

1

# **OTPORNOST MATERIJALA**

## **Teorija I Zadaci**

**2004**



# **ANALIZA NAPONA**



## 1.1 ТОЈАМ „DESCARTES“-ОВОГ ТЕНЗОРА, РЕД ТЕНЗОРА

СКАЛАР ЈЕ ТЕНЗОР НУЛТОГ РЕДА (ТСП, ПАСА, ВРЕМЕ) - ЈЕДАН ПОДАТАК

ВЕКТОР ЈЕ ТЕНЗОР ПРВОГ РЕДА (СИЛА, БРЗИНА) - ТРИ КОМПОНЕНТЕ

DESCARTES-ОВ ТЕНЗОР ЈЕ ТЕНЗОР ДРУГОГ РЕДА - ДЕВЕТ ПОДАТАКА  
(У DESCARTES-ОВОМ КООРД. СИСТЕМУ) (НАПОНИ, ПОМЕНТИ ИМПЕРЦИЈЕ)

АКО ЈЕ  $r$  РЕД ТЕНЗОРА, ОНДА ЈЕ БРОЈ НЕГОВИХ КОМПОНЕНАТА  $3^r$  У 3D ПРОСТОРУ.

## 1.2 ИНДЕКСНА НОТАЦИЈА. КОНВЕНЦИЈА О САБИРАЊУ

- СЛОБОДАН ИНДЕКС - индекс који се појављује једанпут у неком члану  $i$ -не мора се појавити једанпут и у осталим члановима те  $j$ -не

- ПОВЉЕНИ (ПРИВИДНИ) ИНДЕКС - индекс који се појављује два пута у једном члану  
Подносе се сабирање по том индексу од 1 до 3

пр:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Повљени индекс се субли по извршеном сабирању.

- Исти индекс се не сме поновити више од два пута у једном члану

пр:  $(\sum_{i=1}^3 a_i x_i)^2 = (a_i x_i)(a_j x_j) = a_i a_j x_i x_j$  а не  $a_i a_i x_i x_i$

- Повљени индекс написан великим латиничким словима (пр:  $a_{nn}$ ) не значи сабирање већ само ошти члан са једнаким индексима.

Скалари:  $\rho, t, a_i b_i$  (БЕЗ СЛОБОДНОГ ИНДЕКСА)

Тензор I РЕДА:  $A_i, a_{ij} b_j, F_{ij} j, e_{ijk} x_j x_k$  (ЈЕДАН СЛОБОДАН ИНДЕКС)

Тензор II РЕДА:  $F_{ij}, B_{im} j m, a_{ij} b_{kl} k l, e_{ijk} x_k$

Тензор  $n$ -ТОГ РЕДА: (ИМА И СЛОБОДНИХ ИНДЕКСА)

## 1.3 ОПЕРАЦИЈЕ СА ТЕНЗОРИМА

- САБИРАЊЕ (ОДУЗИМАЊЕ) ТЕНЗОРА. Могу се сабирати/одузимати само тензори истој реда и истој распореда индекса. (сабирањем/одузимањем) тензори  $A_{ij}^k$  и  $B_{ij}^k$  додија се тензор  $C_{ij}^k$  ( $D_{ij}^k$ ) који има исти ред и распоред индекса као  $A_{ij}^k$  и  $B_{ij}^k$ .

$$C_{ij}^k = A_{ij}^k + B_{ij}^k \quad D_{ij}^k = A_{ij}^k - B_{ij}^k$$

- МНОЖЕЊЕ ТЕНЗОРА. Производ два тензора произвољних редова је тензор чије се компоненте додијају множењем сваке коп. једног са сваком коп. другог. Тако добијеној тензор једнак је збиру редова тензори који се множе.

пр:  $T_{ij} = a_i b_j$  ;  $S_{ijk} = a_i b_{jk}$  ;  $D_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$

- МНОЖЕЊЕ СКАЛАРОМ

$B_{ij} = \rho \cdot A_{ij}$  (свака компонента тензора се множи датим скаларом)

СКАЛАР

# - КОНТРАКЦИЈА (САМИПАЈЕ) ТЕНЗОРА

Операција којом се изједначавају два индекса, при чему се ред тензора смањује за два. На пример ако се код  $A_{ijk}$  стави  $k=j$  добиће се тензор првог реда  $B_i$  т.ј.:

$$B_i = A_{ijj} = A_{ikc} = A_{i11} + A_{i22} + A_{i33}$$

## 1.4 „КРОНЕСКЕР“-ОВ ДЕЛТА СИМБОЛ. ЗАКОНИ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ТЕНЗОРА. УСЛОВИ

КРОНЕСКЕР ОВ ДЕЛТА СИМБОЛ је систем другог реда:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$   
 Матрица тог система је јединична матрица трећег реда:  $E = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$u'_i = A_{ij} u_j$  - закон трансформације вектора при преласку из координат  $x_i$  у координат  $x'_i$

$$A_{ij} = \cos(x'_i, x_j) \quad A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^T = [a_{ji}]$$

$u_i = a_{ji} u'_j$  ;  $u_i = a_{ki} a_{kj} u'_j$  ( $a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ ) } услови ортогоналности, а у матричном облику су:

$$A^T \cdot A = E, \quad A \cdot A^T = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$$

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad \text{или} \quad T' = A T A^T$$

$$S'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} S_{lmn}$$

$$T_{ij} = a_{ki} a_{lj} T'_{kl} \quad \text{или} \quad T = A^T T' A$$

$$S_{ijk} = a_{li} a_{mj} a_{nk} S'_{lmn}$$

(ЗАКОН ТРАНСФОР. ТЕНЗОРА II и III реда)

## 1.5 ПЕРМУТАЦИОНИ СИМБОЛ - $C_{ijk}$

Служи за израчунавање векторског производа два вектора у индексној нотацији.

$$C_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ако су } i, j, k \text{ парна пермутација бројева } 1, 2, 3, \text{ т.ј. ако се издвајају из низа } 1, 2, 3, 1, 2, 3 \\ -1, & \text{ако су } i, j, k \text{ не } \\ 0, & \text{ако } i, j, k \text{ нису пермутације бројева } 1, 2, 3, \text{ т.ј. ако заци сваз индекса имају исту вредност} \end{cases}$$

$$C_{123} = C_{231} = C_{312} = 1, \quad C_{132} = C_{213} = C_{321} = -1, \quad \text{а } C_{ijk} = 0 \text{ у свим осталим случајевима.}$$

$$C_{ijk} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$$

1.6

РАЗЛАГАНИЕ ТЕНЗОРА II РЕЗГА НА СИМЕТРИЧАН И АНТИСИМЕТРИЧАН ТЕНЗОР II РЕЗГА

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})}_{\text{симетричан Т. } S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{\text{асиметричан Т. } A_{ij}}$$

ког симетричаноз  $S_{ij} = S_{ji}$   
ког асиметричаноз  $A_{ij} = -A_{ji}$

$S_{ij}$  МАТРИЦА ЈЕ  $S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$        $A = -A^T = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$

ДАКЛЕ  $S_{ij} \cdot A_{ij} = 0$

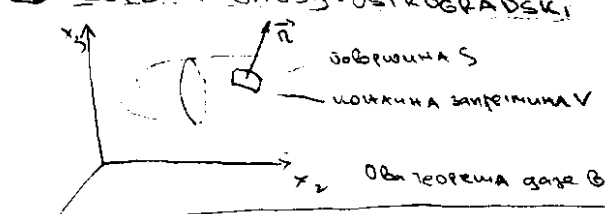
1.7 ИЗВОД ТЕНЗОРА

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$  то је обрешје ;  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} = \Phi_{j,i}$  ;  $\frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x_i \partial x_j} = F_{k\ell,ij}$   
избога

• РЕЗ ТЕНЗОРА СЕ НЕ ПОВЕЉАВА ЗА 1, ЈЕР Љ ОСТАЈЕ СЛОБОДАН ИНДЕКС

$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = U_{i,i} = U_{1,1} + U_{2,2} + U_{3,3} = \Delta$  ВОДИ КОНВЕКЦИЈА О СДРУГАЊУ, РЕЗ ТЕНЗОРА СЕ СМАЊУЈЕ ЗА ЈЕДАН ЈЕР Љ ЈЕ "ИСТИ" ИНДЕКС

1.8 ТЕОРЕМА - GAUSS - OSTROGRADSKI



$$T_{ij} = \int_V T_{ij,j} dv = \int_S T_{ij} \cdot n_j ds$$

Ова теорема даје безу интеграла по запремини и интеграла по површи

ВЕКТОР  $U_i = T_{ij} \cdot n_j$  - ВЕКТОР НОРМАЛЕ. АКО СЕ  $U_i$  ПОКАПА СА  $n_i$  ТОГА:  $U_i = \lambda n_i$  ТОГА ЈЕ  $T_{ij} n_j = \lambda n_i$   $n_i$  - ЕДВАЈИ ВЕКТОР (ОСА) ТЕНЗОРА  $T_{ij}$ . ПРЕМА ОСОБИНИ КРОНЕКЕР-ДВОЈ ГЛА СКАЛАР СИМБОЛА ЈЕ:  $n_i = \delta_{ij} n_j$ , ИА  $j$ -НА(★) ИЗЛАГА ОБИКО:  $(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$   
ДА БИ ОВАЈ СИСТЕМ ЈИМ ИМАО НЕТРИВИЈУМА РЕШЕЊА, МОРА БИТИ  $\Delta = 0 \Rightarrow |T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$

ДОДАТАК: 1.7

• ИНВАРИЈАНТЕ ТЕНЗОРА  $T_{ij}$

$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$

$I_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) = \frac{1}{2} (I_1^2 - T_{ij} T_{ij}) = T_{11} T_{22} + T_{22} T_{33} + T_{33} T_{11} - (T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2)$

$I_3 = |T_{ij}| = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} T_{il} T_{jm} T_{kn}$

Ј-НА  $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$  ЈЕСТЕ СЕКУЛАРНА Ј-НА И ИМА 3 РЕШЕЊА ПО  $\lambda$

ЗАДАЦИ:

1) Написати следеће изразе у развијеном облику  $\delta_{ii}, \delta_{ij} \delta_{ij}, \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk}$

РЕШЕЊЕ  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$  ;  $\delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} = 3$   
 $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$

## 2. АНАЛИЗА НАПОНА

Спољашње силе које делују на нево тело могу бити запреминске или површинске.

- **ЗАПРЕМИНСКЕ** спољашње силе делују на сваки елемент запремине тела и могу се рачунати по јединици масе ( $\vec{X}$ ) и по јединици запремине ( $\vec{F}$ ). Ако са  $dV$  означимо елемент запремине тела у којој лини посматрамо тачке, а са  $dm$  масу тог елемента тада запреминска сила која делује на тој елемент износи:  $d\vec{Q} = \vec{X} dm = \vec{X} \rho dV = \vec{F} dV$ , где је  $\rho$  густина тела у тој тачки.

Од овде се види да непосредно важи  $\vec{X} \rho = \vec{F}$

Запреминска сила која делује на тело коначне запремине  $V$  је:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{X} dm = \int_V \vec{F} dV \quad (\text{теорема Гаус-Остроградски}).$$

Карактеристични примери запреминских сила у природи су: гравитациона и инерцијална сила

- **ПОВРШИНСКЕ** спољашње силе делују преко спољашње површине тела, а изражавају се по јединици површине де површи. Површинска сила која делује на бесконачно мали елемент  $dS$  на спољашњој површи тела у околним тачкама  $M$  износи:  $d\vec{P} = \vec{P}^{(n)} dS$  где је  $\vec{P}^{(n)}$  специфично површинско оптерећење у тачки  $M$  у којој је јединични вектор спољашње нормале  $\vec{n}$ .
- Пример за површинске силе јесу силе настале услед хидростатичког притиска или контактне силе између два или више тела.
- Спољашње површинске силе могу да буду концентрисане, ако делују у појединачним дискретно распоређеним тачкама спољне површи тела, или могу бити континуално распоређене.

### ПОЈАМ НАПОНА

Као последица дејства спољашњих сила или као резултат неких других утицаја као што су неравномерно затегање тела, следеће околности и сл, долази до деформације тела и до појаве унутрашњих сила. Да би смо то објаснили поделимо тело (испосматривајући га на целокупно дејство спољашњих сила) на делове I и II неким замишљеном равни  $\pi$ . Пошто оба дела тела морају бити у равнотежи, укупна аксиомна овежана, морамо утицати једној дела на други заменити одговарајућим унутрашњим (површинским) силама које делују на коначном пресецим равни  $\pi$ .

Унутрашње силе које делују на коначном малом елементу површине  $\Delta F$  (спољашње нормале  $\vec{n}$ ) можемо редукovati у тачку  $A$ . При чему долазимо главног вектора  $\Delta \vec{P}$  и главног момента  $\Delta \vec{M}$ .

Пошто се растојања унутар  $\Delta F$  имају то можемо претпоставити да је  $\Delta F \rightarrow 0$  тачка  $A$  ајак унутар елемента површине  $\Delta F$  важе следећи лимеси:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta F} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \frac{d\vec{P}}{dF} = \vec{P}^{(n)}$$

Величина  $\vec{P}^{(n)}$  назива се **НАПОН** или **ВЕКТОР НАПОНА** у тачки  $A$  за пресецим равни чија је нормала  $\vec{n}$ . У другој тачки равни  $\pi$  напон ће уопштем случају бити различит. Такође кроз исту тачку  $A$ , а за различите равни кроз њу, напони ће бити различити. Значи:

Напон је функција положаја и функција пресецим равни кроз дату тачку  $\pi$ ,  $\vec{P}^{(n)} = \vec{P}^{(n)}(x_i)$ . Значе вектор напона, се може разложити на вектор  $\vec{G}$  у правцу нормале  $\vec{n}$  и на компоненту  $\vec{T}$  које се налази у пресецим равни.  $\vec{G} = G \cdot \vec{n}$

Дакле  $G$  — нормални напон

$\vec{T}$  — смичући (тангенсијални) напон

$$\vec{T} = \vec{P}^{(n)} - G \vec{n}, \quad \text{где су } G = \vec{P}^{(n)} \cdot \vec{n} \quad \text{и} \quad T = \sqrt{|\vec{P}^{(n)}|^2 - G^2}$$

### 2.2 СТАЊЕ НАПОНА У ТАЧКИ

Пошто кроз тачку  $A$  можемо повући бесконачно много равни то значи да тачка  $A$  има бесконачно много вектора  $\vec{P}^{(n)}$ . Скуп свих тих вектора у тачки  $A$  одређује стање напона у тој тачки.

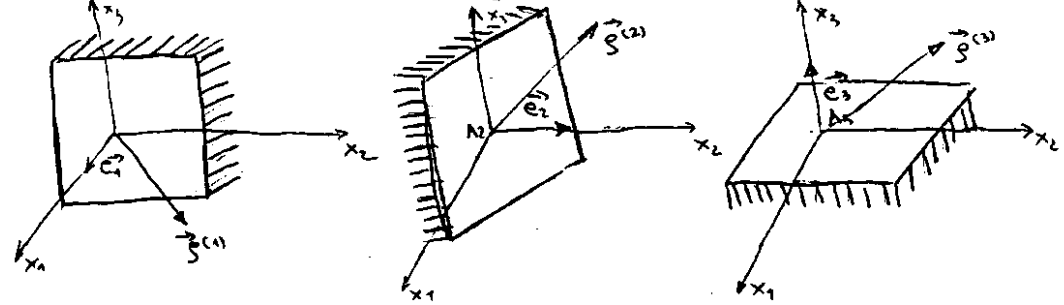
Једна томе стање напона у некој тачки нам је познато  $\vec{P}^{(n)}$  за било коју пресецим равни  $\pi$  у тој тачки.

- За познавање вектора напона  $\vec{P}^{(n)}$  за произвољну пресецим равни потребно знати векторе напона за било које три некомпланарне пресецим равни у тој тачки.

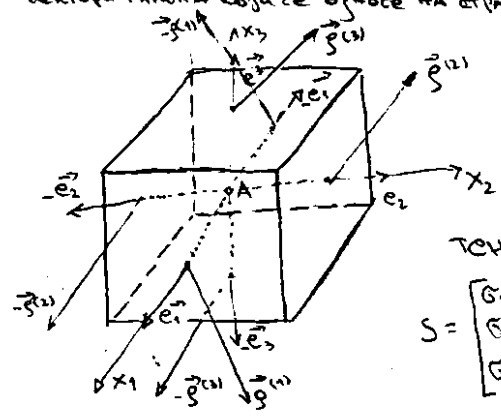
Подношење: Компланарне равни су равни



Предпоставимо сада да су у некој тачки тела познати вектори напона за три међусобно управне пресечне равни које су нормалне на координатне осе  $x_1, x_2$  и  $x_3$ .



Најбољи назив је комбинована векторна три слике у једној, чиме записујемо да су  $\vec{s}^{(1)}, \vec{s}^{(2)}, \vec{s}^{(3)}$  вектори напона који се односе на стране једног или више бесконачно малих кубова.



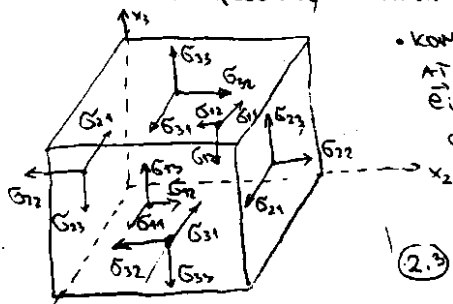
Вектори напона се за координатне равни могу изразити као

$$\left. \begin{aligned} \vec{s}^{(1)} &= \sigma_{11} \vec{e}_1 + \sigma_{12} \vec{e}_2 + \sigma_{13} \vec{e}_3 \\ \vec{s}^{(2)} &= \sigma_{21} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 + \sigma_{23} \vec{e}_3 \\ \vec{s}^{(3)} &= \sigma_{31} \vec{e}_1 + \sigma_{32} \vec{e}_2 + \sigma_{33} \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \vec{s}^{(i)} = \sigma_{ij} \vec{e}_j$$

### ТЕНЗОР НАПОНА

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{за } i=j \rightarrow \text{НОРМАЛНИ НАПОНИ} \\ &\text{за } i \neq j \rightarrow \text{ТАНГЕНЦИЈАЛНИ (СИМУТНИ НАПОНИ)} \end{aligned}$$

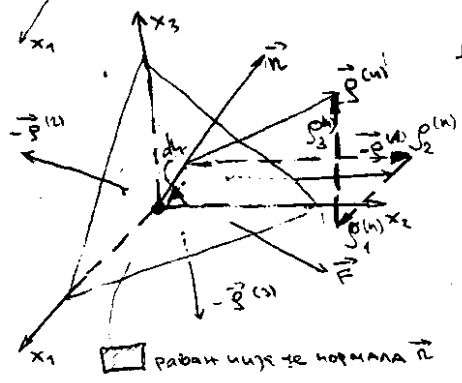
За компоненти тензора напона уопштено важи следеће, координата  $\sigma_{ij}$  тензора напона је компоненти напон за пресеци равни са нормалом  $\vec{e}_i$  који делује у правцу јединичног вектора  $\vec{e}_j$ . Нпр.  $\sigma_{23}$  је ком. напон за пресеци равни са нормалом  $\vec{e}_2$  а делује у правцу вектора (јединичног)  $\vec{e}_3$ . Слика ↓



• Компоненти напон је позитиван када има позитиван смер координатне осе  $x_j$ , а делује у равни чија је јединични вектор спољ. нормале  $\vec{e}_i$ , или када има негативан смер осе  $x_j$ , а делује у равни чија је спољашња нормала  $-\vec{e}_i$ .

Сви компоненти напона на слици лево су позитивни

### (2.3) ВЕЗА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА НАПОНА И ТЕНЗОРА НАПОНА (КОШИЈЕВЕ ВЕЗЕ)



Дато: тачка А, тензор напона  $\sigma_{ij}$ ,  $\vec{n} (n_1, n_2, n_3)$  - где су  $n_1, n_2, n_3$  cos. углама које нормала заклапа са осима

$dF$  је површина основе тетраедра  $d\vec{f}_i = dF \cdot \vec{n}_i$

$\vec{F}$  задрешивајућа сила, док је  $d\vec{h}$  нормално одстојање тачке А од основе тетраедра.

Пошто се елементарни тетраедар налази у стању равнотеже, на њега можемо применити 3-не равнотеже кривог тела. А онда записујемо

$$\vec{R}^{(n)} dF - \vec{s}^{(1)} dF_1 - \vec{s}^{(2)} dF_2 - \vec{s}^{(3)} dF_3 + \vec{F} dV = 0$$

узимајући у обзир то да важи  $(x_i)$  и да се скрати са  $dF$  због  $dV = \frac{1}{3} dF dh$  на 3-на равнотеже имам:

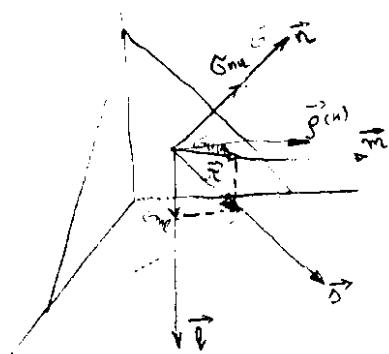
$$\vec{R}^{(n)} = \vec{s}^{(1)} n_1 + \vec{s}^{(2)} n_2 + \vec{s}^{(3)} n_3 - \frac{1}{3} \vec{F} dh \quad \text{због због малих растојања се додељивао или ове јединичне може занемарити на крају коначно}$$

узимајући у обзир одређије да је  $\vec{s}^{(i)} = \sigma_{ij} \vec{e}_j \Rightarrow \vec{R}^{(n)} = \sigma_{ij} \vec{e}_j n_i$  - пројекције  $\vec{s}^{(i)}$  на координатне осе

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_1^{(n)} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ \vec{R}_2^{(n)} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ \vec{R}_3^{(n)} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \right\} \text{исто КОШИЈЕВЕ 3-НЕ 3-НЕ}$$

• КОШИЈЕВЕ 3-НЕ у матричном облику  $\vec{s}^{(n)} = S^T \cdot \vec{n}$  где  $\vec{s}^{(n)} = \begin{bmatrix} s_1^{(n)} \\ s_2^{(n)} \\ s_3^{(n)} \end{bmatrix}$ ,  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$  а  $S$  је тензор напона.

