2$
$S_3: z=0$

$S_1\cap S_2$:
$4-x^2+y^2=x^2+y^2$
$4=2x^2$
$x=\pm\sqrt2$

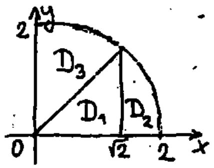
Задатак је урађен за T_1



Постоје три тела; T_1 и T_2 су симетрична

$$V_1=V_2=2\iint_{D_1} z_2\,dxdy+2\iint_{D_2} z_1\,dxdy$$
$$=2\int_0^{\sqrt2}dx\int_0^x\tfrac12(x^2-y^2)\,dy+2\int_{\sqrt2}^2dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\tfrac12(x^2-y^2)\,dy=\boxed{\pi-2}$$

у поларним координатама:
$$V_1=V_2=2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\frac{\sqrt2}{\cos\varphi}}\tfrac12\cos2\varphi\cdot\rho\,d\rho+2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{\frac{\sqrt2}{\cos\varphi}}^2\tfrac12\cos2\varphi\,\rho\,d\rho=\underline{\pi-2}$$



$x=\rho\cos\varphi$
$y=\rho\sin\varphi$, $J=\rho$

$P=P_1+P_2+P_3$ — парабол.
база хиперб.

$P_1= \ : 2[P(D_1)+P(D_2)]=\frac14\pi\cdot2^2=\pi$

$P_2=2\iint_{D_1}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=2\iint_{D_1}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=$
$P_3=2\iint_{D_2}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=2\iint_{D_2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=$

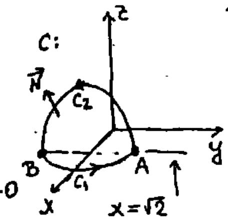
$$P_2+P_3=2\iint_{D_1\cup D_2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,d\rho d\varphi=\frac{\pi}{6}(5\sqrt5-1)$$

$\boxed{P=\frac{\pi}{6}\cdot5(\sqrt5+1)}$

б) Пошто је Γ затворена површ (ограничава тело T) можемо применити формулу Гаус-Остроградског:
$$\oiint_\Gamma[x\,dydz+y\,dzdx+(xy+z)\,dxdy]=\iiint_T\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(xy+z)\right)dxdydz=$$
$$=\iiint_T(1+1+1)\,dxdydz=3\,V(T)=3(\pi-2)$$

2

в) Крива C се састоји из две криве: $\int_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}$



C_1: $\widehat{BA}$: $z=0$, $-\pi/4\le t\le\pi/4$
$x=2\cos t$
$y=2\sin t$ $\Rightarrow$ $dx=-2\sin t\,dt$
$dy=2\cos t\,dt$
$dz=0$

$$I_1=\int_{C_1}x\,dx+y\,dy+(xy+z)\,dz=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}2\cos t(-2\sin t\,dt)+2\sin t\cdot2\cos t\,dt+0$$
$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[-2\sin2t)+2\sin2t]\,dt=0$$

$4-x^2+y^2=x^2+y^2$
$x^2=2$

C_2: $\widehat{AB}$: $x=\sqrt2$, $-\sqrt2\le t\le\sqrt2$
$y=t$
$z=\frac12(x^2-y^2)=\frac12(2-t^2)=1-\frac12t^2$
$dx=0$, $dy=dt$, $dz=-t\,dt$

$$I_2=\int_{C_2}\sqrt2\cdot0+t\,dt+(\sqrt2t+1-\tfrac12t^2)(-t\,dt)=\int_{\sqrt2}^{-\sqrt2}(\sqrt2t^2+\tfrac12t^3)\,dt=-\sqrt2\cdot2\int_0^{\sqrt2}t^2dt=\frac{-2\sqrt2}{3}\cdot2\sqrt2=\frac{-8}{3}$$

$\Rightarrow\boxed{I=-\frac83}$

II начин Примено Штоксове формуле:
Узећемо параболоид S_1 на коме се крива C налази и ограничава део Γ_0 параболоида

$$\oint_C x\,dx+y\,dy+(xy+z)\,dz=+\iint_{\Gamma_0^+}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ x&y&xy-z\end{vmatrix}d\sigma=+\iint_{\Gamma_0}[\cos\alpha(x-0)-\cos\beta(y-0)+\cos\gamma(0-0)]$$