- Стање напона у тачки је потпуно одређено ако је познат тензор напона у тој тачки.
- РАЗЛАГАЊЕ ВЕКТОРА НАПОНА У КОМПОНЕНТЕ



$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^{(n)} \vec{n} = \vec{\sigma}_i^{(n)} n_i = \sigma_{ji} n_j n_i = \sigma_{ij} n_i n_j - \text{нормални напон}$$

$\vec{\tau}$  (скаларни скалупти напон) разложује се на компоненте  $\sigma_{nt} \vec{n}$  и  $\sigma_{tm} \vec{m}$  у пројекцији декартових координата  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$ . Како овако лежи у пресецијој равни, вектор скалупти напона можемо написати као:

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{s} = \vec{\sigma}_i^{(n)} s_i = \sigma_{ji} n_j s_i = \sigma_{ij} n_i s_j - \text{или и као}$$

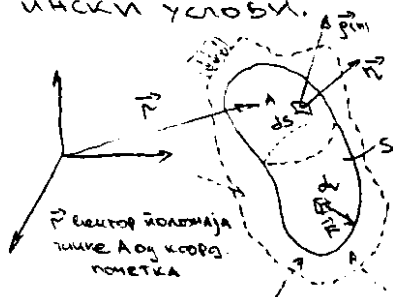
$$\vec{\tau} = \sigma_{nm} \vec{m} + \sigma_{nl} \vec{l}$$

$$\text{односно } \vec{\sigma}^{(n)} = \sigma_{nn} \vec{n} + \vec{\tau} = \sigma_{nn} \vec{n} + \sigma_{nm} \vec{m} + \sigma_{nl} \vec{l}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma = \sigma_{ij} n_i n_j = \vec{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \text{ где су: } \sigma_{nm} = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{m} = \vec{\sigma}_i^{(n)} m_i = \sigma_{ij} n_i m_j \text{ и } \sigma_{nl} = \sigma_{ij} n_i l_j$$

матрица  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$  и  $\vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$

## 2. ЈЕДНАЧИНЕ РАВНОТЕЖЕ. СТАВ О КОМУГОВАНОСТИ СМИЧУЋИХ НАПОНА, ПОВРШНИНСКИ УСЛОВИ.



Израђујемо из тела произвољан гео. континуе запремине  $V$  огранич.вне затвореном површи  $S$ . Нека је  $\vec{F}$  запреминска сила по дејиници запремине, а  $\vec{\sigma}^{(n)}$  површинска сила расподељена по дејиници површи  $S$ .

Услов равнотеже сила сила који дејују на посматрану гео. је

$$\int_S \vec{\sigma}^{(n)} ds + \int_V \vec{F} dv = 0 \text{ односно } \int_S \vec{\sigma}_i^{(n)} ds + \int_V F_i dv = 0$$

Користећи теорему Гаус-Остроградски интеграл по површи те.мо трансформисати у интеграл по запремини:

$$\int_S \vec{\sigma}_i^{(n)} ds = \int_S \sigma_{ji} n_j ds = \int_V \sigma_{ji,j} dv \text{ па равнотежа гласи: } \int_V (\sigma_{ji,j} + F_i) dv = 0$$

Пошто и сваки део запремине посматрамог тела мора бити у равнотежи то подинтегрална функција мора бити једнака нули тј.  $\sigma_{ji,j} + F_i = 0$  ако је веза између напона и запреминских сила.

## • СТАВ О КОМУГОВАНОСТИ СМИЧУЋЕГ НАПОНА

Услов да су сви моменти у равнотежи  $\Rightarrow \int_S \vec{r} \times \vec{\sigma}^{(n)} ds + \int_V \vec{r} \times \vec{F} dv = 0$ . у индексној нотацији векторски производ би изнегдо овако:  $\int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_k^{(n)} ds + \int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dv = 0$

користењем теореме Г-О оба з-на се упрошћује и постаје  $\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dv = 0$ , пошто је запремина произвољна то  $\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Зер је  $\epsilon_{ijk} = 0$  за 2 или 3 иста индекса па за  $i=1$  нпр. само  $\epsilon_{123} \sigma_{23}$  и  $\epsilon_{132} \sigma_{32}$  може бити једнаки нули па  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$  зер  $\epsilon_{123} = 1$  а  $\epsilon_{132} = -1$

Једначином  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  изражен је став о комугованости напона који гласи:

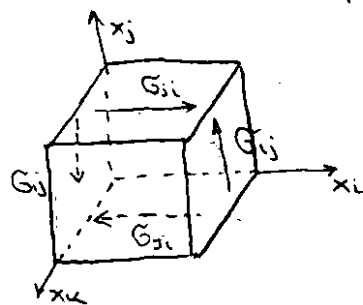
У двема међусобно управним равнинама, компоненте сличућих напона које су нормалне на пресецију праву тих равни, једнаке су по величини, а обе имају смер или ка пресецију правој или од ње

- Имајући у виду коришћење з-не  $\vec{\sigma}_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$  једначине равнотеже од з-не  $\sigma_{ji,j} + F_i = 0$  су: напона: искористимо сам код коришћења и код равнотеже да је  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0$$

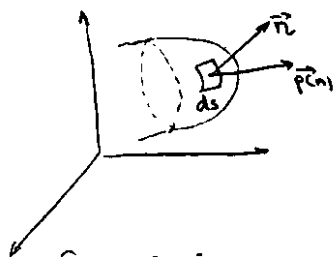


• НОРМАЛНИ И СМИЧУТИ НАПОНИ У РАЗВИЈЕНОМ ОБЛИКУ (знајући  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ )

$$\sigma_m = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2 [\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1]$$

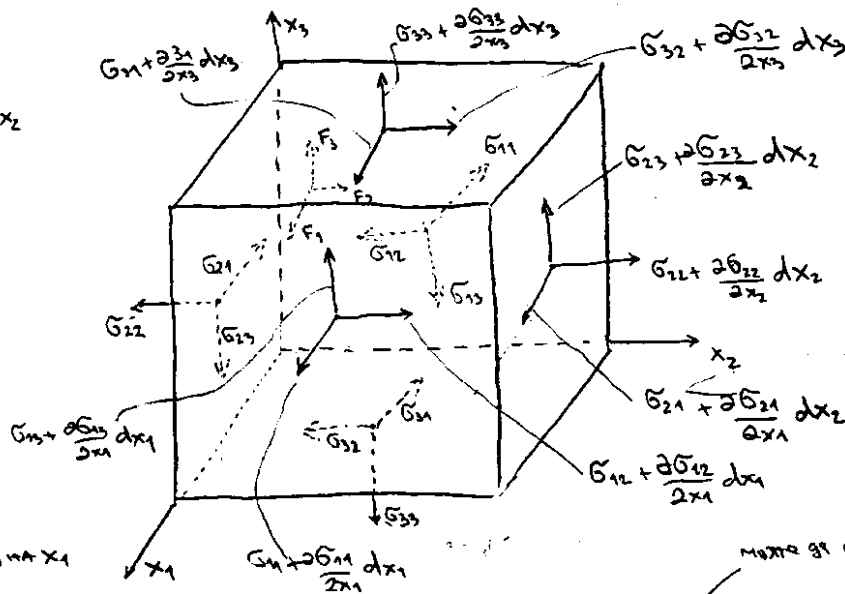
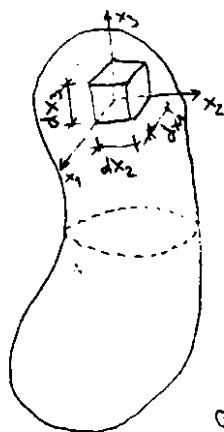
$$\sigma_{nm} = \sigma_{ij} n_i m_j = \sigma_{11} n_1 m_1 + \sigma_{22} n_2 m_2 + \sigma_{33} n_3 m_3 + \sigma_{12} (n_1 m_2 + n_2 m_1) + \sigma_{13} (n_1 m_3 + n_3 m_1) + \sigma_{23} (n_2 m_3 + n_3 m_2)$$

• ПОВРШИНСКИ УСЛОВИ



$\vec{p}^{(n)}$  површинска сила која је распоређена у танјини површини тела. Компоненте напона поред  $\sigma_{ij}$  на мору у задовољни и три гранична услова  $\sigma_{ij} n_j = p_i^{(n)}$  (Кошијеви површински услови). Једначине равнотеже  $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$  и став о континуитету смичућег напона могу се извести и елементарније, из услова равнотеже сила и момената који делују на елемент тела у облику кубера.

Постављајући услов равнотеже сила у правцу осе  $x_1$  добијемо:



Равнотежа у односу на  $x_1$

може се скратити са  $dx_1 dx_2 dx_3$

$$\left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_3 dx_1 - \sigma_{21} dx_3 dx_1 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + F_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\text{односно } \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0$$

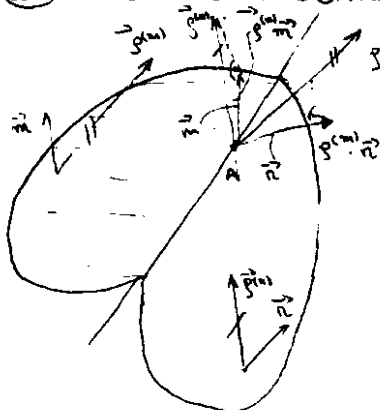
Такође ако ставимо услов равнотеже момената обухватајући силе у односу на  $x_1$  и за  $i=1$  добијемо

$$(\sigma_{23} dx_1 dx_3) dx_2 - (\sigma_{32} dx_1 dx_2) dx_3 \text{ занемарљивим малих величина } \Rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

НАПОМЕНА: у  $\sigma$  напони  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$  се означавају површинама којима делују  $dx_2, dx_3$  а  $\sigma_{21}$  се добија сила јер  $p_{21} = \frac{1N}{1m^2}$  па је  $p \cdot F = \text{СИЛА}!!!$

• Три методе добијања као и гранични услови нису довољни за одређивање стања напона у појединим тачкама тела. Према томе одређивање стања напона у телу је СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНО.

## 2.5 СТАВ О КОНТУГОВАНОСТИ НАПОНА



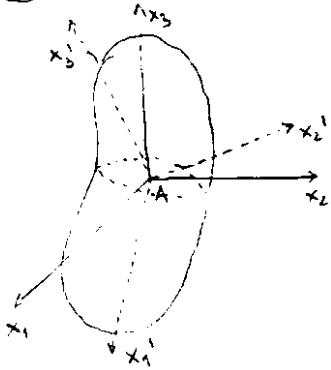
$$\vec{p}^{(n)} \cdot \vec{m} = \vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{n}$$

Ако кроз тачку А тела пролазе две равнине са јединичним векторима нормала  $\vec{n}$  и  $\vec{m}$  тада је пројекција вектора напона  $\vec{\sigma}^{(n)}$  за равнину са нормалом  $\vec{n}$  на нормалу  $\vec{m}$  једнака пројекцији вектора напона  $\vec{\sigma}^{(m)}$  за равнину са нормалом  $\vec{m}$  на нормалу  $\vec{n}$ .

$$\begin{aligned} \text{Дакле: } \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{m} &= \sigma_{ij} n_j m_i = \sigma_{ij} n_j m_i \\ \vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{n} &= \sigma_{ij} m_j n_i = \sigma_{ij} m_j n_i \\ \Rightarrow \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{m} &= \vec{\sigma}^{(m)} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

КОРИСТИЛИ СМО ОД  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

## 2.6) ПРОМЕНА КОМПОНЕНАТА НАПОНА ПРИ РОТАЦИЈИ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА



$x_1, x_2, x_3 (x_i)$   $\sigma_{ij}$  познато затворено и имамо  $x'_1, x'_2, x'_3 (x'_i)$  тражи се  $\sigma'_{ij} = ?$ . Све ћемо извести преко израза  $\sigma_{nm} = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{m} = \sigma_{ij} n_i m_j$

Пошто компонента напона  $\sigma'_{ke}$  представља проекцију вектора напона на праву која је нормална на  $x'_k$  осу, на праву  $x'_e$  осе можемо писати:  $\sigma'_{ke} = \sigma_{ij} \cos(x'_k, x_i) \cos(x'_e, x_j)$

Уводећем ознака  $a_{ki} = \cos(x'_k, x_i)$ ,  $a_{ej} = \cos(x'_e, x_j)$  беза изразу тензора напона у односу на два координатна система добија следећи облик:  $\sigma'_{ke} = \sigma_{ij} a_{ki} a_{ej}$ , може се и доказати  $\sigma_{ij} = \sigma'_{ke} a_{ki} a_{ej}$

Ако ставимо  $g = k = e$  и искористимо услове ортогоналности у облику  $a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ , добивамо  $\sigma'_{kk} = a_{ki} a_{kj} \sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii} \Rightarrow \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

Збир нормалних напона је инваријантан у односу на ортогоналну трансформацију координата.

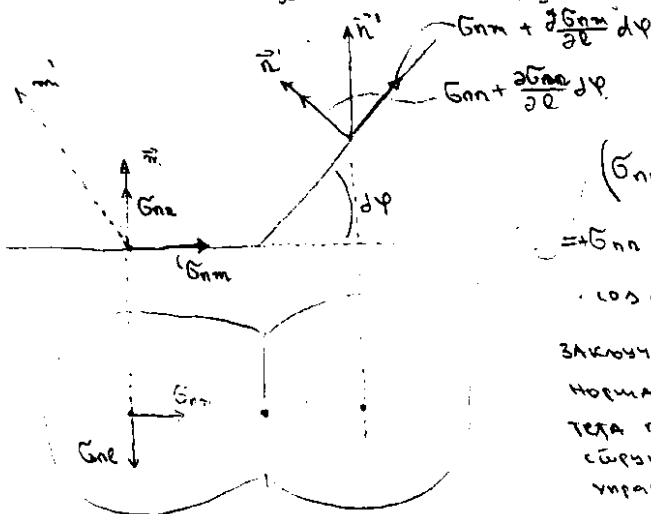
У матричном облику злаци  $[\sigma'_{ke}] = [a_{ki}] [\sigma_{ij}] [a_{ej}]$  или  $S' = A \cdot S \cdot A^T$  где је  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

## 2.7) ГЛАВНИ НАПОНИ И ПРАВЦИ ГЛАВНИХ НАПОНА, ИНВАРИЈАНТЕ СТАЊА НАПОНА

Пошто је за различите пресечне равни кроз дату тачку А различит и вектор напона то је и нормални напон различит. Показатељемо да важи следеће:

НОРМАЛНИ НАПОН ДОСТИЖЕ ЕКСТРЕМНУ ВРЕДНОСТ У РАВНИ У КОЈОЈ ЈЕ СМИЧУЋИ НАПОН ЈЕДНАК НУЛИ.

Ако се вршимо ротацију равни за угао  $d\varphi$  да би савили у онај положај у којој је напон највећи



применимо став о ковантентности напона

$$\vec{\sigma}^{(n')} \cdot \vec{n} = \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{n}' \text{ што даље значи}$$

$$\left( \sigma_{nn} + \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cos d\varphi + \left( \sigma_{nn} + \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \sin d\varphi$$

$$= \sigma_{nn} \cos d\varphi + \sigma_{nn} \sin d\varphi + \sigma_{nn} \sin d\varphi$$

$$\cos d\varphi = 1 \quad \sin d\varphi \approx d\varphi \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial \varphi} = -2 \sigma_{ns}$$

Закључак: Величина промене

нормалног напона у некој тачки напрегнутог тела при обртању пресечне равни једнака је дво-скупској вредности компоненте напона смичућа управне на праву око које се обрћује врши.

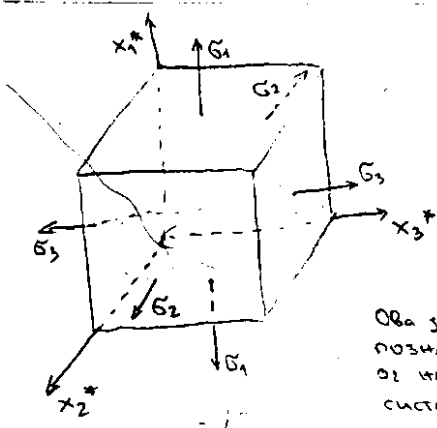
Ако се обрћује пресечне равни врши око праве која је нормална на праву, тоталног смичућег напона  $\tau$  тада једначину можемо писати:  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = -2\tau$  где је  $\sigma_{nn} = \sigma$

У пресечној равни у којој је тотални смичући напон једнак нули, нормални напон достиже своју екстремну вредност.

Равни у којима су смичући напони једнаки нули називамо равнина зл. напона, а напоне главним напонима.

Може се показати да за сваку тачку тела постоје три међусобно управне равни у којима су смичући напони једнаки нули односно и којима је тотални напон уједно и нормалан.

Правци са којима су паралелни зл. напони називамо правцима зл. напона и означавамо их са  $\vec{n}^{(1)}, \vec{n}^{(2)}, \vec{n}^{(3)}$ , а одговарајуће осе, осе зл. напона означаваћемо са  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$



Да би смо одредили величине главних napona у тачки А у којој су познате компоненте napona  $\sigma_{ij}$ , показујемо да јединичне векторе  $\vec{e}_i^{(n)} = \vec{e}_i \cdot \vec{n}$  или  $\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$  у којој је  $\vec{n}$  главни napon, а  $\vec{n}$  вектор нормале пресека равни који одређује правца главног napona, и који је колинеаран са вектором napona  $\vec{\sigma}^{(n)}$ . Уносећи ову једначину у Кошијеве ј-не  $\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$  добијамо:

$$\sigma_i \cdot n_i = \sigma_{ij} n_j \Rightarrow \text{користимо } n_i = \sigma_{ij} n_j \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0$$

Ова ј-на у развијеном облику представља систем од три ј-не са четири непознате, наиме три пројекције  $n_i$  јединичног вектора  $\vec{n}$  и вредност главног napona  $\sigma$ . Да би овај систем имао нетривијална решења детерминанта система мора бити једнака нули, па је:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \text{ или}$$

$$\boxed{\text{СЕКУЛАРНА Ј-НА}} \\ \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix}$$

у развијеном облику добија се једначина трећег степена.

ИНВАРИЈАНТЕ

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ I_3 &= |\sigma_{ij}| - \text{вредност детерминанте тензора napona} \end{aligned}$$

Решења секуларне ј-не  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  представљају првогаче величине главних napona. Пошто су оне независне од избора коор. система, коефицијенти  $I_1, I_2, I_3$  имају увек исте вредности па се зову инваријанте.

Наравно ако су сви главни naponi једнаки нули инваријанте постају:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

Сваком од главних napona  $\sigma_k$  ( $k=1,2,3$ ) одговара по један ел. правац чији косинуси правца  $n_i^{(k)}$  морају задовољити систем ј-на  $(\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) n_j = 0$  који је хомоген и у којем је уместо  $\sigma$  стављено  $\sigma_k$ . Познато је да само две од три ј-не хомогеног система су међусобно независне (прве две)

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_k) n_1^{(k)} + \sigma_{12} n_2^{(k)} + \sigma_{13} n_3^{(k)} &= 0 \\ \sigma_{21} n_1^{(k)} + (\sigma_{22} - \sigma_k) n_2^{(k)} + \sigma_{23} n_3^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

Решива можемо представити као где је  $\lambda$  неодређени фактор пропорционалности

$$\begin{aligned} n_1^{(k)} &= \lambda_k c_1^{(k)} \\ n_2^{(k)} &= \lambda_k c_2^{(k)} \\ n_3^{(k)} &= \lambda_k c_3^{(k)} \end{aligned}$$

$$c_1^{(k)} = \begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_k & \sigma_{23} \end{vmatrix}; c_2^{(k)} = \begin{vmatrix} \sigma_{13} & \sigma_{11} - \sigma_k \\ \sigma_{23} & \sigma_{22} - \sigma_k \end{vmatrix}$$

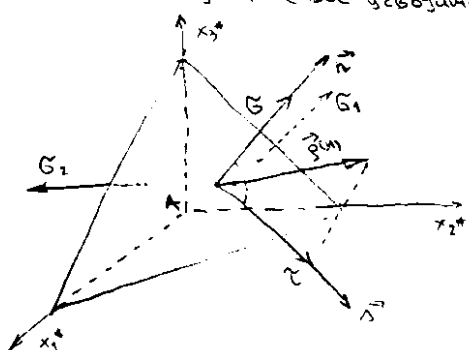
$$c_3^{(k)} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_k & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_k \end{vmatrix}$$

Уносећемо облик  $c_i^{(k)}$  у једначину  $[n_1^{(k)}]^2 + [n_2^{(k)}]^2 + [n_3^{(k)}]^2 = 1$  добијамо  $n_i^{(k)} = \pm \frac{c_i^{(k)}}{\sqrt{[c_1^{(k)}]^2 + [c_2^{(k)}]^2 + [c_3^{(k)}]^2}} \quad k=1,2,3$

С обзиром на то да је тензор napona симетричан, карактеристични вектори  $n_i^{(1)}, n_i^{(2)}, n_i^{(3)}$  су међусобно нормални  $n_i^{(k)} n_i^{(l)} = \delta_{kl}$ .

У општем случају постоје три различита главна napona  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  које често обично обележавају по величини, обично  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Ако су сви главни naponi међусобно једнаки ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), тада је сваки правац - правац главног napona - главни правац.

Ако за координатне осе усвојимо осе главних napona  $x_i^*$  матрица napona је  $\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$



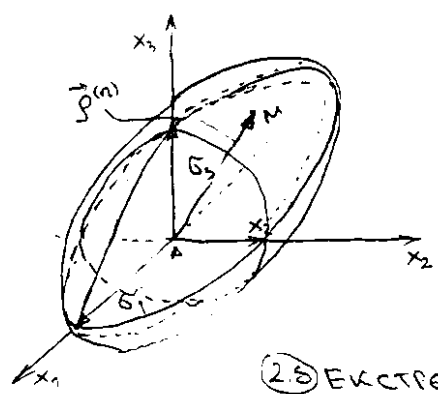
Користећемо Кошијеве ј-не  $\sigma_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$  компоненте вектора napona  $\vec{\sigma}^{(n)}$  за произволну пресеку равни са јединичним вектором нормале  $\vec{n}$  можемо писати кратко:

$$x_1 = \sigma_1^{(n)} = \sigma_1 n_1 \quad x_2 = \sigma_2^{(n)} = \sigma_2 n_2 \quad x_3 = \sigma_3^{(n)} = \sigma_3 n_3$$

За графичко приказивање стања napona у  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  тачки где узимамо у обзир  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  ваљамо

$$\text{до ј-не } \frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \text{ то је једначина}$$

Елипсоида. Вектор положаја било које тачке  $M(x_1, x_2, x_3)$  на елипсоиду представља вектор napona за неку пресеку равни, или при томе имамо информацију на коју се пројекцију вектор napona



У општем случају стање напона је, када:

- сви напони различити од нуле - ТРООСНО (ПРОСТОРНО)
- ако је један од 2л. напона једнак нули - ДВООСНО (РАВАНСКО)
- ако је само један различит од нуле - ЈЕДНООСНО (ЛИНИЈСКО)

Ако су пак сви главни напони различити од нуле, али међусобно једнаки онда се елипсоид деформације у сфери и онда такав тензор напона зовемо СФЕРНИ ТЕНЗОР НАПОНА

## 2.5 ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ СМИЧУЋИХ НАПОНА

Погледајмо се формула  $\sigma = \sigma_{ij} n_j n_i$ ,  $\tau = \sqrt{|\vec{\sigma}|^2 - \sigma^2}$ . Имајте у виду формуле  $x_i = \sigma_i n_i$  за интезитет вектора напона дођујемо  $|\vec{\sigma}|^2 = \sigma_i^{(n)} \sigma_i^{(n)} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$  а заједно имамо:  $\sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$   
 $\tau^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$  елиминацијом напона биће последње једначине дођује се:

$$\tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \text{ и услов да је } n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

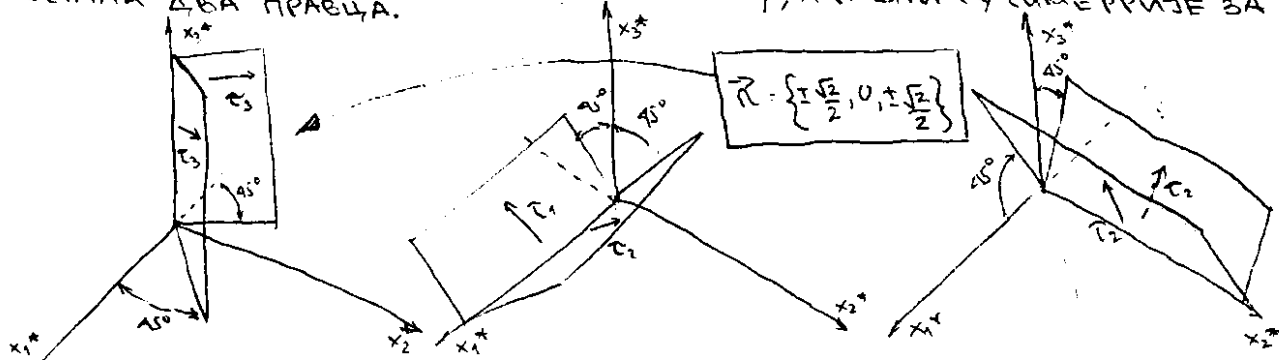
Да би одредили максималне вредности смичућег напона користећи Лагранжову методу за одређивање екстремума функције биће променљивих па ће Лагранжова једначица

$$\phi = \tau^2 - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \text{ услови стационарности су } \frac{\partial \phi}{\partial n_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ па ће овде матрица бити:}$$

$$\begin{aligned} n_1 [\sigma_1^2 - 2\sigma_1 (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \lambda] &= 0 \\ n_2 [\sigma_2^2 - 2\sigma_2 (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \lambda] &= 0 \\ n_3 [\sigma_3^2 - 2\sigma_3 (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) - \lambda] &= 0 \end{aligned}$$

Ове три једн. су једнакимом  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  ићи систем са једном једначицом да се добије решења  $n_i$  и скалара  $\lambda$ . Што је и био циљ.

Решења су:  $\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ ,  $\tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ . На основу добијених резултата може се закључити: СМИЧУЋИ НАПОНИ ИМАЈУ ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ У РАВНИМА КОЈЕ ПРОЛАЗЕ КРОЗ ЈЕДАН ГЛАВНИ ПРАВАЦ, А РАВНИ СУ СИМЕТРИЈЕ ЗА ОСТАЛА ДВА ПРАВЦА.



Очигледно је  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$  а пошто функција  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  видимо да је максимална вредност смичућег напона  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

## 2.6 РАЗЛАГАЊЕ ТЕНЗОРА НАПОНА У СФЕРНИ И ДЕВИЈАТОРСКИ ДЕО

Пожељно је погодно да се координатно разлагање тензора напона  $\sigma_{ij}$  на два дела и то:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(d)} = \bar{\sigma} \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \text{ први члан на десној страни је СФЕРНИ ДЕО ТЕНЗОРА}$$

напона, где је са ознаком  $\bar{\sigma}$  означен средњи нормални напон  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1$  што је очигледно инваријанта у односу на избор координатног система. С обзиром да су овде сви главни напони међусобно једнаки Ламев елипсоид се деформације у сфери и овај тензор карактерише стање напона које се назива ХИДРОСТАТИЧКО НАПРЕЗАЊЕ.

Други члан на десној страни је ДЕВИЈАТОРСКИ ДЕО тензора напона и има облик:  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij}$  једначина  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(d)}$  у матричном облику гласи

$$S = S^{(s)} + S^{(d)} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \bar{\sigma} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

СФЕРНИ ДЕО УТИЧЕ НА ПРОМЕНУ ЗАПРЕЖИТЕ, А ДЕВИЈАТОРСКИ ДЕО НА ПРОМЕНУ ОБЛИКА

## 2.10) МОИР-ОВИ КРУГОВИ НАПОНА

- За графичко приказивање стања напона користе се моирови кругови -

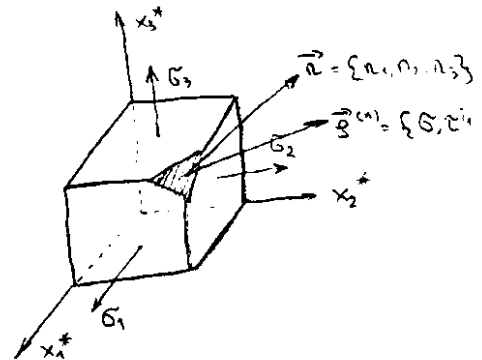
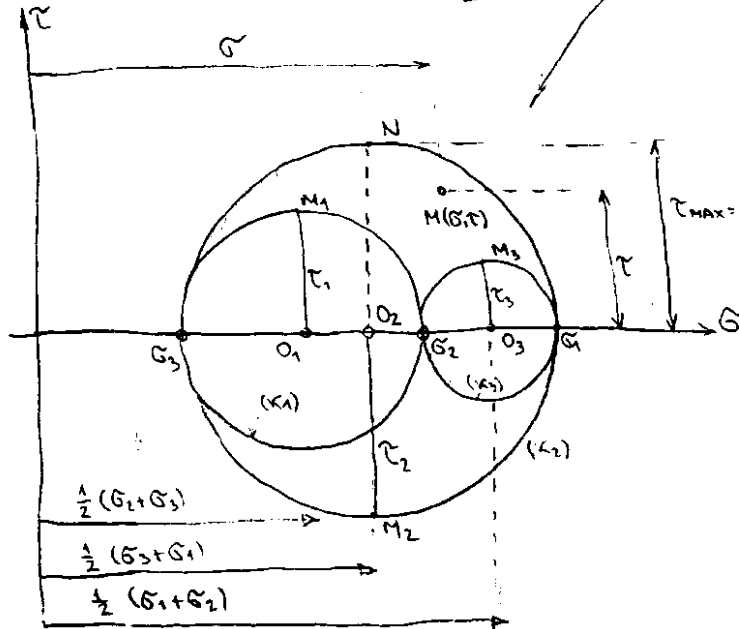
$$\sigma_1, \sigma_2, \tau^2, n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (K_1)$$

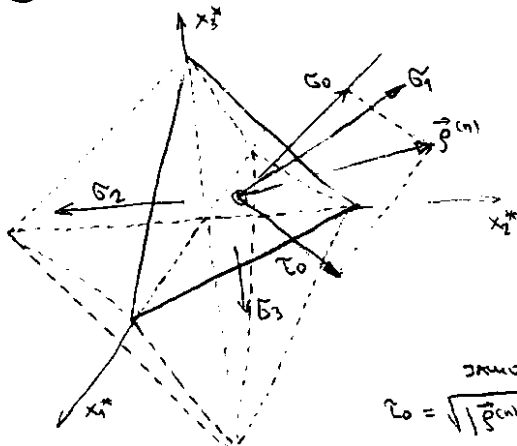
$$\left( \sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \quad (K_2)$$

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (K_3)$$

• Координате  $(\sigma, \tau)$  тачака у израђеној области могу бити нормални, односно тотални ситичути напон за равни са одговарајућом нормалом  $\vec{n}$



## 2.11) ОКТАЕДРАСКЕ РАВНИ И ОКТАЕДРАСКИ НАПОНИ



Октаедрске равни су равни које са правцима главних напона заклапају једнаке углове. Можемо образловати осам таквих равни, које образују октаедр.

У односу на правце главних напона пројекције јединичних вектора нормала октаедарских равни су дате са:

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ако ове вредности унесемо у једначине:

$$\sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad \text{и} \quad \tau^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad \text{доб-$$

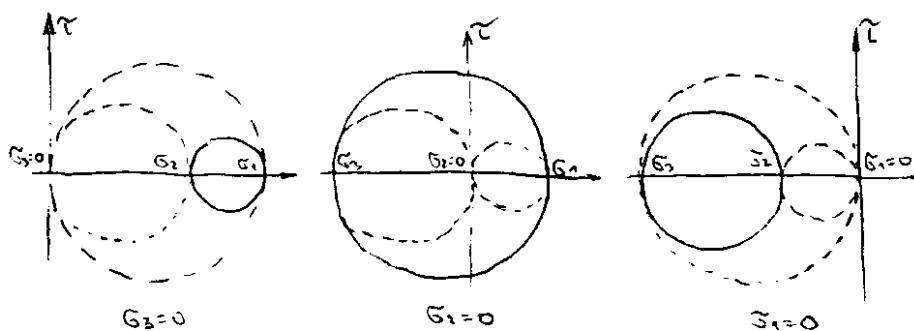
$$\text{зимо следеће: } \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \bar{\sigma}$$

$$\tau_0 = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$\sigma_0$  се назива октаедарски нормални напон, а  $\tau_0$  октаедарски ситичути напон

## 2.12) ДВООСНО (РАВНСКО) СТАЊЕ НАПОНА

Узматимо да један и само један од главних напона = 0. За стање напона у тачки кажемо да је равнско, закључујемо да вектор напона  $\vec{s}^{(n)}$  за произвољну пречек, равни и вектори напона  $\vec{s}^{(n)}$  и  $\vec{s}^{(m)}$  бити лезе у истој равни. Ако претпоставимо да  $\vec{s}^{(n)}$ ,  $\vec{s}^{(m)}$  и  $\vec{s}^{(p)}$  ису количествени, услов да је стање напона равнско може се користити као у матричном облику (има злати):  $[\vec{s}^{(n)} \times \vec{s}^{(m)}] \cdot \vec{s}^{(p)} = 0$



$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0$$

На слици лево из услов  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  представљена су 3 карактеристична моирови круга равнског стања напона.

Ако главни напони нису поредани по величини и ако узмемо да је  $\sigma_3$  главни притисак, за који је напон jednak нули, имаћемо случај равнотеже стања напона у паралелној равни равни  $x_1 x_2$ . Тада је  $\sigma_3$  јасно да је равна  $x_1 x_2$  у датој тачки **НЕНАПРЕГНУТА РАВ**  $\sigma_3 = 0$ .

За произвољно изборну оријентацију ортогоналних оса  $x_1, x_2$  тензор напона је  $S = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

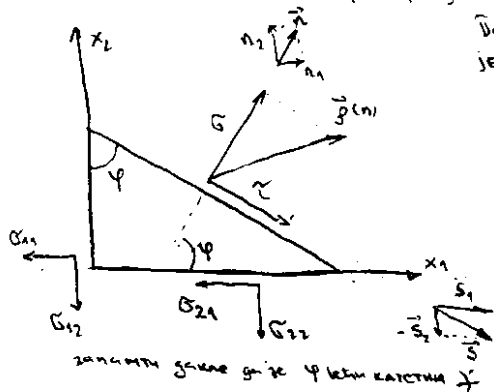
При чему је наравно  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

Узимајући у обзир да је  $\sigma = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2$   $\tau = \sigma_{11} n_1 s_1 + \sigma_{22} n_2 s_2 + \sigma_{12} (n_1 s_2 + n_2 s_1)$  (\*\*)

Само један Моир-ов круг може приказати стање напона за све равни у посматраној тачки чије нормале леже у ненапрегнутој равни  $x_1 x_2$ , тј равни које садрже осу нултог главног напона.

Пошто су напони у равни са нормалом  $x_3$  једнаки нули, једнако је стање напона приказати исто у равни  $x_1 x_2$ .

Са слике имамо:



$$n_1 = \cos \varphi, n_2 = \sin \varphi, s_1 = \sin \varphi, s_2 = -\cos \varphi (*)$$

Јер може оријентација јединичног вектора  $\vec{s}$  одређује и смер позитивног смичућег напона  $\tau$ .

За позитиван смичући напон усвојен је онај који при ротацији од  $90^\circ$  у  $\kappa$  поклапа са позитивним напоним  $\sigma$ .

$$\text{Учинеши } (*) \text{ у } (**): \sigma = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi - \sigma_{12} \cos 2\varphi$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi$$

помоћу тригонометријских релација:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

## 2.12.2 ГЛАВНИ НАПОНИ И ГЛАВНЕ ОСЕ

У датој тачки тела компоненте напона  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  су константе, тако да су величине  $\tau$  и  $\sigma$  функције само угла  $\varphi$ . Обртањем пресека ти напони се мењају континуално. Међутим, постоји положај (одређени)  $\varphi = \alpha$  када нормални напон  $\sigma$  достиже екстремну вредност. Тако  $\alpha$  може се одредити диференцирањем јединичне по углу  $\varphi$  и изједначавањем са нулом: тј

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = -2 \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi + \sigma_{12} \cos 2\varphi \right) = -2\tau$$

па ће  $\sigma$  бити екстремна када смичући напон буде једнак нули.

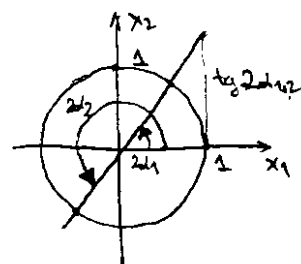
$$\text{тј услов } -2\tau = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha = \sigma_{12} \cos 2\alpha \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

тјко  $2\alpha$  има две вредности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  који се разликују за  $\pi/2$ .

односно  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$  јер је  $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$

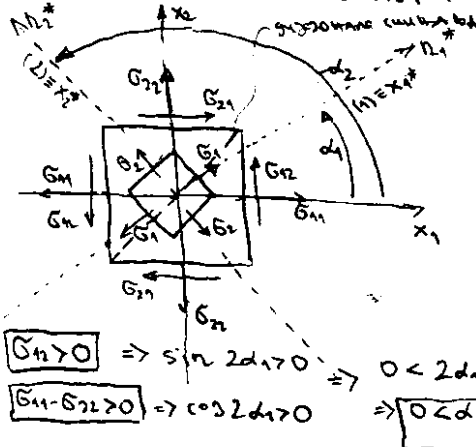
(јер тангенс је исти у I и у III квадранту)

Како је функција  $\sigma = \sigma(\varphi)$  непрекидна и периодична с периодом  $\pi$ , једна екстремна вредност је минимум а друга максимум. Као и пре: те екстремне вредности нормалног напона зову се **ГЛАВНИ НАПОНИ**, а равни у којима се јављају **равни ГЛ. НАПОНА**. Јављују се којима су ти напони паралелни зову се **првци главних напона**, а одговарајуће **осе ОСЕ ГЛАВНИХ НАПОНА**.



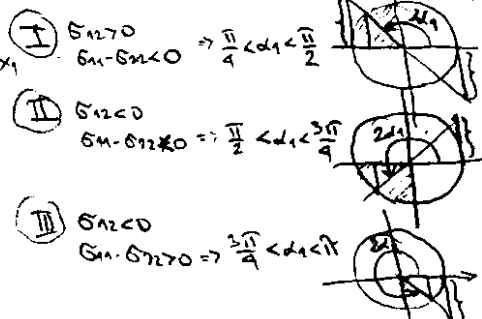
$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}, \sigma_1 > \sigma_2$$

## \* СХЕМА НАПОНСКОГ СТАЊА (ОКОЛИНА ТАЧКЕ А)



$$\sin 2\alpha_{1,2} = \pm \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}}; \cos 2\alpha_{1,2} = \pm \frac{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}}$$

ОСТАЛИ СЛУЧАЈЕВИ:



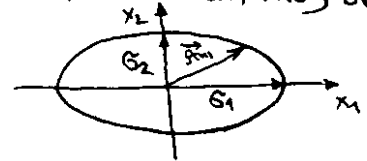


Ако пак уместо ос  $x_1$  и  $x_2$  изводимо главне осе напона  $x_1^* \equiv (1)$  и  $x_2^* \equiv (2)$  ваља да  $\sigma_{11} = \sigma_1$  и  $\sigma_{22} = \sigma_2$ ,  $\sigma_{12} = 0$  па је екстремна вредност симетричних напона  $\sigma_{11} = \sigma_1$  и  $\sigma_{22} = \sigma_2$  и  $\tau_{12} = 0$

$$\tau_3 = \tau'_3 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \Rightarrow \beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \pi/4 \text{ па закључујемо:}$$

У случају двосног стања напона у тачки тела, од свих пресечних равни управних на ненапрегнуту равни, симетрични напони имају екстремне вредности за оне које представљају равни симетрије за главне правце напона и по апсолутној вредности су једнаке половици разлике главних напона.