$\to$ Γ_0: $z=2-\frac12x^2-\frac12y^2$
$\to$ $\vec N=(+x,+y,1)$

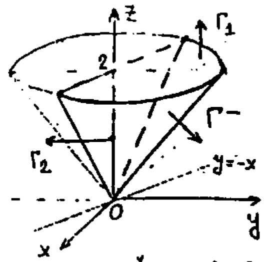
$$=+\iint_{\Gamma_0}(x^2-y^2)\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,d\sigma=\iint_D(x^2-y^2)\,dxdy$$
$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\varphi\int_{\frac{\sqrt2}{\cos\varphi}}^2\rho^2\cos2\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi=\ldots=0$$

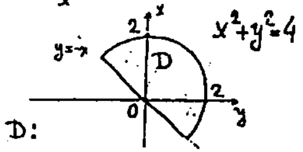
2 Израчунати интеграл:

$$I=\iint_{\Gamma^-}(yz-x)\,dydz+(xz-y)\,dxdz+(xy-z)\,dxdy$$

где је Γ^- спољна страна дела конуса уз услове:
$0\le z\le2$, $x+y\ge0$.

в)





D:

поларне коорд.

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $J=\rho$; D^*: $0\le\rho\le 2$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$

$\Gamma:\ z=\sqrt{x^2+y^2}\quad p=z'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\quad q=z'_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\vec{n}=(-p,-q,+1)=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

$$I=\iint_{\Gamma-}(yz-x)dydz+(xz-y)dxdz+(xy-z)dxdy=$$
$$=-\iint_{\Gamma}\left[(yz-x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+(xz-y)\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(xy-z)\right]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=$$
$$=-\iint_{\Gamma}\left[\frac{-2xyz+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+xy-z\right]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=$$
$$=-\iint_{\Gamma}\left[-2xy+\sqrt{x^2+y^2}+xy-z\right]\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}d\sigma=$$
$$=-\iint_{D}-xy\cdot dxdy=\iint_{D^*}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi=$$
$$=\int_0^2 d\rho\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi=\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4}=\boxed{0}$$

Да би могли да применимо формулу Гаус–Остроградски морамо да имамо затворену површ: $\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$ ограничавају тело T.

$$\Pi=\oiint_{\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2}(yz-x)dydz+(xz-y)dxdz+(xy-z)dxdy=-3\iiint_T dxdydz=-3\cdot V(T)=-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r^2\cdot H}{3}=$$
$$=-\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2\cdot 2=\boxed{-4\pi=\Pi}$$

$\Gamma_1^+:\ z=2,\ p=z'_x=0,\ q=z'_y=0,$

$\vec{n}_1=(-p,-q,1)=(0,0,1)$

$$\Pi_1=\iint_{\Gamma_1^+}\dots=+\iint_{\Gamma_1}(xy-z)d\sigma=\iint_D(xy-2)\,dxdy=\iint_{D^*}(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi-2)\rho d\rho d\varphi=$$
$$=\int_0^2\rho d\rho\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi-2)\,d\varphi=\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^2\cdot(-2\varphi)\Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-2)\cdot\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-4\pi=\Pi_1}$$

$\Gamma_2^-:\ y=y(x,y)$

$y=-x\quad p=y'_x=-1\quad q=y'_z=0\quad \vec{n}=(-p,1,-q)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=(1,1,0)\frac{1}{\sqrt2}$

$$\Pi_2=\iint_{\Gamma_2^-}\dots=-\iint_{\Gamma_2}(yz-x+xz-y)\frac{1}{\sqrt2}d\sigma=-\iint_{\Gamma_2}(\underbrace{-xz-x+xz+x}_{0})\frac{d\sigma}{\sqrt2}=\boxed{0=\Pi_2}$$

$\Pi=P+\Pi_1+\Pi_2$

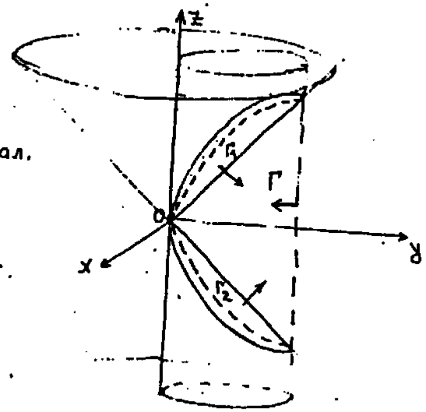
$-4\pi=0-4\pi+0$

$-4\pi=-4\pi$ //

3 Израчунати $\iint_\Gamma zx^2dydz+xz^2dxdz+(y+xz^2)dxdy$ по спољашњој страни дела површи $\Gamma:\ z^2=x^2+y^2$ који из ње исеца површ $2y=x^2+y^2$.