У случају тросног стања напона, обзиром на то да је један од главних напона једнак нули, очигледно да се се елипсод напона дегенерише у ЕЛИПСУ НАПОНА који лежи у ненапрегнутој равни.  
 За елипсе  $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$  велика оса елипсе је  $\sigma_1$   $\sigma_1 > \sigma_2$   
 а мала оса елипсе је  $\sigma_2$



### 2.12.3 Моир-ов круг напона

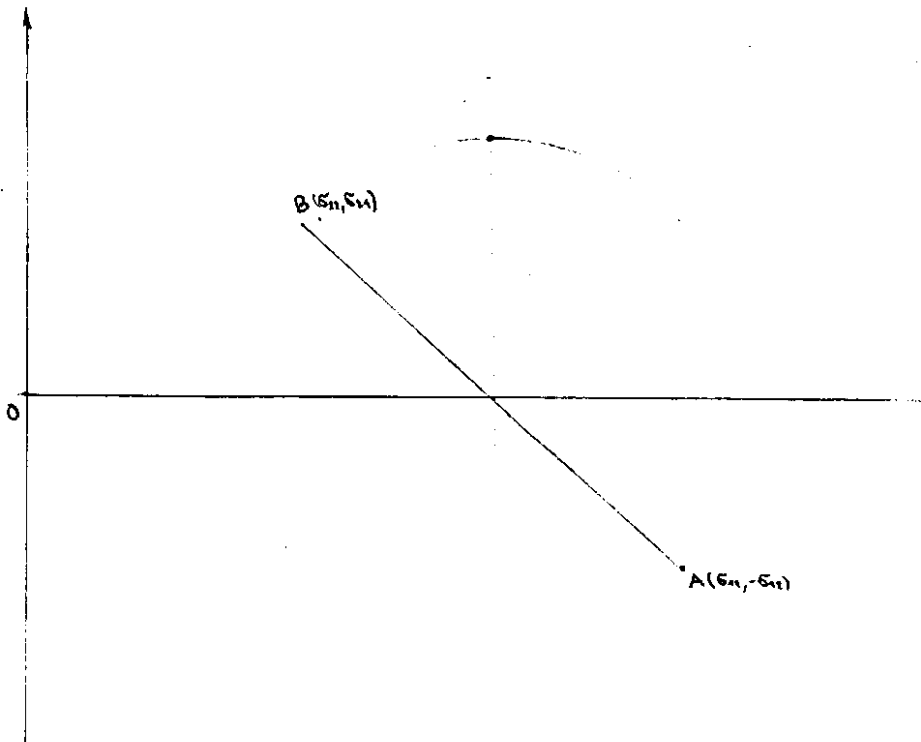
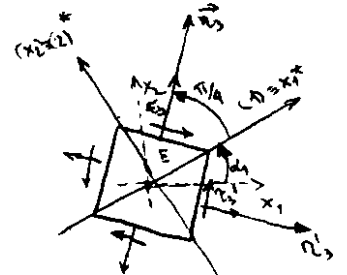
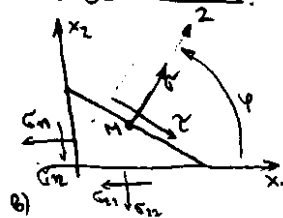
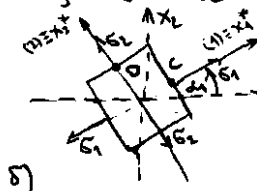
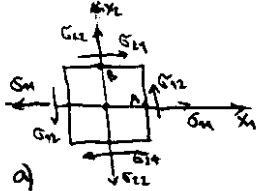
Решавајући ово прејобичај питање се и графички прилагодимо ако се 3-те тачке из облику

$$\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\varphi + \sigma_{12} \sin 2\varphi \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\varphi - \sigma_{12} \cos 2\varphi$$

и ако је тежакитине квантити и приметимо релацију  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  добијемо:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 \Leftrightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \text{ где је } r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = SA$$

Четврта тачка круга је изабавеног координатног почетка за  $\sigma_3 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ .



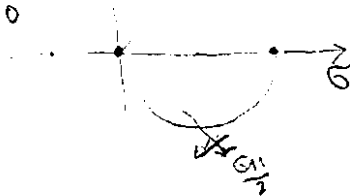
# • СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ РАВАНСКОГ СТАЊА НАПОНА

## ① ЈЕДНООСИНО (ЛИНИЈСКО) СТАЊЕ НАПОНА

- само један главни напон је различит од нуле, остало специјалан случај

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{11} \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_{11}}{0}$$



## ② ИЗОТРОПНО СТАЊЕ НАПОНА

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{12} = 0$$

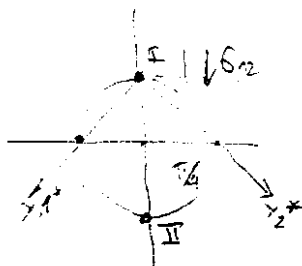
Можемо имати деформације у сваком правцу.

Изоотропно је, јер је стање напона исто у свакој површини нормалне на деформацију равни.

## ③ ЧИСТО СВИЦАЊЕ

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \quad \sigma_{12} = \tau_{21} \neq 0$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau = \sigma_{12}$$

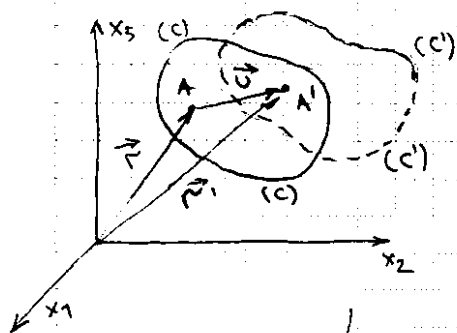


# **ANALIZA DEFORMACIJA**



# АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЈА

Под утицајем спољашњих сила тело се деформише, тј. мења свој облик и запремину. Међутим тело се може деформисати избој промене температуре, влажности, промене своје структуре итд.

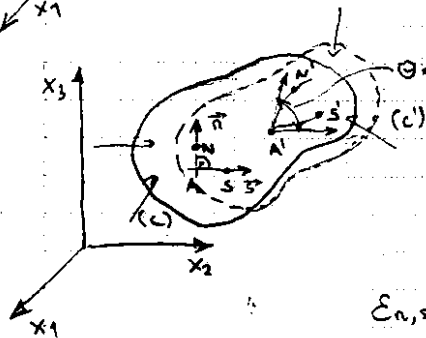


$\vec{U} = \vec{r}' - \vec{r}$  вектор  $\vec{U}$  се назива вектор померања тачке А изазвано деформацијом тела.

Ограничавамо се на изучавање само малих (инфинитезимальних) деформација

## \* ДИЛАТАЦИЈА И КЛИЗАЈЕ

Деформација тела, осим померања, може се изразити и другим величинама које карактеришу интензитет промене облика и запремине. Те величине су дилатације, клизања или једноставно деформације.



Посматрамо у напрећеном телу произвољну тачку А и две међусобно ујавне праве кроз ту тачку одређене јединичним векторима  $\vec{s}$  и  $\vec{s}'$ . Дужица  $\overline{AN}$  и  $\overline{AS}$  мењају своју дужину а прав угао  $\angle SAN$  се мења у угао  $\angle S'A'N'$ .

$$\epsilon_{n, sr} = \frac{\overline{A'N'} - \overline{AN}}{\overline{AN}} \quad \text{и} \quad \gamma_{ns, sr} = \angle SAN - \angle S'A'N' = \frac{\pi}{2} - \angle S'A'N'$$

средње издужење средња промена угла

Ако спроведемо гранични прелаз тако да тачка N тежи тачки А по правој  $\vec{s}$ , а тачка S истој тачки А по правој  $\vec{s}'$ , тада деформацијске величине у тачки А дефинишемо изразима.

$$\epsilon_n \equiv \epsilon = \lim_{N \rightarrow A} \frac{\overline{A'N'} - \overline{AN}}{\overline{AN}}$$

дилатација

$$\gamma_{ns} \equiv \gamma = \lim_{N \rightarrow A, S \rightarrow A} \left( \frac{\pi}{2} - \angle S'A'N' \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

клизање

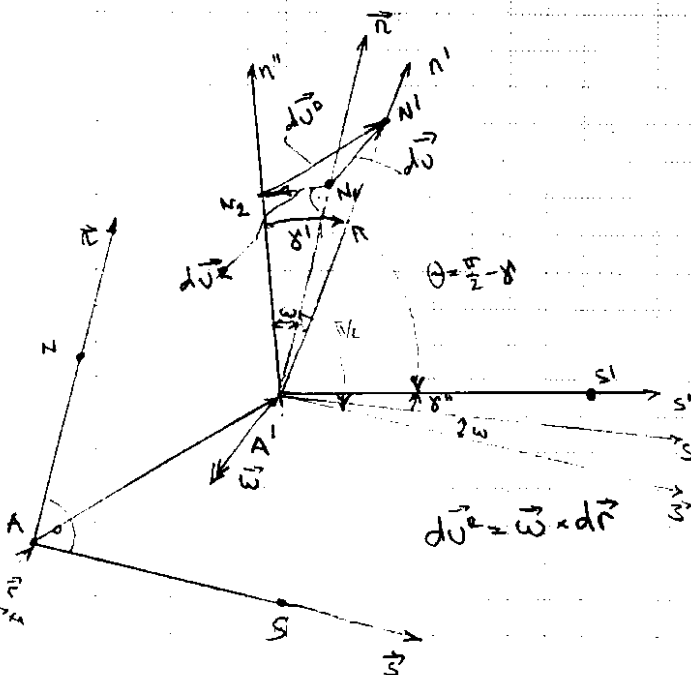
## • основни принцип анализе напона

дилатација је квантитативно се дужица повећава, клизање позитивно ако се прав угао смањује,

Вектор померања у околини сваке тачке деформационог тела може се изразити као збир трансляционих, ротационих и деформационих компоненти.

Везе између компоненти деформације и компоненти вектора померања  $\vec{U}(U_1, U_2, U_3)$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \quad \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)$$



Видно дакле да се вектор померања у произвољној тачки N из околине тачке А може изразити као збир

- ① ТРАНСЛАЦИОНЕ КОМПОНЕНТЕ  $\vec{U}$  која је једнака вектору померања у тачки А.
- ② РОТАЦИОНЕ КОМПОНЕНТЕ  $d\vec{U}^r$  која је последица мале ротације посматраног елемента као кротог тела за угао  $\omega$  око тренутне осе ротације одређене вектором  $\vec{\omega}$ .
- ③ ДЕФОРМАЦИОНЕ КОМПОНЕНТЕ  $d\vec{U}^d$  која је последица чисте деформације елемента тела одређене деформационог тензора: мале деформације у тачки А.

$$d\vec{U}^d = \epsilon_{ij} dx_j \vec{e}_i$$

Деформација сваког елемента тела састоји се из трансляције, ротације и чисте деформације.

# \* ЧИСТА ДЕФОРМАЦІЯ ЕЛЕМЕНТА ТЕЛА У ОКОЛИЦІ ТАНКЕ







## \* ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ПРИ СТАТИЧКОМ ОПТЕРЕЋЕЊУ

Један од основних задатака ОМ јесте одређивање димензија носећих елемената у конструкцијским конструкцијама. При томе, сигурност конструкција ни у ком случају не сме да дође у питање. Димензије конструктивних елемената морају се одредити тако да под дејством спољашњег оптерећења нигде не дође до значајне пластичне деформације или преломе. Али до ње пак дође, кажемо да је дошло до лома у тој тачки. За димензионисање у сложеним условима оптерећења потребно је знати која су то критична стања напона при којима долази до лома у некој тачки.

### • ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ПРИ ЈЕДНООСНОМ НАПРЕЗАЊУ, КОЕФ. СИГУРНОСТИ

У случају једноосног напона могуће је критичну величину напона  $\sigma_k$  када наступи лом узети из теста истезања. Минималну димензију штапа одређујемо тако да стварни напон у штапу буде знатно мањи од критичног  $\sigma_k$  да буде мањи од дозвољеног напона  $\sigma_d$  који представља количник измеђ  $\sigma_k$  и  $\gamma$  - коефицијента сигурности.

$$\sigma_k = \sigma_t \text{ код зливних}$$

$$\sigma_k = \sigma_m \text{ код крхких}$$

$$\sigma \leq \sigma_d \quad \begin{cases} \sigma_d = \frac{\sigma_t}{\gamma_t} \\ \sigma_d = \frac{\sigma_m}{\gamma_m} \end{cases}$$

$$1 \leq \gamma \leq 10$$

• СМИСЛО КОЕФ. СИГУРНОСТИ

① уводи се јер се не познају довољно тачне механичке и карактеристичке материјала нити природа и величина оптерећења

② у коефицијенту сигурности израчунају се и грешке и одсуштаје у процесу извођења конструкција

### • ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ПРИ ТРООСНОМ НАПОНСКОМ СТАЊУ, ХИПОТЕЗЕ О ЛОМУ

Најталосни до сада не поседују општа теорија која поуздано може предвидети појав лома у условима произвољног троосног стања напона. Због тога су створене хипотезе о лому. Да би смо на крају поступак димензионисања свели на и поступак као код једноосног напона убацимо и појам УПОРЕДНИ НАПОН  $\sigma$

#### I хипотеза највећег нормалног напона

Лом настаје када највећи нормални напон достигне критичан напон  $\sigma_k$  ( $\sigma_t$  или  $\sigma_m$ ) при једноосном стању напона.  $\sigma_{v,1} = \sigma_{\max} \leq \sigma_d$  где је  $\sigma_{v,1}$  упоредни напон

$\sigma_{\max}$  је највећи напон по апсолутној вредности а  $\sigma_d$  дозвољени напон при једноосном стању напона

#### II хипотеза највеће дилатације

По овој хипотези упоређујемо апсолутну вредност највеће дилатације  $\epsilon_{\max}$  услед стања напона са највећом дилатацијом при једноосном стању напона

$$\epsilon_{\max} \leq \epsilon_d = \frac{\sigma_d}{E}$$

#### III хипотеза највећег смичућег напона ~ трескини због тензија

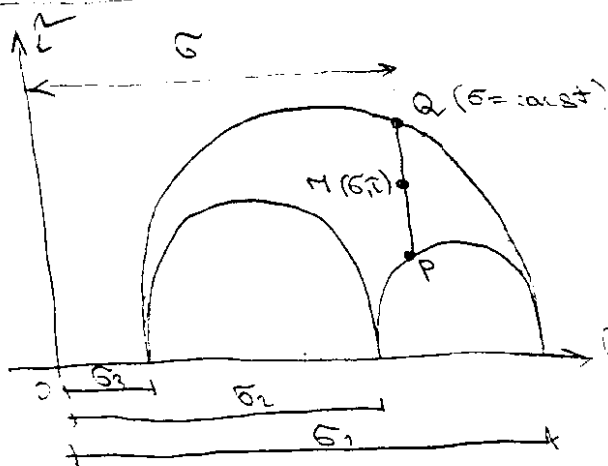
По овој хипотези до лома долази када највећи напон смичања  $\tau_{\max}$  досегне неку вредност напона смичања на граници течења при једноосном стању напона

$$\tau_{\max} \leq \tau_d = \frac{1}{2} \sigma_d \quad \text{јер је } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$$

#### IV хипотеза највеће енергије дилатације

До лома долази када специфична енергија дилатације достигне граничну вредност енергије дилатације на граници течења  $\sigma_{td} \leq (U_0)_d$

# МОРОВА ХИПОТЕЗА КОША



Свакој пресециј рвни кроз посматрану тачку тела одговара нека тачка  $M(\sigma, \tau)$  унутар шрафиране покривне омеђене Моровим криволинија напона.

Тачке које се налазе на дужи  $PQ$  одговарају равнина са истим нормалним напонима и различитим сличним напонима.

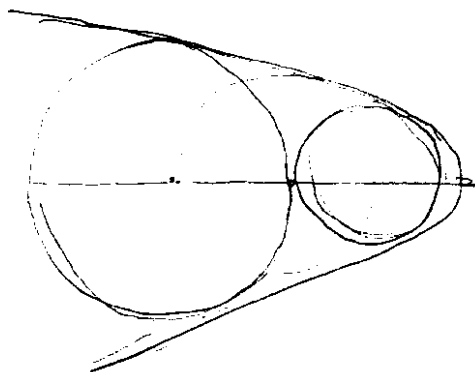
Најкритичније стање напона ће бити за ону равнину за коју је слични напон највећи, а тиме за равнину којој одговара тачка  $Q$ , која се налази на највећем Моровом кругу.

Дакле, највећи (сплошни) Моров круг који је одређен главним напонима  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  је довољан за одређивање критичног стања напона.

## ПОСТУПАК

Експериментално се утврде стање напона (критична) при којима настаје лом у случају једноосног стања напона и у случају чистог ситцања. Нацртају се одговарајући Морови кругови а затим и обвојница тих кругова.

Према Моровој хипотези критично је оно стање напона за које највећи Моров круг напона додирује или сече обвојницу кругова напона.



# KONSTITUTIVNE JEDNAČINE



## \* КОНСТИТУТИВНЕ Ј-НЕ

Конститутивне ј-не обично описују понашање различитих материјала у различитим условима. Да би смо могли да формулирамо ј-не које описују понашање материјала под дејством спољашњег оптерећења потребно је упознати се са унутрашњом структуром материјала.

### • СТРУКТУРА МАТЕРИЈАЛА

- аморфна нпр. гума показује иста механичка својства у свим правцима - изотропија
- кристална - кристална структура - разл. мех. својства у раз. правцима - анизотропија дево оптики
- кристаласта нпр. метал састоји се од великог броја малих кристала различитих величина и оријентације. Материјал се као целина понаша изотропно

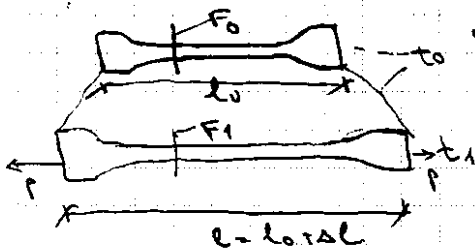
ПОДЕЛА НА → ХОМОГЕНЕ - иста механичка својства по целој својој запремини (аморфни и појединачни кристали)  
 → НЕХОМОГЕНЕ - бетон, метали

### • ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ ПОДАЦИ

За испостававање конститутивних ј-на примењују се знања из многих наука у којима се молекуларну физичку, металургију али и она нису довољна па се морају користити и резултати добијена експерименталним путем.

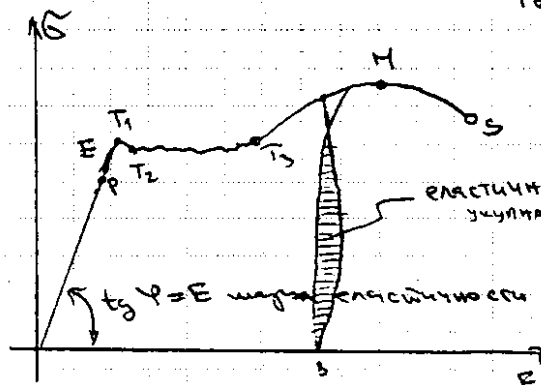
#### РАДНИ ДИЈАГРАМ МАТЕРИЈАЛА

Испитивање штапа



• Номинална (инжендерска)  $\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$

• Номинални (инжендерски) напон  $\sigma = \frac{F}{F_0}$



Еластични хистерезис  
 укупна деформација  
 $\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl}$   
 еластична пластична

- од ОР линеарна веза  $\sigma$  и  $\epsilon$   
 еластичне деформације (при уклањању оптерећења би се вратиле у првобитно стање)

- од  $P$ - $E$  нелинеарна веза  $\sigma$  и  $\epsilon$  али су деф. и даље еластичне  
 $\sigma_E$  - граница еластичности

-  $E$ - $T_1$  - почињу пластичне деформације  
 почиње нагло смањење напона и повећање деформација.

$\sigma_{T_2}$  = напон течења (зг. великих издужења)

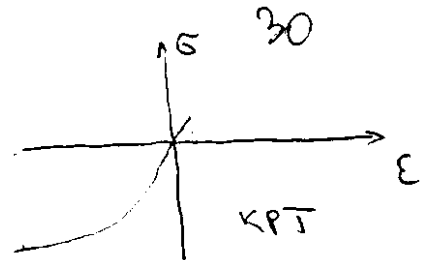
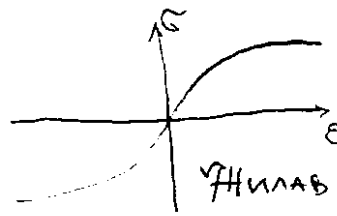
$T_2 T_3$  тело више не брзица никаквог отпора деформације

- до  $T_3$  -  $M$  то је орачање материјала - последица промене у унутрашњој структури материјала

= напон  $\sigma_S$  јесде напон при лому

$\sigma = E \cdot \epsilon$  код бетона нема прецизно израчунате  
 јединице течења већ се за њу своја конвенционална од  $2\% = 0,002$

## 2. ХИЛАВОСТ МАТЕРИЈАЛА



- КРТИ МАТЕРИЈАЛИ ЛОМЕ СЕ НАГЛО БЕЗ ПРЕХОДНО ИЗРЕТЕНЕ ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ (ОПЕКА, СТАКЛО, БЕТОН, КАМЕН)

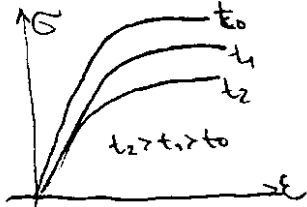
## 3.4.5 - ПЛАСТИЧНИ И ЕЛАСИЧНИ МАТЕРИЈАЛИ И ЕЛАСТИЧНИ ХИСЕРЕЗИС

⑥ **BAUSCHINGER-ОВ ЕФЕКАТ** - Ако оптерећимо тело преко границе еластичности, а затим му променимо смер оптерећења, добијемо нижу границу еластичности за оптерећење промијењеног смера у односу на смер почетног оптерећења. То је последица дејства зно-синах напона и поремећаја остатака у структури претходним оптерећењем у змацису

⑦ **ЕФЕКАТ АНИЗОТРОПИЈЕ** - ИЗОТРОПАН МАТЕРИЈАЛ ПРИ ПЛАСТИЧНОМ ДЕФОРМИСАЊУ ПОСТАЈЕ АНИЗОТРОПАН.