$z^2=x^2+y^2$ конус

$x^2+y^2=2y$, $x^2+(y-1)^2=1$ цилиндар

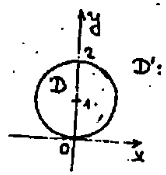


Нека су Γ_1 и Γ_2 делови конуса и Γ део цилиндра. Нека је I дати интеграл.

$$\iint_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}+\iint_\Gamma=\oiint_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma}$$

Користећи формулу Гаус-~~Остро~~градског

$$\oiint_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma}zx^2dydz+xz^2dxdz+(y+xz^2)dxdy=$$
$$=-\iiint_\Omega(2zx+0+2xz)\,dxdydz$$
$$=-\iiint_\Omega 4xz\,dxdydz$$
$$=-\iint_D 4x\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}z\,dz=-\iint_D 4x\frac{1}{2}z^2\Big|_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$$
$$=-\iint_D 2x\left[x^2+y^2-(x^2+y^2)\right]dxdy=\boxed{0}$$



D: $x^2+(y-1)^2=1$

D': $x=\rho\cos\varphi$, $y=1+\rho\sin\varphi$, $J=\rho$, $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\rho\le1$

D*: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho^2=2\rho\sin\varphi$, $\rho=2\sin\varphi$

$$\iint_\Gamma zx^2dydz+xz^2dxdz+(y+xz^2)dxdy=J_1+J_2+J_3$$

$J_3=\iint_\Gamma(y+xz^2)dxdy=0$, јер је $\Gamma\perp xOy$,

$\Gamma':\ x=+\sqrt{2y-y^2}$; $p=\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}$; $q=\frac{\partial x}{\partial z}=0$, $\vec{n}'=(1,-p,-q)=(1,-p,0)$

$\Gamma'':\ x''=-x$, $\vec{n}''=(1,p,0)$

$$\iint_\Gamma\dots=\iint_{\Gamma'-}+\iint_{\Gamma''+}=-\iint_{D_1}(zx^2+xz^2(-p)\quad)dydz+\iint_{D_1}(z(-x)^2+(-x)z^2p\ )\,dydz=$$
$$=\iint_{D_1}(-zx^2+pxz^2+zx^2-pxz^2)dydz=\boxed{0}$$

$$I-\iint_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=-\iiint_\Omega 4xz\,dxdz-\iint_\Gamma zx^2dydz+xz^2dxdz+(y+xz^2)dxdy=$$

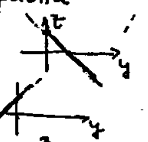
-0

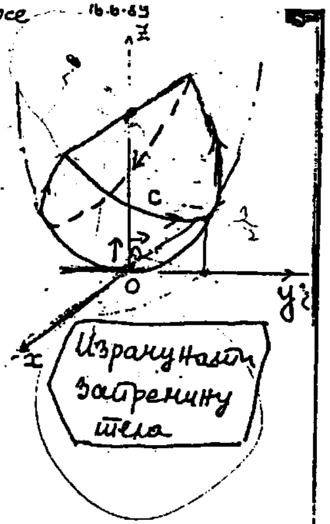
$S_1: z = x^2+y^2$ ротациони параболоид око z-осе — 16.6.89

$S_2: |y| = \frac{3}{4} - z$ две полуравни

3: $y \geq 0$: $y = \frac{3}{4} - z$

3a $y \leq 0$: $y = z - \frac{3}{4}$

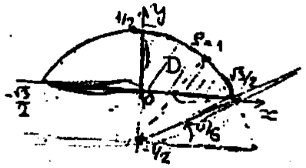




Израчунати запремину тела

за $y \geq 0$: $S_1 \cap S_2$: $z = x^2+y^2 = -y + \frac{3}{4}$

$x^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 1$ део круга



поларне координате

$x = \rho\cos\varphi$

$y + \frac{1}{2} = \rho\sin\varphi$, $|J| = \rho$

$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

D'

x-оса: $y=0$, $\frac{1}{2} = \rho\sin\varphi$, $\rho = \frac{1}{2\sin\varphi}$

Круг: $x^2+y^2 = \frac{3}{4} - y$; $\rho^2 = 1$, $\rho = 1$ $\Big\}$ $\frac{1}{2\sin\varphi} \leq \rho \leq 1$

$$V_1 = \iint_D (z_2 - z_1)\,dx\,dy = \iint_D \left(\frac{3}{4} - y - x^2 - y^2\right) dx\,dy = \iint_D \left(1 - x^2 - (y+\tfrac{1}{2})^2\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{D'} (1-\rho^2)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} (\rho - \rho^3)\, d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \left(\tfrac{1}{2}\rho^2 - \tfrac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8\sin^2\varphi} + \frac{1}{64\sin^4\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{1}{64}\left(-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\cos\varphi}{3\sin^3\varphi}\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{96}\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{192}\cdot\frac{\sqrt{3}/2}{1/8}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{3\sqrt{3}}{32}$$