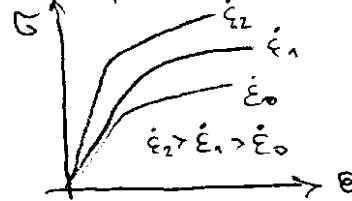
⑧ **УТИЦАЈ ТЕМПЕРАТУРЕ**

ПОВЕЋАЊЕ ТЕМПЕРАТУРЕ ЗРАНИЦУ ЕЛАСТИЧНОСТИ



⑨ **УТИЦАЈ БРЗИНЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ**

ПОВЕЋАЊЕМ БРЗИНЕ ДЕФ. ПОВИШАВА СЕ ГРАНИЦА ЕЛАСТИЧНОСТИ



⑩ **ВИСКОЗНИ ЕФЕКАТ**

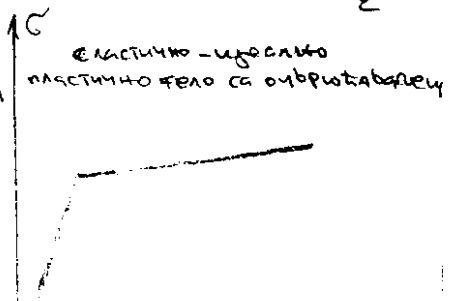
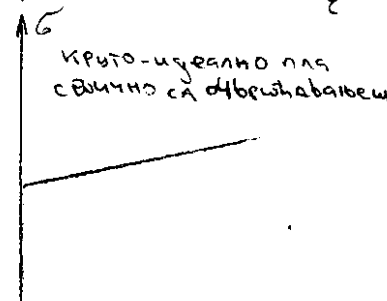
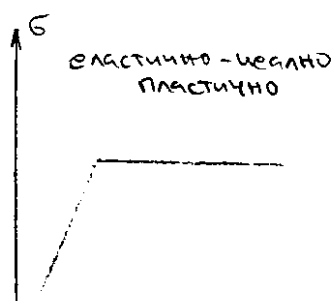
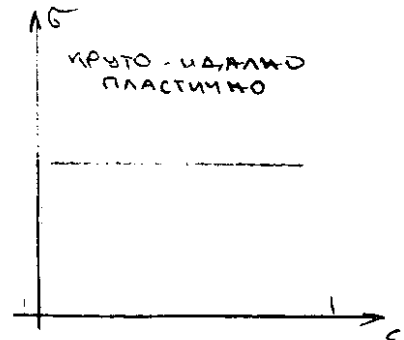
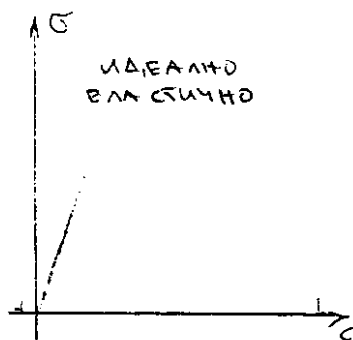
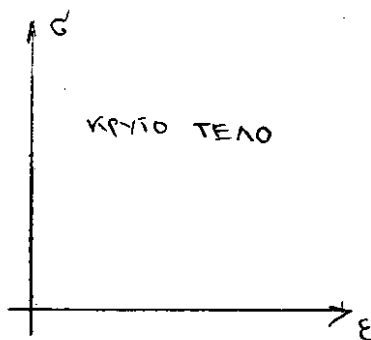
Вискозност је својство тела да деформација расте са временом и при константном напону. Ако нпр. спробијемо истезањем до неке деформације и држимо је константно напон ће се смањивати.

Вискозност је карактеристична за флуидна тела, а код чврстих тела углавном се јавља са еластичним и пластичним својствима материјала па тако имамо

- вискоеластични и вископластични материјали

## ● ИДЕАЛНА ТЕЛА И ЊИХОВИ РЕОЛОШКИ МОДЕЛИ

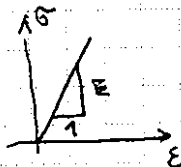
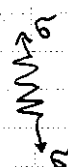
УВОДИМО СГРЕЖЕНА УПРОВАЋЕЊА У КОНСТИТУТИВНИ ВЕЗАМА С ЦИЉЕМ ДА ДОБИЈЕМО ЈЕДНОСТАВНЕ али и довољно опште. У том циљу уводимо одређене идеализације у поимању тела под оптерећењем тзв. ИДЕАЛНА ТЕЛА.



РЕОЛОШКИ МОДЕЛИ - постоје су који јер нису могу дају квантитативну представку о понашању различитих материјала под оптерећењем

## ① ИДЕАЛНО ЕЛАСТИЧНО ХУКОВО ТЕЛО (H)

модел истезајте еластичне опруге

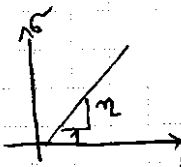


$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

## ② НУТНОВО ТЕЛО (Вискозан Флуид)

- крми који се креће кроз отпорну средину

$\eta$  - коеф. вискозности

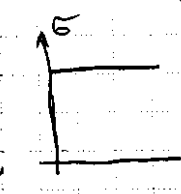


$$\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon}$$

## ③ ИДЕАЛНО ПЛАСТИЧНО ТЕЛО (Bv)

глеточе мету који на посвојим суво шрење

бт. напон тежења



$$\sigma = \sigma_r$$

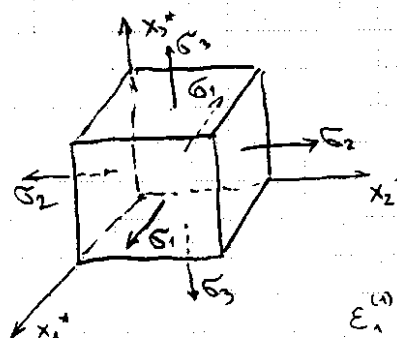
## • КОНСТИТУТИВНЕ ЈНЕ ЗА ХУКОВО ТЕЛО (једноосно напрезање)

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} \quad \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} \quad \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} \quad \text{где је } \nu - \text{ Пуасонов коефицијент бојне контракције}$$

Моул еластичности има димензију напона

\* Пуасонов коеф. је бездимензионалан и за већину метала  $\nu \approx \frac{1}{3}$  а за бетон  $\approx \frac{1}{6}$

## • КОНСТИТУТИВНЕ ЈНЕ ЗА ЦИТОПАН МАТЕРИЈАЛ (HOOK - ТРООСНО НАПРЕЗАЊЕ)



Знајући да се осови главних напона поклапају са главним правцима дилатација. Уочимо катар чије се ивице паралелне са правцима главних напона у тој тачки

Експерименти су показали да за мале еластичне деформације важи принцип суперпозиције тј да је дилатација од свих главних напона = збир дилатација од појединих гл. на.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1^{(1)} &= \frac{1}{E} \sigma_1 & \epsilon_2^{(1)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1 & \epsilon_3^{(1)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1 \\ \epsilon_1^{(2)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_2 & \epsilon_2^{(2)} &= \frac{1}{E} \sigma_2 & \epsilon_3^{(2)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_2 \\ \epsilon_1^{(3)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_3 & \epsilon_2^{(3)} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_3 & \epsilon_3^{(3)} &= \frac{1}{E} \sigma_3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}$$

ЗА ПРОИВОЛОЖИ ТРЕДНАТ

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}$$

Зегне где међусобно независне константе узимамо  $\nu$  и  $E$ . Из практичних разлога узимамо и две константе које се изражавају преко њих.

• модул кривања  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

• КУБНА ДИЛАТАЦИЈА  $\rightarrow$  модул компресије  $E = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \bar{\sigma}$  где је  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$   
 $\hookrightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \dots \dots c = \frac{1}{K} \bar{\sigma}$

• Ламе-ове константе  $(\mu, \lambda) \dots \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$\rightarrow$  развијеном облику  $\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \epsilon_{11} + \lambda e & \sigma_{12} &= 2\mu \epsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= 2\mu \epsilon_{22} + \lambda e & \sigma_{23} &= 2\mu \epsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= 2\mu \epsilon_{33} + \lambda e & \sigma_{31} &= 2\mu \epsilon_{31} \end{aligned}$

Конститутивне јне за изотропно тело формулисане су као

$\epsilon = C \cdot \sigma \quad \text{и} \quad \sigma = D \cdot \epsilon$

• МАТРИЦА  $C$  флексибилности

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

• МАТРИЦА  $D$  крућости

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

• КОНСТИТУТИВНЕ ЈНЕ ЗА АНИЗОТРОПАН МАТЕРИЈАЛ

За изотропног материјала  $C$  и  $D$  нису друге путање  $6 \times 6$  али већ код анизотропног материјала је то случај

МАТРИЦА  $C$  је симетрична па сајмо 21 од њених 36 елемената су лин. независни.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & & & \\ C_{31} & & & & \\ C_{41} & & & & \\ C_{51} & & & & \\ C_{61} & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad D = C^{-1}$$

КОД АНИЗОТРОПНОГ МАТЕРИЈАЛА ПРАВИЦИ ГЛАВНИХ НАПОНА И ДИЛАТАЦИЈА СЕ НЕ ПОКЛАПАЈУ,

УПОДОБНО ТЕЛО ИМА РАВНА ЕЛАСТИЧНА СИМЕТРИЈА СА 21 СИМБОЈА СЕ НА 13, НЕЗАВИСНИХ

А АКО ЈЕ У ПИТАЊУ ОРТОТРОПИЈА, КАДА ТЕЛО У Датој Тачки ИМА ТРИ МЕЊУСОБНО ОРТОГОНАЛНА ЕЛАСТИЧНА РАВНА СИМЕТРИЈА БРОЈ НЕЗАВИСНИХ СЕ СИМБОЈА НА 9

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Због симетричног матрице еластичности

$$\epsilon_{11} = C_{11} \sigma_{11} + C_{12} \sigma_{22} + C_{13} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{22} = C_{21} \sigma_{11} + C_{22} \sigma_{22} + C_{23} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = C_{31} \sigma_{11} + C_{32} \sigma_{22} + C_{33} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{12} = C_{44} \sigma_{12} \quad \text{или} \quad C_{11} = \frac{1}{E_1} \quad C_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} \quad C_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3}$$

$$\epsilon_{13} = C_{55} \sigma_{13}$$

$$C_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \quad C_{22} = \frac{1}{E_2}$$



### \* ЈЕДНАЧИНЕ ЛИНЕАРНЕ ТЕРМОЕЛАСТИЧНОСТИ

оде је не описује на изотропан еластичан материјал за случај када не долази до промене температуре тела у току деформације. Ако се узима и утицај температуре, када на деформације услед напона  $\epsilon_{ij}(\sigma)$  треба додати и деформације услед промене температуре  $\epsilon_{ij}(t)$

$$\Rightarrow \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\sigma) + \epsilon_{ij}(t) \quad \text{где је } \epsilon_{ij}(t) = \alpha \Delta t \delta_{ij}$$

где је  $\alpha t = t - t_0$   
 $\alpha$  - коеф. линеарне термичке експанзије  
 нума за  $i \neq j$   
 $\alpha = 1/3 \alpha' \quad \alpha' = j$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha \Delta t; \quad \epsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} = \frac{1}{2G} \sigma_{22}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha \Delta t; \quad \epsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{2G} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha \Delta t; \quad \epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = \frac{1}{2G} \sigma_{23} \quad \text{то је } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ово су Neumann-Dulamech - ове ј-не линеарне термоеластичности  
 3 $\alpha$  - коефицијент кућне експанзије

### \* ЛИНЕАРНО ВИСКОЕЛАСТИЧНО ТЕЛО

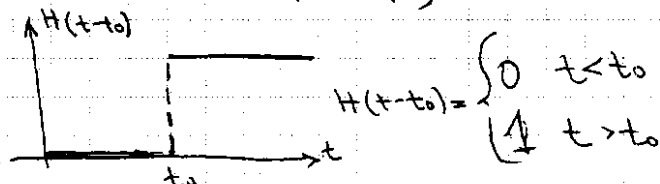
Комбинацијом идеално еластичног тела и вискозног флуида могу се додати вискоеластични материјали којима се у одређеним условима може апроксимирати понашање неких реалних материјала. Већи број фактор при формулацији конститутивних ј-на за вискоеластичан материјал јесте ВРЕМЕ

Тако да ти се одређено тренутно понашање тела неопходно је познавати штаву историје деформисања. Разгледано само ти модела, Maxwell-ов, Kelvin-ов и стигерли модел

Два основна теста који се врше код вискоеластичног материјала јесу

- ① пузање ② релаксација напона

HEAVISIDE - ова функција



• Maxwell-ов модел - састоји се из Хуковог тела и Њутновог који су везани серијски услед деловања напона  $\sigma$  деформација ће бити једнака збиру деформација

$\epsilon_1$  - Хуновог тела и  $\epsilon_2$  - Њутновог тела.  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$

Ако обе ј-не диференцирамо по времену  $\left[ \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon} \right]$  ово је диф ј-на при једнооси напона



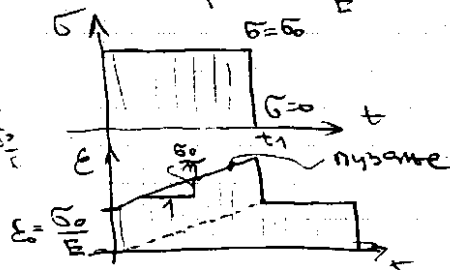
- ① ТЕСТ ПУЗАЊА замислимо да смо модел нагло оптерећили напоном  $\sigma_0$  у тренуту  $t=0$  а да се напон остаје константан тј  $\sigma = \sigma_0 \quad t \geq 0$   
 где је  $H(t)$  примењена за  $t_0=0$ .  $\sigma = \sigma_0 H(t)$

Одмах по оптерећевању доћи ће до тренутне деформације  $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$  а затим и до даљег постојања деформације временом.

$$\text{из } \sigma = \sigma_0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0 \text{ const} \Rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}$$

$$\text{тако да је } \epsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t, \quad t \geq 0$$

$$\text{или ти } \epsilon = \left( \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \right) H(t)$$



## \* ТЕСТ РЕЛАКСАЦИЈЕ НАПОНА

33

Модел оптеретио нагло до напона  $\sigma_0$  које одговара еластична деформација  $\epsilon_0$ , а затим збогу деформације спречимо

$$\epsilon = \epsilon_0 \quad t > 0 \quad \text{односно} \quad \dot{\epsilon} = \epsilon_0 \delta(t)$$

Како ћемо пратити напон у току времена из  $\dot{\epsilon} = 0$  или је

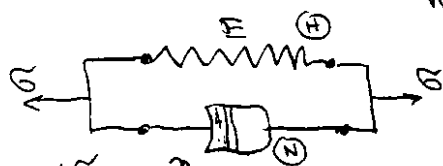
$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma = 0 \quad \text{одне интеграцијом} \quad \sigma = A \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad t \geq 0$$

а интеграциону константу одређујемо из почетних услова  $t_0 = 0 \quad \sigma = \sigma_0 = E \epsilon_0$

$$\Rightarrow A = E \epsilon_0 \Rightarrow \sigma = E \epsilon_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad t \geq 0 \Rightarrow \sigma = [E \epsilon_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t}] \cdot H(t)$$

$$t_* = \frac{\eta}{E} \quad \text{јесте време релаксације}$$

\* КЕЛВИНОВ МОДЕЛ - састоји се из Хуковог и Вутовог тела који су повезани паралелно



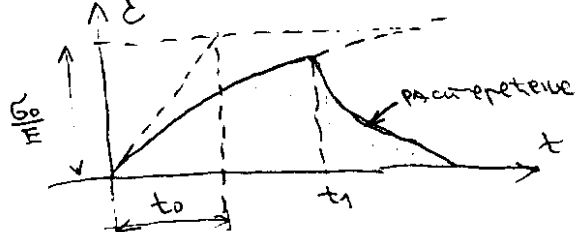
Објект је напон једнак збогу напона који преноси опруга и вискозни елемент  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

А деформација једнака и збогу елемената је иста  $\Rightarrow \sigma_1 = E \epsilon$  и  $\sigma_2 = \eta \cdot \dot{\epsilon}$

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon}$$

Јли већина напона оптеретивању ( $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ ) материјал се понаша као еластичан тј

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$



Уколико у тренутку  $t=0$  нагло оптеретио напонам  $\sigma_0$  и одржавамо га константним  $\sigma = \sigma_0 \dots t \geq 0$  или  $\sigma = \sigma_0 \cdot H(t)$

тада зна  $\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$  постаје  $\dot{\epsilon} + \frac{E}{\eta} \epsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}$   
интеграцијом из почетних услова  $t=0 \Rightarrow \epsilon=0 \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) \quad t \geq 0$

$$\text{односно} \quad \epsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{t_*}}) H(t) \quad t_* = \frac{\eta}{E} \quad \text{време релаксације}$$

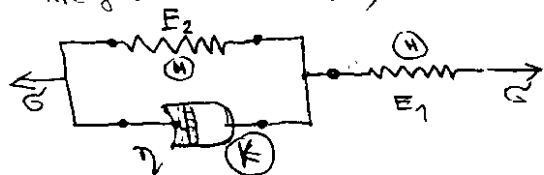
Ако модел расцеређујемо у тренутку  $t=t_1$

$$\sigma = \sigma_0 [H(t) - H(t-t_1)] \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon = \frac{\sigma_0}{E} [(1 - e^{-\frac{t}{t_*}}) H(t) - (1 - e^{-\frac{t-t_1}{t_*}}) H(t-t_1)]$$

за  $t \leq t_1$  важи релација \* а за  $t > t_1$  важи  $\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} e^{-\frac{t}{t_*}} (e^{\frac{t_1}{t_*}} - 1)$   
 $t > t_1$

## \* СТАНДАРДНИ МОДЕЛ

представља серијску везу између Келвиновог и Хуковог тела



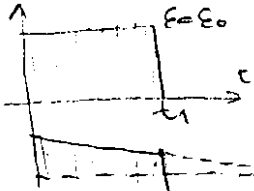
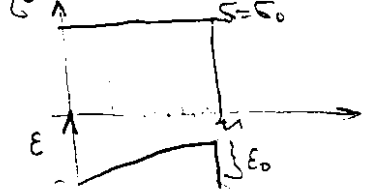
$$\epsilon = \epsilon_n + \epsilon_k$$

$$\epsilon_n = \frac{\sigma}{E_1}$$

$$\epsilon_k = \epsilon - \frac{\sigma}{E_1}$$

С друге стране за Келвинов материјал важи  $\sigma = E \epsilon_k + \eta \dot{\epsilon}_k$

$$\text{Елиминацијом } \epsilon_k \text{ из једн. * и *} \Rightarrow E_1 \eta \dot{\epsilon} + E_1 E_2 \epsilon = \eta \dot{\sigma} + (E_1 + E_2) \sigma$$



$$\sigma_{\infty} = \frac{E_2}{E_1 + E_2} \sigma_0$$

Ако оптеретио модел  $\epsilon_0 \quad \sigma = \sigma_0 H(t)$   
зна постаје  
 $\dot{\epsilon} + \frac{E_2}{\eta} \epsilon = \frac{E_1 + E_2}{\eta E_1} \sigma_0$   
а за  $\epsilon = \epsilon_0 H(t)$

## ОДРЕЂИВАЊЕ НАПОНА И ДЕФОРМАЦИЈА У НАПРЕГАУТОМ ТЕЛУ

### • ФОРМУЛАЦИЈА ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

Основни задатак теорије еластичности састоји се у одређивању компонента померања  $u_i$ , компонента напона  $\sigma_{ij}$  и компонента деформација  $\epsilon_{ij}$  у тачкама напрегнутог тела, ако су познати његови геометрија и материјал као и спољно оптерећење.

У случају идеално еластичног тела имамо укупно 15 независних функција

(3 од померања, 6+6 напон и деформације) које се могу добити решавањем система ј-та. Како у том систему егзистира ј-та једн-гоне је би решавање система било једнозначно морамо поставити и следеће услове - тзв контурне (граничне) што:

#### • ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ПО ПОМЕРАЊИМА

$u_i = u_i^*$  и/или их ако су задате све три компоненте померања у тачкама контуре тела

$$u_1 = u_1^* \quad u_2 = u_2^* \quad u_3 = u_3^*$$

#### • ГРАНИЧНИ УСЛОВИ ПО СЛАМАМА - и/или их ако су тачкама контуре тела са јединичним вектором $\vec{n}$ знамените нормале задате спољашње површинске силе $\vec{p}$ (N)

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = p_1^{(n)}$$

$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = p_2^{(n)}$$

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = p_3^{(n)}$$

#### • МЕШОВАТИ ГРАНИЧНИ УСЛОВИ и/или ако на једном делу контуре тела ( $S_u$ ) задате компоненте померања, а на преосталом делу ( $S_p$ ) задате спољашње површинске силе.

$$u_i = u_i^*(x_1, x_2, x_3) \text{ на делу } S_u \text{ контуре } S$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i^{(n)} \text{ на делу } S_p \text{ контуре } S$$

## \* МЕТОДЕ РЕШАВАЊА ПРОБЛЕМА ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ

Видели смо да се проблем теорије еластичности своди на решавање система ј-та 15 ј-та - 15 непознатих, иако у пракси је то због мање јер неке непознате елиминисамо.

### • Напог-ове - ите - код проблема у којима су гранични услови на целој контури тела дати по померањима.

$$\star \text{ Како је } \sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \delta_{ij} u_{k,k}$$

$$\text{ако је } \sigma_{11} = 2\mu \epsilon_{11} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{11}, \quad \sigma_{11} = 1 = \epsilon_{11} \quad \text{како је такође и}$$

$$\sigma_{11} = 0 \Rightarrow 1 \neq 1$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

следећи (\*) ово убацујемо у услове равнотеже

$$\Rightarrow \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_1 = 0$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_2 = 0$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_3 = 0$$

систем од 3 парова једначина по  $u_1, u_2, u_3$

## \* БЕНТРАМИ - МИМБЛОВЕ Ј-НЕ

35

За сва проблем у којима су гранични услови на целој контури дејелу дати по напону, могуће је формулисати проблем само преко компонента напона.