$V = 4V_1$ $\quad \boxed{V = \frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}}$

парцијално:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi} = I_2 = \int \frac{d(-\cos\varphi)}{\sin^3\varphi} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\sin^3\varphi} & dv = d(-\cos\varphi) \\ du = \frac{-3\cos\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi & v = -\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$I_2 = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - \int -\cos\varphi \frac{-3\cos\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - 3\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - 3\int\frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi$$

$$I_2 = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - 3I_4 + 3I_2$$

$$3I_4 = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} + 2I_2 = -\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} + 2(-\operatorname{ctg}\varphi)$$

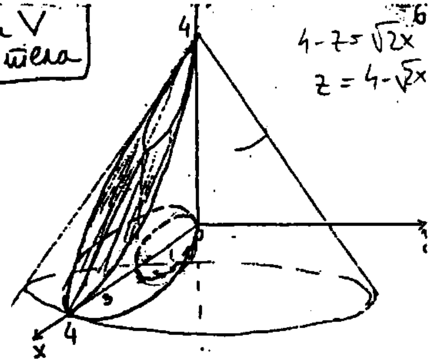
15 $S_1: x^2+y^2 = 2x$ $\quad (x-1)^2+y^2 = 1$

$S_2: x^2+y^2 = 4x$ $\quad (x-2)^2+y^2 = 4$

$S_3: 4 - z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad 4 - z = \sqrt{x^2+y^2}$

$S_4: z = 0$ $\quad z = 0$

P и V тела



$4 - z = \sqrt{2x}$

$z = 4 - \sqrt{2x}$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

$$V = \iint_D (4 - \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy =$$

k_1: $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, $\rho = 2\cos\varphi$

k_2: $\rho = 4\cos\varphi$

$$= \iint_{D'} (4-\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

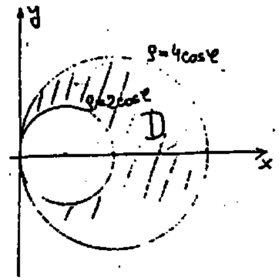
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} (4\rho - \rho^2)\,d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left[2\rho^2 - \tfrac{1}{3}\rho^3\right]\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[2\cdot16\cos^2\varphi - 2\cdot4\cos^2\varphi - \tfrac{1}{3}64\cos^3\varphi + \tfrac{1}{3}8\cos^3\varphi\right] d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[24\cos^2\varphi - \frac{56}{3}\cos^3\varphi\right] d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[12(1+\cos2\varphi) - \frac{56}{3}\underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi\right] d\varphi =$$

$$= 12\cdot\left[\varphi + \frac{\sin2\varphi}{2}\right] - \frac{56}{3}\left(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 12\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{56}{3}\left(2 - \frac{1}{3}\cdot2\right) = 12\pi - \frac{56}{3}\cdot\frac{4}{3}$$



$\boxed{V = 12\pi - \frac{224}{9}}$

$P_1 = P(D) = \pi(4-1) = 3\pi$

P_2: S_3: $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$

$$P_2 = \iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\cdot P_1 = 3\sqrt{2}\pi$$

$-\sin\varphi + \cos\varphi$

$$P_3 = \oint_{k_1} (4 - \sqrt{x^2+y^2})\,dL = 2\int_0^2 (4 - \sqrt{x^2 + 2x - x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx = 2\int_0^2 \frac{4-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-x^2}}dx =$$

$y = \sqrt{2x-x^2}$ $\quad (x-1)^2 + y^2 = 1$ $\quad x - 1 = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$

$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2}{2x-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

$$= 2\int_0^2 \left[\frac{4}{\sqrt{1-(1-x)^2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}\right] dx =$$

$$= 2\left[4\arcsin(1-x) - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x}\cdot(-2)\right]\Big|_0^2 = -8\left(\arcsin(-1) - \arcsin 1\right) + 4\sqrt{2}(0 - \sqrt{2}) =$$

$$= -8\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - 8 = 8(\pi - 1)$$

$$P_4 = \oint_{k_2} (4 - \sqrt{x^2+y^2})\,dL = 2\int_0^4 (4 - \sqrt{x^2 + 4x - x^2})\cdot\frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = 2\int_0^4 \frac{4 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-x^2}}dx =$$

$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{4x - x^2 + 4 - 4x + x^2}{4x-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

$$= 2\int_0^4 \left[\frac{4}{\sqrt{4-(2-x)^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-x}}\right] dx =$$

$$= 2\int_0^4 \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{4-x}}\right] dx = 2\left[2\arcsin\frac{2-x}{2}\cdot(-2) - 2\sqrt{4-x}\cdot(-2)\right]\Big|_0^4 = -8\left(\arcsin(-1) - \arcsin 1\right) + 8(0-2) =$$

$$= -8\left(-\pi/2 - \pi/2\right) - 16 = 8(\pi - 2)$$

$$P = 3\pi + 3\sqrt{2}\pi + 8(\pi-1) + 8(\pi-2) = \boxed{19\pi + 3\sqrt{2}\pi - 24 = R}$$

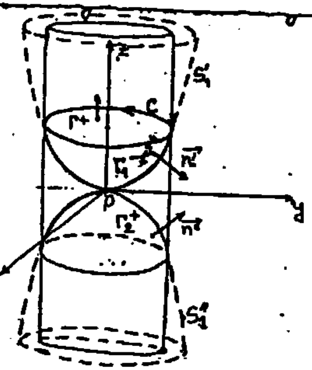
b) Израчунати $\iint_\Gamma (y^2-z^2)\,dydz+(z^2-x^2)\,dxdz+(x^2-y^2)\,dxdy$ где је Γ део површи $S_1: |z|=x^2+y^2$ који исеца површ $S_2: x^2+y^2=1$ у смеру нормале на површ S_1 оријентисане од z-осе.

c) Израчунати $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$ где је C пресечна крива S_1 и S_2 за $z>0$ оријентисана негативно гледано из координатног почетка.

[B] $S_1: |z|=x^2+y^2$

$S_1=S_1'\cup S_1''$, $S_1': z=x^2+y^2$, $S_1'': z=-x^2-y^2$ — obrtni paraboloidi, z-osa rotacije

$S_2: x^2+y^2=1$ cilindar, izvodnice ∥ z-osi

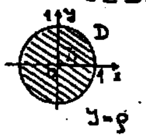


$\Gamma_1^-: z=x^2+y^2$ $\qquad \vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(p,q,-1)$

$p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$

$q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$ $\qquad \vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,2y,-1)$

$d\sigma=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$



$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\rho\le1$ $\Big\}D'$, $J=\rho$

Protok: $I=I_1+I_2$

$$I_1=\iint_{\Gamma_1^-}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=$$

$$=\iint_{\Gamma_1^-}\left[(y^2-z^2)\cdot2x+(z^2-x^2)\cdot2y+(x^2-y^2)\cdot(-1)\right]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$=\iint_{\Gamma_1^-}\left[2xy^2-2x^2y+2z^2(y-x)+(y^2-x^2)\right]\frac{d\sigma}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}=$$

$$=\iint_D\left[2xy^2-2x^2y+2(x^2+y^2)^2(y-x)+(y^2-x^2)\right]dxdy=$$

$$=\iint_{D'}\left[2\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi-2\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi+2\rho^4\cdot\rho(\sin\varphi-\cos\varphi)+\rho^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)\right]\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$=\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}\left[2\rho^3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi-2\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi+2\rho^5\sin\varphi-2\rho^5\cos\varphi+\rho^2\cdot\cos2\varphi\right]\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^1\rho\,d\rho\left[2\rho^3\frac{\sin^3\varphi}{3}+2\rho^3\frac{\cos^3\varphi}{3}-2\rho^5\cos\varphi-2\rho^5\sin\varphi+\rho^2\frac{\sin2\varphi}{2}\right]\Big|_0^{2\pi}=\int_0^1\rho\,d\rho\cdot0=0$$

$\Gamma_2^+: z=-x^2-y^2$, $p=-2x$, $q=-2y$ $\qquad \vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p,-q,1)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,2y,1)$

$I_2=\iint_{\Gamma_2^+}(\vec{A}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\ldots=0$ Ovaj integral se razlikuje od prethodnog samo u znaku zadnjeg sabirka podintegralne funkcije.