Замениш  $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  у услове компатибилности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

и када то изкомбинијемо са условима равнотеже добијемо

$$\sigma_{ij,jk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{ij} F_{kk} + F_{ij} + F_{j,i} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) + 2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) + 2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0$$

Лакше је бити ако одредимо ставе напона свуда у еластичном телу неопходно је решити пет храних Б-М бентрами-мимблових ј-на као и одређити равнотеже као и да задовољавамо граничне услове по напону.

**Закључак** систем ј-на који се састоји из услова равнотеже и Б-М ј-на еквивалентан је систему ј-на који се састоји од услова равнотеже, S-V компатибилности, и веза измеђ напона и деформација

\* **ПОЛУОБРАТНА МЕТОДА** ефикасно решење теорије еластичности било којом од наведених две методе није нимало лако чак и за наједноставнија тела и оптерећења реалним примером S-V полуобратне методе аналитичко решење се може упростити

фокус је да нешто унапред предвидимо у решењу и стога упростимо систем. Неке ј-не система бивају инерентички задовољене, а друге упростиће и преко њих нађемо остале решења.

\* **НУМЕРИЧКЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНЕ МЕТОДЕ** због развоја рачунара представљамо решавању ј-на теорије еластичности уз помоћ нумеричких метода али и експерименталних

\* **ЗАКОН СУПЕРПОЗИЦИЈЕ, S-V ПРИНЦИП**

Ако на тело истовремено дејују два система сила, тада су компоненте напона деформација и померања у сваком делу тела ова два система јединке збиром одговарајућих величина услед појединачног деловања сваког од тих система сила.

Ако извесну расподелу спољашњих сила које дејују на делу контуре тела заменимо неком другом расподелом сила које дејују на истом делу контуре тела, тада се утицаји ове две расподеле неће бити различити на деловима тела који су довољно удаљени од места деловања интересовања.

УПОРЕДОБ

S-V принцип

## \* ИДВАЛНО ПЛАСТИЧНО ТЕЛО

из  $\sigma$ - $\epsilon$  дијаграма у случају једноосног напрезања долази до значајних пластичних деформација када напон у тачки постане већи од напона на зрацици течења  $\sigma_T$ . Управљива због сложености имамо реализације

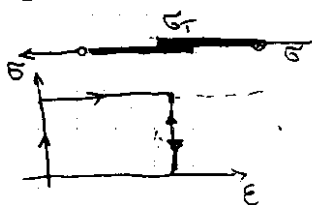
① крутопластичан модел

② еластопластичан модел

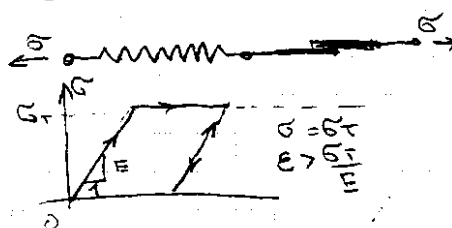
③ круто-пластичан модел са оцвршћавањем

④ еласто-пластичан модел са оцвршћавањем

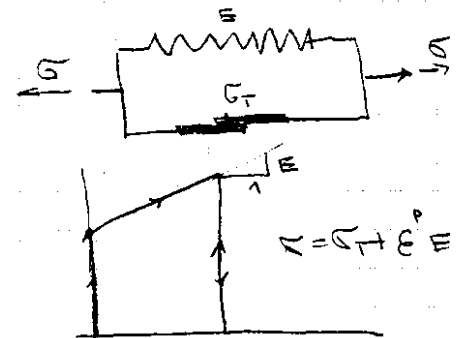
① КРУТО ПЛАСТИЧАН



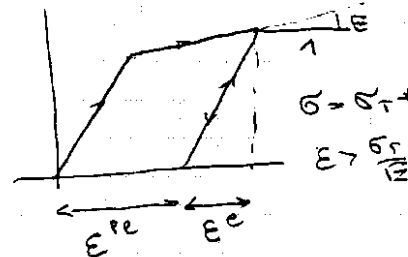
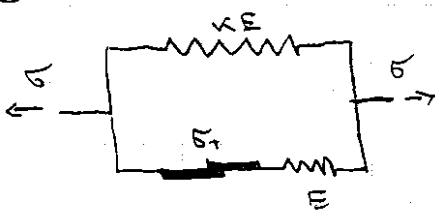
② ЕЛАСТО ПЛАСТИЧАН



③ КРУТО-ПЛАСТИЧАН МОДЕЛ  
са оцвршћавањем



④ ЕЛАСТО ПЛАСТИЧАН МОДЕЛ  
са оцвршћавањем



- УСЛОВ ТЕЧЕЊА МАТЕРИЈАЛА је највећи од беза измеђ компоненти тензора напона у посматраној тачки тела, која мора да буде већа од оног до пластичног течења материјала.

Код идеално пластичног материјала услов течења се може изразити ј-ном  $f(\sigma_{ij}) = 0$  где је  $f(\sigma_{ij})$  функција течења

У теорији пластичности два најчешће коришћених услова су Трескин и Мисесов

- ① ТРЕСКИНОВ УСЛОВ ТЕЧЕЊА - на основу многобројних експеримената које је извршио Трескин је дошао до закључка да у околини неке тачке пластично течење настану када максимални слични напон у тој тачки досегне неку критичну вредност

$$\sigma_{\max} = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} = k_T \text{ где је } k_T = \text{const и зависи од врсте материјала}$$

Како је случај једноосног напрезања (теж истезања)  $\sigma_1 = \sigma_T$ ,  $\sigma_3 = 0$  добијемо  $k_T = \frac{1}{2}$

па услов добија облику  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ , а функција течења  $f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_T$

- ② МИСЕЛОВ УСЛОВ ТЕЧЕЊА - пластична деформација у некој тачки настану када друга инваријанта тензора напона досегне неку критичну вредност

$$I_2' = -k_m^2 \Rightarrow I_2' = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} = -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2]$$

а  $k_m$  зависи од материјала.

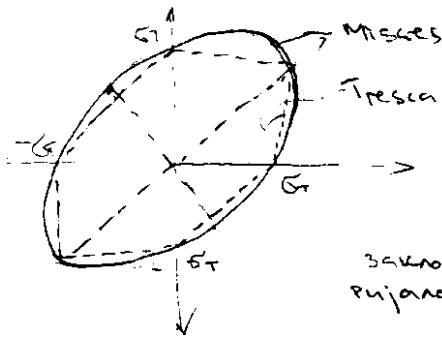
Функција течења  $f = -I_2' - k_m^2$  а константу  $k_m$  ћемо одредити из услова или из теста истезања када је од свих елемената тензора напона само  $\sigma_{11} \neq 0$

$$I_2' \text{ постаје} = -\frac{1}{6} \sigma_{11}^2 - \frac{1}{6} \sigma_{11}^2 = -\frac{1}{3} \sigma_T^2 = -K_m^2 \Rightarrow K_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_T$$

За случај, двосног (равносног стања напона) при  $\sigma_3 = 0$  Мисесов услов течења је

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 \text{ то представља елипсу, а Тресков услов течења}$$

шестостраник уписан у елипсу



### \* КОНСТИТУТИВНЕ ЈНЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Генерализацијом случаја девијантног напрезања Друкер те изведе закључак да за случај тросног напрезања и за идеалнопластичне материјале важи  $j$ -на  $d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p = 0$

Као последица ове релације следи да при свакој максимичној деформацији  $d\epsilon_{ij}^p$  течење  $\perp$  на површ течења у напонском простору, тј има правца нормалан на површ течења  $f$ . Из овог услова непосредно се формулише придружени закон течења

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ где је } d\lambda \text{ позитивна скаларна величина - обзиром да је}$$

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Rightarrow d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \sigma_{ij}^1 = d\lambda \sigma_{ij}^1 \text{ то су Prandtl-Reuss}$$

# **ENERGETSKI PRINCIPI I NJIHOVA PRIMENA**







## ГЛАВА VI --- ЕНЕРГЕТСКИ ПРИНЦИПИ

Посматрамо произволно еластично тело које је у почетку ненапрегнуто. Услед деловања спољашњих сила тело се деформише, па се и напоне тачке спољашњих сила померају и при том спољашње силе врше рад на тим померањима.

Рад, спољашњих сила троши се на повећање кинетичке енергије тела и на повећање његове унутрашње енергије.

$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i$  то је закон равнотеже са додатком компоненте инерцијалних сила

• ПРИРАСТАЈ РАДА СПОЉАШЊИХ СИЛА (површинских  $\vec{P}$  и запреминских  $\vec{F}$ )

$$dR = \int_S (\vec{P} \cdot d\vec{u}) dS + \int_V (\vec{F} \cdot d\vec{u}) dV = \int_S P_i du_i dS + \int_V F_i du_i dV$$

ако узмемо да је  $\sigma_{ij} n_j = P_i$  и узалучимо горе изазначено интеграл по површини са запреминским интегралом уз помоћ Г-О теореме!

$$(*) dR = \int_S \sigma_{ij} n_j du_i dS + \int_V F_i du_i dV = \int_V (\sigma_{ij,j} du_i + F_i du_i) dV + \int_V \sigma_{ij} du_{i,j} dV$$

$$= \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) du_i dV + \int_V \sigma_{ij} du_{i,j} dV \quad \sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{jij} u_{j,i}$$

Компоненте осовине симетрије деформационих  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  и брзе  $d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i})$

$$\sigma_{ij} du_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} du_{i,j} + \sigma_{ji} du_{j,i}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} du_{i,j} + \sigma_{ij} du_{j,i}) = \frac{\sigma_{ij}}{2} [du_{i,j} + du_{j,i}]$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} du_{i,j} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

$$\text{па } (*) \Rightarrow dR = \int_V (\underbrace{\sigma_{ij,j} + F_i}_{=\rho \ddot{u}_i}) du_i dV + \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV \Rightarrow dR = dT + dU$$

$$dR = \underbrace{\int_V \rho \ddot{u}_i du_i dV}_{\text{ПРИРАСТАЈ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕР.}} + \underbrace{\int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV}_{\text{ПРИРАСТАЈ УНУТРАШЊЕ ЕНЕР.}} \Rightarrow dR = dT + dU$$

Укупно тело поред спољашњих сила добија и топлотну енергију

$$\Rightarrow dR + dQ = dT + dU \text{ или у константној облику } R + Q = T + U$$

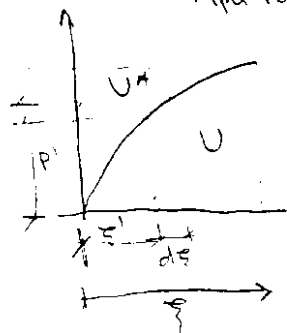
У овом разматрању сматраћемо да се интеракције налази постоје. То је случај статичког оптерећења. У том случају су брзине и убрзања свих делова тела знатно мање па се и кинетичка енергија може занемарити  $T=0$ . Прегледавши и да је процес деформације такав да је измена топлоте са околином занемарива  $Q=0$ .  $\Rightarrow R=U$  рад спољашњих сила троши се на повећање унутрашње силе.

Ако је тело еластично овај рад се може вратити у потпуности понашањем растерећеног тела. Можемо сматрати да се овај рад акумулира у деформираном телу у облику енергије. То је изв. енергије деформације

## \* НЕЛИНЕАРНО ЕЛАСТИЧНО ТЕЛО ИЗЛОЖЕНО ДЕЈСТВУ ЈЕДНЕ СИЛЕ

Нпр. штап је изложен дејству једне силе чију се интензитет  $P'$  постепено мења од нуле до коначне вредности  $P$ . У неком тренутку интензитета силе  $P'$  одговара издужење штапа  $\xi'$ .

При томе сила врши рад,  $dR = P' d\xi'$  а укупан рад,  $R = \int_0^{\xi} P' d\xi' = U$



ИСТО ТАКО ИМАМО И КОМПЛЕМЕНТАРНИ РАД

$$U^* = \int_0^P \xi' dP'$$

$U$  је површина испод криве

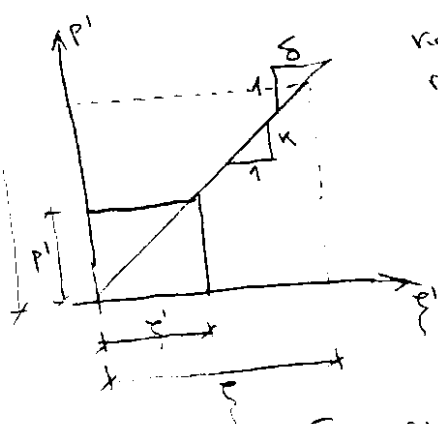
парцијалног интегр.  $U^*$  је изнад криве

$U + U^*$  је рад те тачке онај који би извршила сила

$$U^* = P\xi - \int_0^{\xi} P' d\xi' = P\xi - U \Rightarrow \underline{U^* + U = P \cdot \xi}$$

ФРИДРИХОВ СТАВ

## ЛИНЕАРНО ЕЛАСТИЧНО ТЕЛО



Код оваквог тела зависност  $P'$  од  $\xi'$  је линија  
па је  $U^* = U$

Зависност је линеарна  $P' = k \xi'$

$k$  то је коефицијент еластичности  $[\frac{N}{m}]$

$$U = U^* = \frac{1}{2} P \xi \quad \text{jer} \quad \int_0^{\xi} P' d\xi' = \int_0^{\xi} k \xi' d\xi' = \frac{1}{2} (k \xi) \xi = \frac{1}{2} P \xi$$

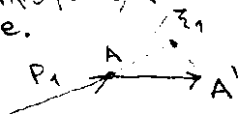
ИСТО ТАКО  $\xi' = \delta \cdot P'$

$\delta$  - коефицијент флексибилности  $k$  - коеф. кривости

## \* ГЕНЕРАЛИСАНЕ СИЛЕ И ГЕНЕРАЛНИ САНА ПОМЕРАЊА

Рассмотрим тело кометом у простору спречили његово кретање као крutoг тела и нека је изложено дејству система генералисаних сила  $P_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) при чему под термином генералисана сила подразумева било којецентри сама сила било момент.

Свакој генералисаној сили  $P_i$  одговара генералисано померање  $\xi_i$ , где  $\xi_i$  представља пројекцију померања на праву те тачке силе  $P_i$  ит. правцу деловања те силе.



У општем случају за генералисано померање у некоеј тачки тела не личи само генералисана сила која делује у тој тачки већ и све остале силе.

Дакле  $\xi_i = \xi_i(P_1, P_2, \dots, P_n)$  ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ од  $\xi_i$  јесте

$$d\xi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial P_j} dP_j = \sum \delta_{ij} dP_j \quad \text{где су} \quad \delta_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial P_j} \quad (i=1, \dots, n)$$

утицајни коефицијенти флексибилности

(интеграцијом

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j$$

$$\text{НА ИСТИ НАЧИН} \quad P_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} \xi_j$$

утицајни коеф. кривости

$$\xi_1 = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 + \dots + \delta_{1n} P_n$$

$$P_1 = k_{11} \xi_1 + k_{12} \xi_2 + \dots + k_{1n} \xi_n$$

$$\xi_2 = \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2 + \dots + \delta_{2n} P_n$$

$$P_2 = k_{21} \xi_1 + k_{22} \xi_2 + \dots + k_{2n} \xi_n$$

$$k_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j}$$

$$\xi_n = \delta_{n1} P_1 + \delta_{n2} P_2 + \dots + \delta_{nn} P_n$$



ПРИМЕР Уzmно зaтa тело дељује само генерална сила  $P_j$ , а све остале генералне силе су једнаке нули.

$\Rightarrow \sum_i \delta_{i1} \cdot 0 + \delta_{i2} \cdot 0 + \dots + \delta_{ij} \cdot P_j + \dots + \delta_{in} \cdot 0 = \delta_{ij}$  на систему  $\delta_{ij}$  је кoефицијент флексибилности  $\delta_{ij}$  представља генерално деформационо померање тачки  $A_i$  у правцу генералне силе  $P_j$  кадa јединичне генералне силе  $P_j = 1$

$$\xi = D \cdot P$$

$$P = K \cdot \xi$$

$D$  - мaтp. флексибилности  
 $K$  - мaтp. крutoсти

КЛАПЕРОНОВ СТАВ ГЛАСИ: Рад система сила који дељује на линеарно еластично тело независан је од редоследа наношења сила и начина поветања до њихових коначних вредности. Извршени рад, који се акумулира као енергија деформације једнак је вредности половине рада кога би те силе извршиле да су деловале од почетка у пуном износу.

## • ЕНЕРГИЈА ДЕФОРМАЦИЈЕ И КОМПЛЕМЕНТАРНА

- нелинеарно еластично тело

$$U = \int_0^{\epsilon_{ij}} (\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}) dV = \int U_0 dV$$

где је  $\epsilon_{ij}$  - максимална деформација тела

$U_0$  је све енергија деформације по јед. запремини

тj  $U_0 = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$  и назива се специфична енергија деформације

$$\Rightarrow U_0 = \int_0^{\epsilon_{11}} \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \int_0^{\epsilon_{22}} \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \int_0^{\epsilon_{33}} \sigma_{33} d\epsilon_{33} + \int_0^{\gamma_{12}} \sigma_{12} d\gamma_{12} + \int_0^{\gamma_{13}} \sigma_{13} d\gamma_{13} + \int_0^{\gamma_{23}} \sigma_{23} d\gamma_{23}$$

Независан је од процеса деформације по Клапероновом ставу  $\Rightarrow$

$$dU_0 = \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \dots + \sigma_{33} d\epsilon_{33} + \sigma_{12} d\gamma_{12} + \dots + \sigma_{23} d\gamma_{23} \quad \text{ТОТАЛНИ ГРАД} \quad \text{Односно за је}$$

$$dU_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{11}} d\epsilon_{11} + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{33}} d\epsilon_{33} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{12}} d\gamma_{12} + \dots + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{23}} d\gamma_{23}$$

ако их изједначимо добијемо

$$\sigma_{11} = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{11}}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{22}}, \quad \dots, \quad \sigma_{31} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{31}}$$

Пaрципaлнa изводи специфичне енергије деформације по итекој од компонени деформације једнак је одговарајућој компоненти напона

$$\text{ИСТО ТАКО КОМПЛЕМЕНТАРНА ЕНЕР.} \quad U_0^* = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \Rightarrow \epsilon_{11} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{11}}, \quad \dots, \quad \epsilon_{13} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{13}}$$

$$U^*_{\text{укупно}} = \int U_0^* dV$$

## • ЛИНЕАРНО ЕЛАСТИЧНО, ИЗОТРОПНО ТЕЛО

$$U_0^* = U_0 \quad \text{и има је} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$U_0 = U_0^* = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{kk}^2 \quad \text{померање је на 2 јер} \quad U_0^* = U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

$$\text{ИСТО ТАКО} \quad U = U_0^* = \frac{1}{2} \mu \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk}^2 = \frac{1}{2} \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk}^2$$

Ова специфична енергија деформације може се поделити на

- сферни гео  $\rightarrow$  Енергија дилатације - утиче на промену запремине

$$U_{0,s} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij}) (\bar{\epsilon}_{ij})$$

- Девијаторски гео  $\rightarrow$  Енергија дисторзије - утиче на промену облика

$$U_{0,d} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \epsilon'_{ij}$$

Веома битна је ова подела јер је Мисесов закон течења уско повезан са енергијом дисторзије, јер ће анизотично течење материјала настати ако енергија дисторзије досегне неку критичну вредност

Укупна енергија деформација од два стања напона није једнака алгебарском збиру енергија од појединачних утицаја сваког од тих стања

## \* ПРИНЦИП ВИРТУЕЛНОГ РАДА

- За одређивање померања и сила у телу услед деловања само спољашњих сила

дајемо телу одређена виртуелна померања која су потпуно независна од стварног система сила  $P_k$ , а зависе само од брзине информације коју желимо.

Дакле виртуелна померања су потпуно произвољна, то су замислима померања

УСЛОВИ:

- ① Да су инфинитезичална
- ② Да су сагласна са везама
- ③ Да су диференцијалне  $\phi$ -је координате

Означимо са  $\delta \xi_k$  виртуелно померање у тачки  $A_k$  у правцу генералне силе  $P_k$  а са  $\delta u_i$  виртуелно померање у произвољној тачки  $M$  тела. Одговарајуће деформације су:

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

Виртуелан рад површинских и запреминских сила  $\delta R = \int_S P_i \delta u_i ds + \int_V F_i \delta u_i dv$

$$+ T \cdot 0 + P_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \Rightarrow \delta R = \int_V \left[ \left( \sigma_{ij,j} + F_i \right) \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \right] dv = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv$$

$$= \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \sigma_{ji} \delta u_{j,i}) = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \sigma_{ij} \delta u_{j,i}) = \int_V \sigma_{ij} \left[ \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \right]$$

$$\Rightarrow \delta U = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} dv \Leftrightarrow \delta R = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv$$

Виртуелни рад унутрашњих сила то је због који врше стварне унутрашње силе на виртуелним деформацијама.

## • ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА:

- Ако је деформабилно тело у равнотежи под дејством спољашњих сила, и ако остаје у равнотежи за време виртуелне деформације која је дата телу, тада је виртуелни рад спољашњих сила  $\delta R$  једнак виртуелном раду унутрашњих сила  $\delta U$

$$\delta R = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta \xi_i - \text{када на тело делује систем од } n \text{ коп. генералских сила } P_i \text{ и када } n \text{ занемарене запреминске силе}$$

Комплементарни виртуелни рад

$$\delta U^* = \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$

$$\delta R^* = \int_S \delta P_i u_i ds + \int_V \delta F_i u_i dv \quad \delta U^* = \delta R^*$$

$$\delta R^* = \sum_{i=1}^n \delta P_i \xi_i$$

### • МЕТОД ФИКТУРНЕ СИЛЕ

Одређивање непознатих померања услед деловања задатог спољашњег оптерећења. Да би смо одредили нпр. генерализовано померање  $\xi_k$  произвољно тачке  $A_k$  због тога одговарајућу виртуалну јединичну силу јединичног интензитета у тачки  $A_k$  која делује у правцу тог померања. Тада је комплементаран рад (виртуел

$\Rightarrow \delta R^* = 1 \cdot \delta \xi_k = \delta \xi_k$  па је онда ПВП  $\Rightarrow \xi_k = \int \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$  где су  $\epsilon_{ij}$  деформације услед деловања задатог спољашњег оптерећења, а  $\delta \sigma_{ij}$  је као виртуелни напон у тачки тела услед јединичне виртуелне силе  $\delta P_k = 1$

### • МЕТОД ФИКТУРНОГ ПОМЕРАЊА

Одређивање непознатих сила када је позната деформација тела. Рецимо да су нам измерени померања  $\xi_i$ , и замислимо да смо због тог тело поље виртуелних померања да смо накладали тачка  $A_k$  силе  $P_k$  тржи виртуелно померање  $\delta \xi_k$  у правцу те силе, а све остале виртуелне померања осталих су једнака нули. У том случају је виртуелни рад једнак

$$\delta R = P_k \cdot \delta \xi_k \Rightarrow \text{ако } \delta \xi_k = 1 \Rightarrow P_k = \delta R = \int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$$

овде је  $\delta \epsilon_{ij}$  стварни напон а  $\delta \epsilon_{ij}$  су виртуелне деформације настале услед  $\delta \xi_k = 1$

### • ПРИНЦИП О МИНИМИЈУМУ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ

То је унутрашња деф. енергија или инерција у виду да неке спољашње задрешивање силе су функције само положаја тј. независно су од деформације тела - конзервативне су

! Од свих поља померања која задовољавају задате граничне услове, стварно поље је оно за које укупна потенцијална енергија тела има минималну вредност

укупна потен. енергија тела када делује  $n$  концентрисаних сила је  $\Pi = U(\xi_i) - \sum_{i=1}^n P_i \xi_i$

### • ПРИНЦИП О МИНИМИЈУМУ КОМПЛЕМЕНТАРНЕ ЕНЕРГИЈЕ

! Од свих стања напона која задовољавају услове равнотеже, стварно стање има она је оно за које је укупна комплементарна енергија еластичног тела има минималну вредност

### \* ВАРИЈАЦИОНИ РАЧУН

$-\delta U^* = \int \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$  - комплементаран виртуелни рад унутрашњих сила = првој варијацији комплементарне енергије деформације  $U^*$  услед варијације компонента напона

$-\delta U = \int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV$  - виртуелни рад унутрашњих сила = првој варијацији енергије деформације при варијацији компонента деформације  $\epsilon_{ij}$

## \* СТАВОВИ УЗАЈАМНОСТИ

### • БЕТУЕВ СТАВ УЗАЈАМНОСТИ ПОМЕРАЊА

Посматрајмо лин. елас. тело. коме је спречено померање као крутог тела. Нека је оно изложено дејству два система спољашњих сила.

- Прво делује систем сила (I) и померања настала дејством тих сила и те силе таде дају рад  $R_{11}$
- Затим делује систем сила (II) и истовим дејством настају  $R_{22}$  и  $R_{12}$  који је учини рад сил система (I) услед померања од дејства система сила (II)
- Па је укупни рад  $R_{11} + R_{21} + R_{12}$

А ако обрнемо редослед оптерећивања иммо  $R_{11} + R_{22} + R_{21}$

Како рад не зависи од редослед оптерећивања  $\Rightarrow R_{11} + R_{22} + R_{21} = R_{11} + R_{22} + R_{12}$   
 $\Rightarrow R_{12} = R_{21}$

Дакле на тело делују 2 система сила и рад I система сила услед померања од дејства другог система сила једнак је раду који изврше силе система II услед померања од дејства система I.

### • МАКСВЕЛОВ СТАВ О УЗАЈАМНОСТИ ПОМЕРАЊА

Померање материјне тачке силе  $P_1$  у правцу силе  $P_1$  услед деловања јединичне силе  $P_2 =$  померању материјне тачке силе  $P_2$  у правцу силе  $P_2$  услед деловања јединичне силе  $P_1$ .

## ПРВИ И ДРУГИ КАСТЕЛГЛАМОВИ СТАВОВИ

I Уколико енергију деформације које се акумулира у еластичном телу изразимо преко генерализованог померања, тада парцијални извод енергије деформације по некој компоненти генерализованог померања једнак је одговарајућој ген. сили

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad i=1 \dots n$$

II Ако енергију деформације изразимо у функцији генерализоване силе, тада парцијални извод по некој ген. сили = одговарајућем генерализованом померању

$$\xi_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad i=1 \dots n$$

### • ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ПРИ СТАТИЧКОМ ОПТЕРЕЋЕЊУ

## ПРИМЕНЕ ЕНЕРГЕТСКИХ ПРИНЦИПА КОД ГРЕД

- Као што смо пре формулисали закон о одржању енергије

$R=U$  где је  $R$  - рад спољашњих сила и  $U$  енергија деформације тела

при томе енергија деформација код:

$$+ \text{Зревног носача је: } U = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{N^2}{EF(s)} + \frac{T_y^2}{GF_y(s)} + \frac{T_z^2}{GF_z(s)} + \frac{M_x^2}{GI_x(s)} + \frac{M_y^2}{EI_y(s)} + \frac{M_z^2}{EI_z(s)} \right] ds$$

Често се у примени чини занемарљива енергија деформације од  $N, T_y$  и  $T_z$  јер је  $\ll$  од  $U(M_x), U(M_y), U(M_z) \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{M_x^2}{GI_x(s)} + \frac{M_y^2}{EI_y(s)} + \frac{M_z^2}{EI_z(s)} \right] ds$

Ако су призматични  
елементи осни  $\int \dots dx$

+ Греду отвореног танкозидног профила

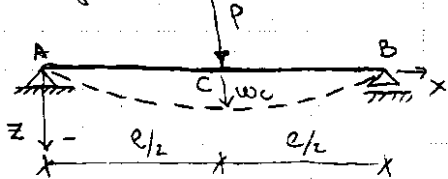
за систем непризматичних штабова са задржавањем  $N, T_y, T_z, M_x(s)$

$$U = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{(M_x(s))^2}{GI_x(s)} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_w^2}{EI_w} \right] ds \quad \text{Ако је призматичан} \quad \int \dots dx$$

Применом закона о одржању енергије могуће је одређивање генерализованих померања тачака греде. Међутим, непосредна примена тог закона је ограничена и одређивање померања услед деловања једне силе и то у истој најдаљој тачки.

### ПРИМЕР

Одредити износ тачки  $C$ . Дато је  $P, l, EI_y = \text{const}$



$$U = \frac{1}{2EI_y} \int_0^l M_y^2 dx$$

Због симетрије греде очигледно је да ће се иста количина енергије акумулирати и у левом и у десној половини греде.  $\Rightarrow M_y = \frac{P \cdot x}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$

$$U = \frac{1}{2EI_y} 2 \int_0^{l/2} \left( \frac{Px}{2} \right)^2 dx = \frac{P^2}{4EI_y} \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P^2}{4EI_y} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{P^2 l^3}{96EI_y}$$

$$\text{ПРИМЕНА КЛАПЕРОНУ} \quad R = \frac{1}{2} P w_c \Rightarrow w_c = \frac{2R}{P} = \frac{2U}{P} = \frac{2 P^2 l^3}{P 96 EI_y} = \frac{P l^3}{48 EI_y}$$

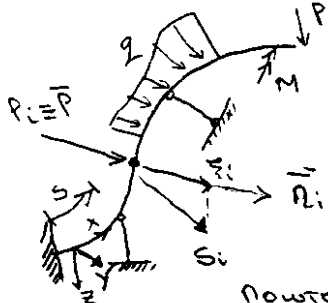
А изгледа је  $M_y = (l-x)P/2$

- ОДРЕЂИВАЊЕ ПОМЕРАЊА ПРИМЕНОМ ГРЕДОГ ЕЛАСТИЧНОГ СТАВА

- Став је гласио: Ако се енергија деформације код линеарно еластичног тела изрази у функцији генерализованих сила онда тада је парцијални извод по некој генерализованој сили једна одговарајућем генерализованом померању  $\frac{\partial U}{\partial P_i} = w_i \quad (i=1, \dots, n)$

Нека је носач од линеарног еластичног материјала и изложен је дејству произвољног оптерећења и нека су осе  $Y$  и  $Z$  главне осе инерције, централне. Потребно је одредити померање  $\xi_i$  произвољне тачке  $i$  носача у датом правцу  $\vec{P}_i$ . При томе, под појмом померање подразумевамо генерализовано померање тј. линијско померање или обртање.

Ако је потребно одредити померање  $\xi_i$  неке тачке  $i$  у којој не делује спољашња сила, додajемо фиктивну силу  $P_i$  у тој тачки у жељеном правцу  $\vec{P}_i$ .



Далје формирамо израз за енергију деформације система услед деловања спољашњег оптерећења и фиктивне силе  $P_i$ .

Тражемо померање  $\xi_i$  добијемо коришћењем ПРАСЛОВОГ СТАВА тј. диференцирањем енергије деформације по  $P_i$  а затим узимајући  $P_i = 0$ , јер је та сила фиктивна.

$$\xi_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \Big|_{P_i=0}$$

Пошто су силе у пресецима пропорционалне интензитету генерализоване силе  $P_i$  можемо их изразити у облику

$$\begin{aligned} N^* &= N + \bar{N} P_i & M_x^* &= M_x + \bar{M}_x P_i & \text{где су } N, T_y, \dots, M_z &\text{означене силе у пресеку услед задатог оптерећења} \\ T_y^* &= T_y + \bar{T}_y P_i & M_y^* &= M_y + \bar{M}_y P_i & \text{а } \bar{N}, \bar{T}_y, \dots, \bar{M}_z &\text{означене силе у пресеку услед деловања фиктивне силе } P_i \text{ јединичног интензитета тј. } P_i = 1 \\ T_z^* &= T_z + \bar{T}_z P_i & M_z^* &= M_z + \bar{M}_z P_i \end{aligned}$$

а је за систем штапова једног попречног пресека

$$U = \frac{1}{2} \int_s \left[ \frac{(N + \bar{N} P_i)^2}{EF} + \frac{(T_y + \bar{T}_y P_i)^2}{GF_y} + \frac{(T_z + \bar{T}_z P_i)^2}{GF_z} + \frac{(M_x + \bar{M}_x P_i)^2}{EI_x} + \frac{(M_y + \bar{M}_y P_i)^2}{EI_y} + \frac{(M_z + \bar{M}_z P_i)^2}{EI_z} \right] ds$$

е сад применом  $\xi_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \Big|_{P_i=0}$

$$\Rightarrow \xi_i = \int_s \left( \frac{N \bar{N}}{EF} + \frac{T_y \bar{T}_y}{GF_y} + \frac{T_z \bar{T}_z}{GF_z} + \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} + \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} \right) ds \quad (*)$$

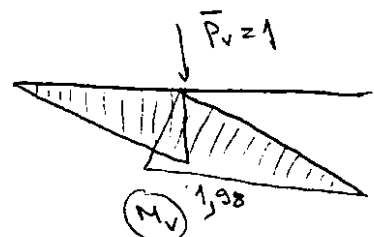
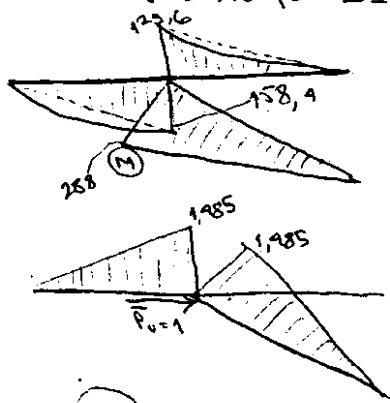
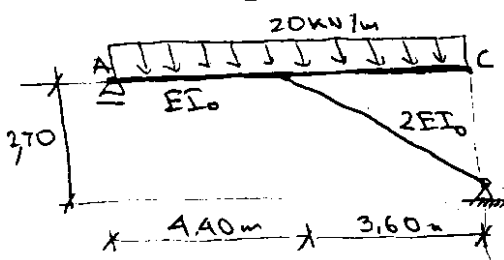
јер  $\frac{\partial (N + \bar{N} P_i)^2}{\partial P_i} \Big|_{P_i=0} = \frac{\partial (N^2 + 2N\bar{N}P_i + \bar{N}^2 P_i^2)}{\partial P_i} = 0 + 2N\bar{N} + 2\bar{N}^2 P_i = 2N\bar{N}$   
и кад се то скрати са  $\frac{1}{2}$  испред интеграла  $\Rightarrow \underline{N\bar{N}} = \frac{\partial}{\partial P_i} (N + \bar{N} P_i)^2$

гане  $\bar{N}, \bar{T}_y, \dots, \bar{M}_z$  су силе у пресецима услед генерализоване силе  $\bar{P} = 1$  која одговара траженом генерализованом померању  $\xi_i$ .  $\bar{P}_i$  је позитивно уколико је у истом смеру као и генерализована сила и обрнуто.

Интеграл ( $*$ ) се не рачунају формално већ се примењује Верешагин.

све и то код <sup>створеног</sup> танкозидног профла штапа.

**ПРИМЕР** Запечурићути утицај  $N, T_y, T_z$  одређити вертикалну и хоризонталну компоненту померања тачке В носача. Дато је  $EI_0 = 42,0 \text{ MNm}^2$





$$U_B = \int \frac{M \bar{M}}{EI} ds, \quad V_B = \int \frac{M \bar{V}}{EI} ds$$

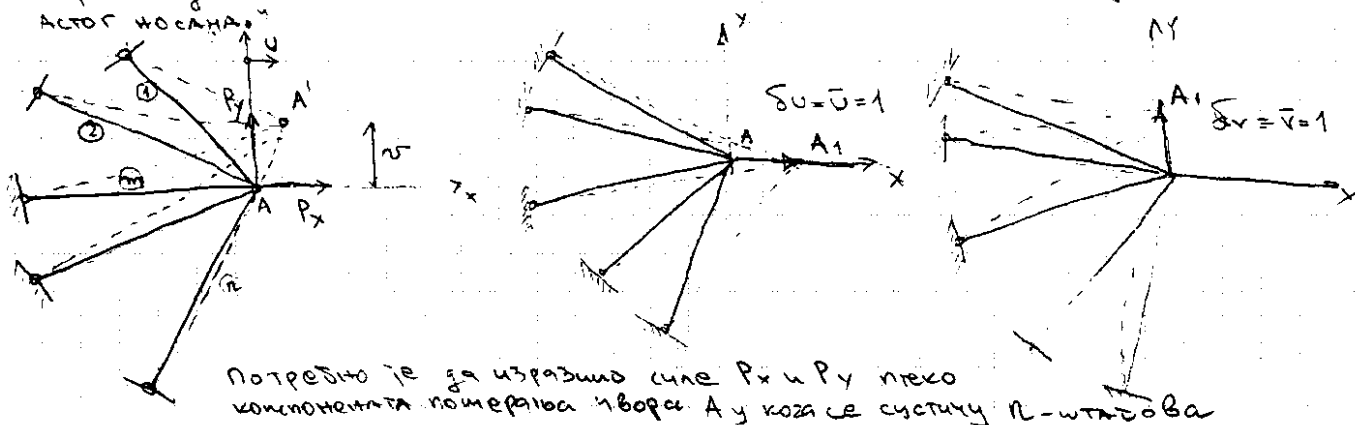
$$U_B = \left( \frac{4,4}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4,4^2}{8} \cdot (-1,485) - \frac{158,4 \cdot 4,4 \cdot 1,485}{3} \right) \frac{1}{42000} + \left( \frac{45}{3} \cdot 288 \cdot 1,485 \right) \frac{1}{2 \cdot 42000} =$$

$$= (-105,42 - 345) \frac{1}{42000} - 641,52 \frac{1}{84000} = -0,0107 - 0,007637 = -0,01836 \text{ m} = 18,36 \text{ mm}$$

$$V_B = 29,48 \text{ mm} \quad \bullet \text{ TOTALNO POMERANJE } \delta = \sqrt{V_B^2 + U_B^2} = 30,6 \text{ mm}$$

\* ODREĐIVANJE POMERANJA UBOVA I SILE U STATIČKIM RAVNOM REŠETKASTOM NOSAČU.

То је метод фиктивног померања чији примети, лако показати у случају реалног решетки асног носача.



$P_k = \int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV$  где  $\sigma_{ij}$  стварни напони који одговарају стварним померањима а  $\bar{\epsilon}_{ij} = \delta \epsilon_{ij}$  су виртуалне деформације услед виртуалног померања  $\delta \bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_x = 1$  које одговарају градивној сили P\_k.

Како решетки носач све компоненте напона су једнаке нули осим нормалног напона у правцу осе штапа.  $\Rightarrow P_k = \sum_{m=1}^n \sigma_m \bar{\epsilon}_m V_m = \sum_{m=1}^n \sigma_m \bar{\epsilon}_m F_m \cdot l_m$  где  $l_m$  - дужина штапа,  $F_m$  - попр. пресек

Како је то линеарно-еластичан материјал важи Хуков закон  $\sigma_m = E_m \epsilon_m$  где је  $E_m$  стварна деформацијска м

$$\Rightarrow P_k = \sum_{m=1}^n E_m F_m \bar{\epsilon}_m l_m$$

$$l_m' \cdot e_m' = \bar{\epsilon}_m \cdot l_m + \bar{\epsilon}_m \quad (*) \quad e_m' = \begin{cases} \cos \varphi_m, \sin \varphi_m \end{cases} \quad \bar{\epsilon}_m = \begin{cases} u, v \end{cases}$$

показује и лево и десно да је  $e_m' \cdot e_m = \cos \varphi = 1$

$$l_m' = l_m + \bar{\epsilon}_m \cdot e_m$$

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{l_m' - l_m}{l_m} = \frac{1}{l_m} \cdot \bar{\epsilon}_m \cdot e_m = \frac{1}{l_m} (u \cos \varphi + v \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow P_k = \sum_{m=1}^n E_m F_m \bar{\epsilon}_m \frac{1}{l_m} (u \cos \varphi + v \sin \varphi) l_m$$

$$\Rightarrow P_k = \sum_{m=1}^n E_m F_m \bar{\epsilon}_m (u \cos \varphi + v \sin \varphi)$$

49

$$P_x = K_{11} U + K_{12} V \quad \text{ye } y \quad K_{11} = \sum_{l=1}^n \frac{E_l F_l}{l_m} \cos^2 \varphi_m \quad K_{12} = \sum_{l=1}^n \frac{E_l F_l}{l_m} \sin \varphi_m \cos \varphi_m$$

$$P_Y = K_{21}U + K_{22}V \quad \dots \dots \text{2ge} \quad \therefore K_{21} = \sum_{n=1}^N \frac{E_n F_n}{l_n} \sin \varphi_n \cos \varphi_n \quad K_{22} = \sum_{n=1}^N \frac{E_n F_n}{l_n} \sin^2 \varphi_n$$

Ako su cure  $P_x$  i  $P_y$  zgrade reku se jedinstvena  $K \cdot U = P$  i goduje se rekuvala te  
j-me  $\Rightarrow U \cup V$ , E ~~ka~~ se omi zhaaju omja se godujuj guntanujuje  $E_m$

$$\text{Ej. } N_m = \tilde{G}_m F_m = (E_m \epsilon_m) F_m = \frac{E_m F_m}{\rho_m} (v \cos \varphi_m + v \sin \varphi_m)$$

ПРИМЕР Применен методът почертава одредит почертава чвора А и силе у штапов-  
ина решетката 2 по сага. Сил штапови су од АЕМ-а крјосин ЕФ

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = 1,6a & \cos \varphi_1 = 0 & \sin \varphi_1 = -1,0 \\ \ell_2 = 2,0a & \cos \varphi_2 = 0,6 & \sin \varphi_2 = -0,8 \\ \ell_3 = 1,2a & \cos \varphi_3 = 1,0 & \sin \varphi_3 = 0 \end{array}$$
$$K_{11} = EF \left[ \frac{1^2}{12a} + \frac{(0,8)^2}{2 \cdot a} \right] = 1,0133 \frac{EF}{a}$$

$$K_{2,1} = K_{12} = \frac{EF}{a} \left[ \frac{(-0,8) \cdot 0,6}{2} \right] = -0,24 \frac{EF}{a}$$

$$K_{22} = \frac{EF}{a} \left[ \frac{1}{1.6a} + \frac{(0.6)^2}{2a} \right] = 0.9450 \frac{EF}{a}$$

$$\begin{bmatrix} 1,0153 & -0,29 \\ -0,29 & 0,9450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{\text{Pa}}{\text{EF}}$$

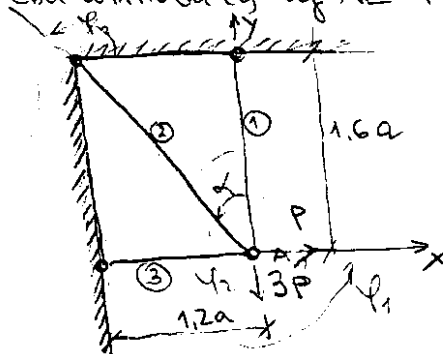
переломов овозначена су

$$U = 0,25 \frac{P_{BL}}{EF}$$

$$V = -3,1111 \frac{\text{Pa}}{\text{FF}}$$

$$N_i = \frac{G_i}{F_i} = \frac{E_i \cdot E_i}{F_i} = \frac{E_i}{F_i \cdot l_i} (v \cos \varphi_i + v \sin \varphi_i)$$