$I=I_1+I_2=0$ $\qquad\boxed{\text{Protok } I=0}$

[C] Presečna kriva $C: z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$. to je krug u ravni $z=1$.

Cirkulacija $\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz=I$

Možemo da iskoristimo Stoksovu formulu, za površ Γ uzećemo deo ravni $z=1$.

$$I=\iint_{\Gamma^+}\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y^2-z^2&z^2-x^2&x^2-y^2\end{vmatrix}d\sigma=\iint_{\Gamma^+}\left[(-2y-2z)\cos\alpha+(-2z-2x)\cos\beta+(-2x-2y)\cos\gamma\right]d\sigma=$$

$\Gamma^+: z=1$, $p=q=0$, $\vec{n}=(0,0,1)$, $\cos\alpha=\cos\beta=0$

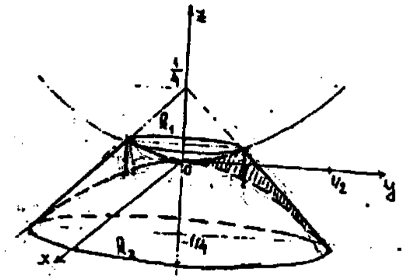
$$=\iint_{\Gamma^+}(-2x-2y)\cos\gamma\,d\sigma=\iint_D(-2x-2y)\,dxdy=$$

$$=-2\iint_{D'}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=-2\int_0^1\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi=0$$

$\boxed{\text{Cirkulacija } I=0}$

[D] $|z|\le x^2+y^2$ Spoljašnjost oba paraboloida

$\frac14-z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ polukonus ($z\le\frac14$) unutrašnjost



$S_1: z=x^2+y^2$

$S_2: z=-x^2-y^2$ $\qquad S_3: \frac14-z=\sqrt{x^2+y^2}$

$k_1=S_1\cap S_3$ $\quad \frac14-z=\sqrt{z}$

$z+\sqrt{z}-\frac14=0$

$(\sqrt{z})_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+1}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt2}{2}$

$\sqrt{z}\ge0 \Rightarrow \sqrt{z}=\dfrac{\sqrt2-1}{2}$

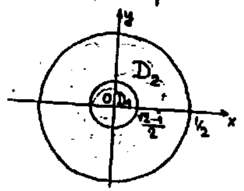
$k_1:\begin{cases}x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt2-1}{2}\right)^2\\ z=\frac{3-2\sqrt2}{4}\end{cases}$

$k_2=S_2\cap S_3$ $\quad \frac14-(-x^2-y^2)=\sqrt{x^2+y^2}$

$(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}+\frac14=0$

$(\sqrt{x^2+y^2})_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-1}}{2}=\dfrac12$

$k_2:\begin{cases}x^2+y^2=\left(\frac12\right)^2\\ z=-\frac14\end{cases}$



$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $J=\rho$

D_1': $0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\rho\le\frac{\sqrt2-1}{2}=A$

D_2': $0\le\varphi\le2\pi$, $\frac{\sqrt2-1}{2}\le\rho\le\frac12$

$$V=\iint_{D_1}(z_1-z_2)\,dxdy+\iint_{D_2}(z_3-z_2)\,dxdy=$$

$$=\iint_{D_1}\left[x^2+y^2-(-x^2-y^2)\right]dxdy+\iint_{D_2}\left[\tfrac14-\sqrt{x^2+y^2}-(-x^2-y^2)\right]dxdy=$$

$$=\iint_{D_1'}\left[\rho^2+\rho^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi+\iint_{D_2'}\left[\tfrac14-\rho+\rho^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^A2\rho^3d\rho+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_A^{1/2}\left(\tfrac14\rho-\rho^2+\rho^3\right)d\rho=2\pi\left(\tfrac12\rho^4\right)\Big|_0^A+2\pi\left(\tfrac18\rho^2-\tfrac13\rho^3+\tfrac14\rho^4\right)\Big|_A^{1/2}=$$

$$=\pi A^4+2\pi\left(\tfrac18\cdot\tfrac14-\tfrac13\cdot\tfrac18+\tfrac14\cdot\tfrac1{16}-\tfrac18A^2+\tfrac13A^3-\tfrac14A^4\right)=\tfrac1{96}\pi+\left(\tfrac12A^4+\tfrac23A^3-\tfrac14A^2\right)\pi$$

$$\boxed{V=\left(\frac{\sqrt2}{6}-\frac{11}{48}\right)\pi}$$