Interview with Joseph

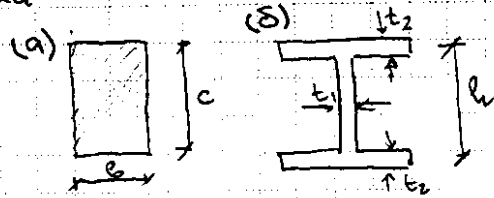
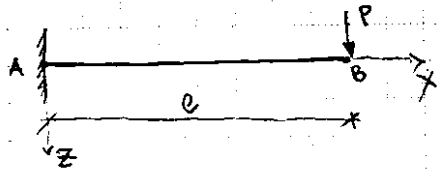


# ДЕФОРМАЦИОНИ РАД

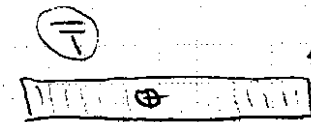
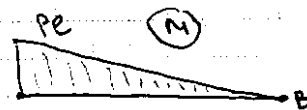
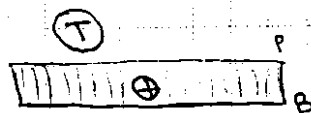
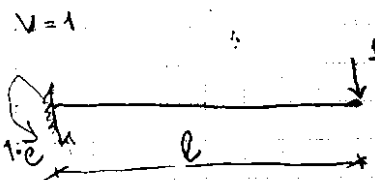
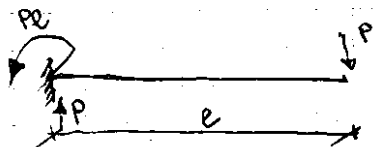
- ЗАДАЦИ -

- ОДРЕЂИВАЊЕ ПОМЕРАЊА КОД СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИХ НОСАЧА

**ЗАДАТАК ①** Одредити однос вертикалног померања краја конзолног носача услед утицаја смицања (трансверзалне силе) и померања услед савијања и то за два случаја попречног пресека



услови фиксације



- померање услед утицаја смицања

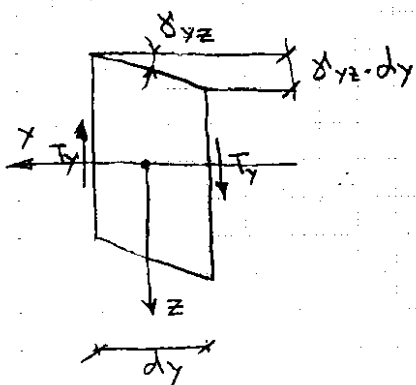
$$V_T = \int_0^l \frac{T \bar{T}}{G F_{\text{смицања}}} dx = \frac{1}{G F_{\text{смицања}}} \cdot c \cdot P \cdot 1 = \frac{cP}{G F_s}$$

- померање услед утицаја савијања

$$V_M = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{c}{3} \cdot \frac{P \cdot c \cdot l}{EI} = \frac{P c^2 l}{3EI}$$

(a) ПРАВОУГАОНИ ПРЕСЕК

- Неопходно је одредити површину смицања  $F_s$



$$\bar{\gamma}_{yz} = \frac{T_z}{F_{sz}} \quad \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{G} = \frac{T_z}{G F_{sz}}$$

$$\frac{1}{2} T_z \bar{\gamma}_{yz} dy = \frac{1}{2} \int A^* dv = dy \int \frac{\gamma_{yz}^2}{2G} dF$$

$$\text{или } T_z \frac{T_z}{G F_{sz}} = \int_F \frac{\gamma_{yz}^2}{G} dF$$

$$\Rightarrow F_{sz} = \frac{T_z^2}{\int_F \gamma_{yz}^2 dF} = \frac{1}{\int_F \left( \frac{\gamma_{yz}}{T_z} \right)^2 dF}$$

$$dF = b \cdot dz \quad \gamma_{xz} = \frac{G T_z}{b c^3} \left[ \left( \frac{c}{2} \right)^2 - y^2 \right] \Rightarrow F_{sz} = \frac{1}{\int_F \left( \frac{\gamma_{xz}}{T_z} \right)^2 dF}$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{G}{b c^3} \right)^2 b \int_{-c/2}^{c/2} \left[ \left( \frac{c}{2} \right)^2 - z^2 \right]^2 dz} \Rightarrow F_{sz} = \frac{5}{6} b c = \frac{5}{6} F$$

$$I = \frac{1}{12} b c^3$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{c \cdot P \cdot 6}{G \cdot 5 F}$$

$$V_M = \frac{P c^2 l}{3 \cdot \frac{1}{12} b c^3} = \frac{4 P c^2 l}{E b c^3}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{V_T}{V_M} = \frac{\frac{c \cdot P \cdot 6}{G \cdot 5 F}}{\frac{4 P c^2 l}{E b c^3}} = \frac{6 P \cdot G \cdot E b c^3}{20 G F P c^2} = \frac{E c^2}{20 b^2}$$

(5) ЗА I ПРЕСЕК

ЗА СЛУЧАЈ КАД ЈЕ  $t_1 \neq t_2$  ИМАМО  $F_S = q \cdot t_1 \dots I = \dots$  И ОВЕ СЕ ИДОЈУ ЗОРЕ

ЗАДАТАК (2) ЗАДАТ ЈЕ ЛУК НА ТРИ СЛОБА ПРЕМА СМЦИ. ТРЕБА ОДРЕДИТИ СЛЕДЕЋЕ:

(а) ВЕРТИКАЛНО ПОМЕРАЊЕ ТАЧКЕ 5

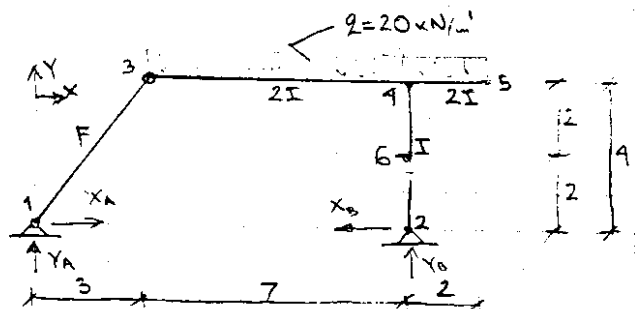
(б) ОБРТАЊЕ ТАНГЕНТЕ У ТАЧКИ 5

(в) ПРОМЕНУ УГЛА У ЧВОРУ 3

(г) ПРОМЕНУ РАСТОЈАЊА ИЗМЕЂУ ТАЧКА 3 И 6

$$EI = 200 \text{ MNm}^2$$

$$I/F = 0,05 \text{ m}^2$$



$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad X_A = X_B \\ \sum Y = 0 & \quad Y_A + Y_B = 180 \\ \sum M_A = 0 & \quad 7,5 \times 120 = 10 Y_B \\ \sum M_B = 0 & \quad 3 \cdot Y_A = 4 X_A \end{aligned}$$

$$Y_B = 135$$

$$Y_A = 45$$

$$X_A = X_B = 33,75$$

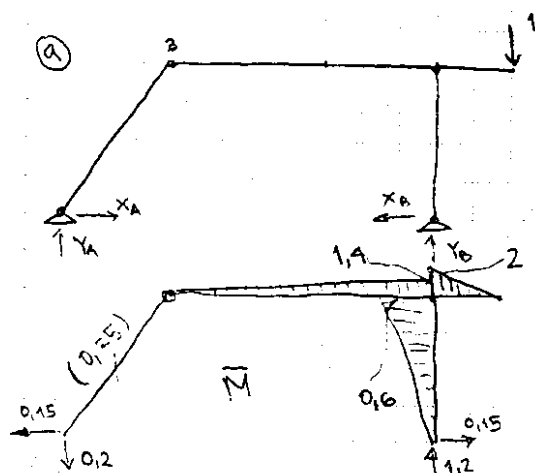
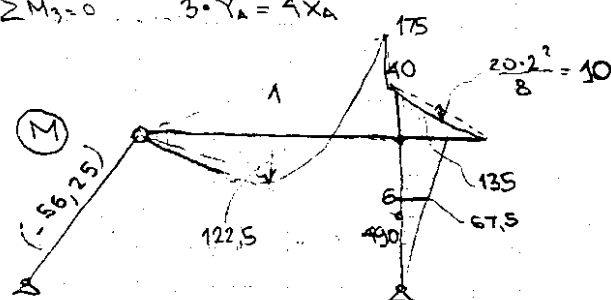
• РЕДУКОВАНЕ ДУЖИНЕ ШТАПА

$$\text{ШАП 3-4} \quad \ell' = \frac{\ell}{2} = 3,5 \text{ m}$$

$$\text{ШАП 4-5} \quad \ell' = \frac{\ell \cdot 5}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\text{ШАП 2-4} \quad \ell' = \ell = 4,0 \text{ m}$$

$$\text{ШАП 1-3} \quad \ell' = \ell = 5,0 \text{ m}$$



$$\begin{aligned} \sum Y = 0 & \quad Y_A + Y_B = 1 \\ \sum X = 0 & \quad X_A = X_B \\ \sum M_A = 0 & \quad 12 = 10 Y_B \\ \sum M_B = 0 & \quad 3 Y_A = 4 X_A \end{aligned}$$

$$Y_B = 1,2$$

$$Y_A = -0,2$$

$$X_A = X_B = -0,15$$

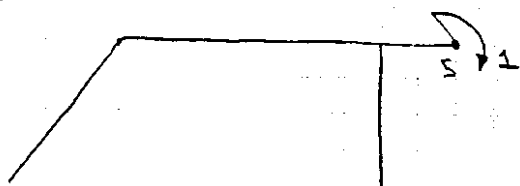
$$V_B = \int_0^{\ell} \left[ \frac{M \bar{M}}{EI} + \frac{N \bar{N}}{EF} \right] ds$$

$$N \bar{N} = \frac{1}{EF} 5,0 \cdot (-56,25) (0,25) = -\frac{70,3125}{EF}$$

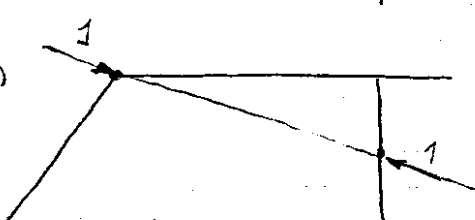
$$EI M \bar{M} = \frac{3,5}{3} \cdot (+175) \cdot 1,4 - \frac{3,5}{3} 122,5 \cdot 1,4 + \frac{1}{3} 40 \cdot 2 - \frac{1}{3} 10 \cdot 2 - \frac{1}{3} 0,6 \cdot 135 = -2,25$$

$$EI \delta = -2,25 - \frac{70,3125}{200 \cdot 10^6} \cdot 0,05 = -5,7656 \Rightarrow \delta = -\frac{5,7656 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = -0,029 \text{ m}$$

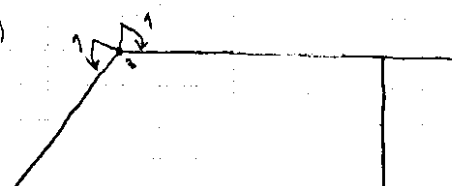
(5)



(2)



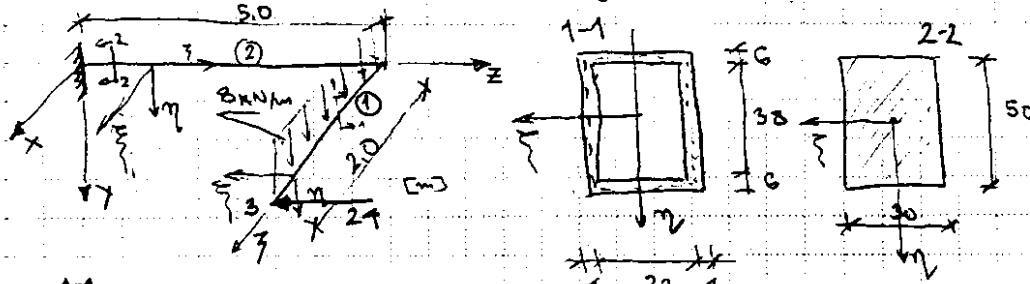
(6)



НАПОМЕНА

ОБРТАЊЕ ТАНГЕНТЕ И ПРОМЕНА УГЛА ЈОДНЈАЈУ СЕ  $\gamma$  [rad]

ЗАДАЧАТАК 3 За нокан на слици одредити ТОТАЛНО померање тачке 3.  $E = 25 \text{ GPa}$   
 $E/G = 2,5$



$$I_z = \frac{1}{12} [30 \cdot 50^3 - 22 \cdot 38^3] = 21,130 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\frac{1}{12} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 31,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{\eta}^{1-1} = \frac{1}{12} (30^3 \cdot 50 - 22^3 \cdot 38) = 7,878 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$I_n^{22} = \frac{1}{12} 30^3 50 = 11,25 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$I_t^{1-1} = \frac{4 \cdot (26 \cdot 44)^2}{2 \cdot \left[ \frac{26}{6} + \frac{44}{4} \right]} = 17,0700 \text{ m}^{-4}$$

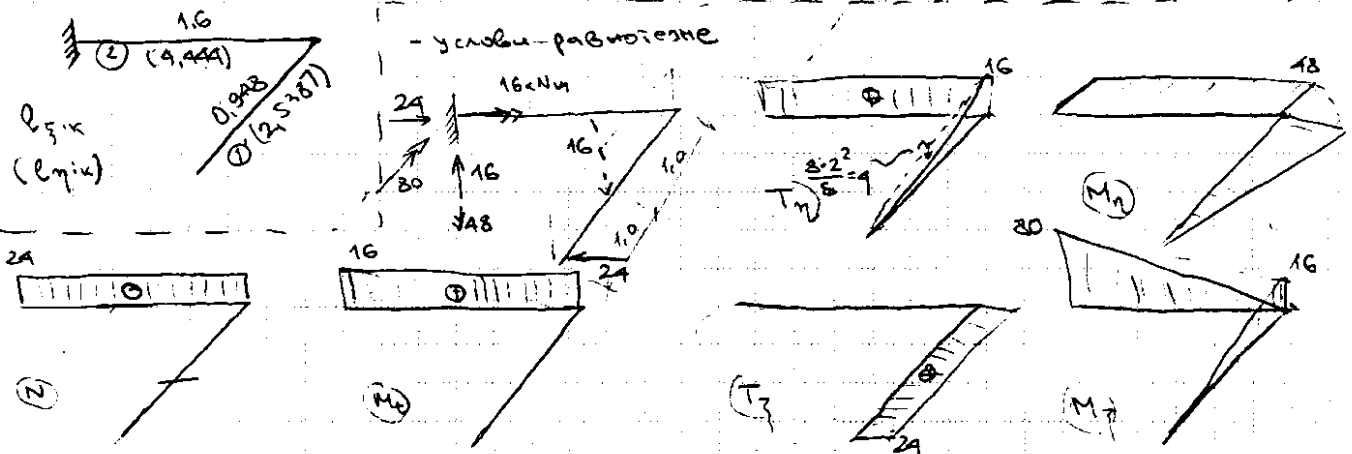
ког 164x је чххх!

$$I_t^{2.2} = \propto e^3 C = 0,2065 \cdot 30^3 \cdot 50 \approx 28,188 \cdot 10^{-9}$$

- **РВД, УЛОВАНЕ ДУЖИЧЕ УПАНА** АКО УСВОЈИМО ЗА  $I_c = 10^{-3} \text{ м}^4$  И  $EI_c = 25 \text{ МНм}^2$

итого ① створна група  $l_s = 2m$  регулована  $l_s = \frac{1}{2,119} \cdot 2 = 0,9438$   $l_\eta = \frac{1}{0,7878} \cdot 2 = 2,5387$

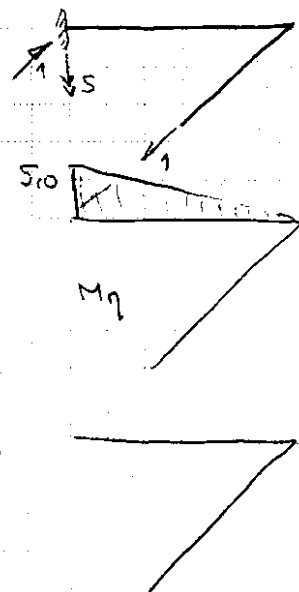
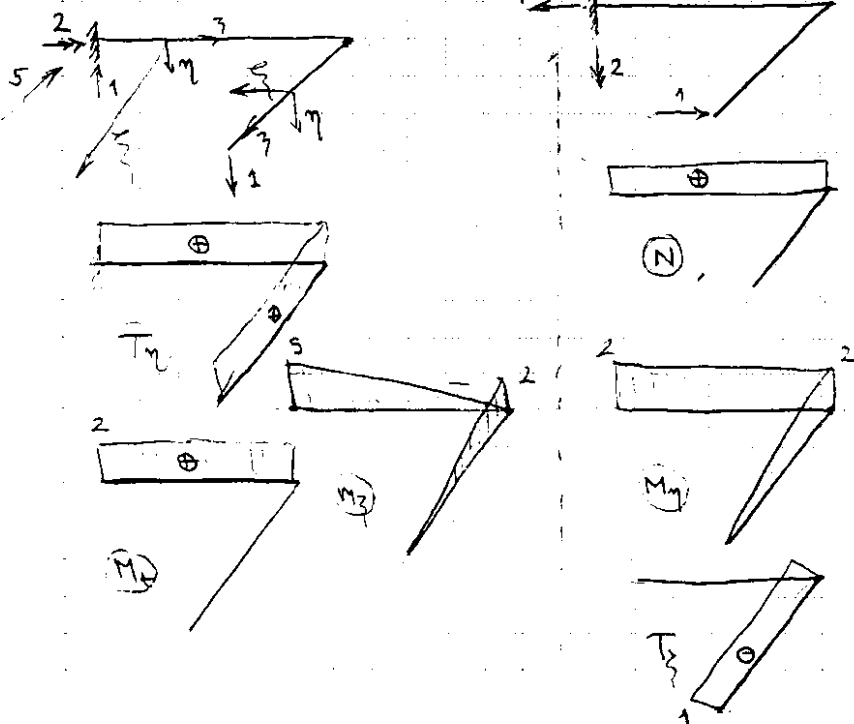
УКАН (2): стварна густина  $\rho_2 = 5,0 \text{ m}$  релативне  $\rho_3 = \frac{1}{3,125} \cdot 5 = 1,6$   $\rho_2 = 4,44$



(a)  $\eta = 1$

(б) измерение  $\gamma$   $\xi = 1$

(8) power law  $\gamma = 1$



53

$$EI U_3 = \frac{5,0 \cdot 48 \cdot 4,444}{2} = 533,33 \cdot 10^3$$

$$U_3 = \frac{533,33 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^6} = 2,133 \text{ cm}$$

$$EI V_3 = 16 \cdot 2 \cdot 4,4445 + \frac{0,9438}{3} \cdot 16 \cdot 2 - \frac{2,9438}{6} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1,6 \cdot 80 \cdot 5}{2} = 362,79 \text{ kNm}^3$$

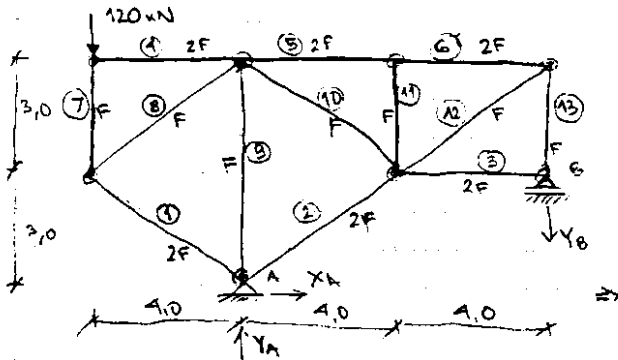
$$V_3 = 1,451 \text{ cm}$$

$$EI W_3 = -\frac{2,5387}{3} \cdot 2 \cdot 48 - 4,444 \cdot 2 \cdot 48 = -507,30 \Rightarrow W_3 = -2540 \text{ cm}$$

$$\delta = \sqrt{U_3^2 + V_3^2 + W_3^2}$$

ЗАДАЧА 3) Определить перемещение узла C

$$E = 210 \text{ GPa}, F = 20 \text{ kN}$$



$$M_A = 2Y_B - 3X_B - 120 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Y_B = 60$$

$$Y_A = Y_B + 120$$

$$Y_A = 60 + 120 = 180$$

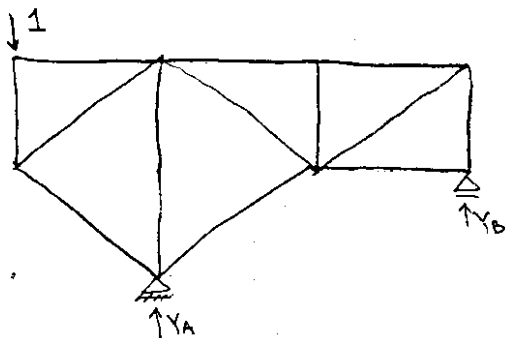
$$X_A = 0$$

трехугольник - реакция есть синоним!

все что было 120 ньютона будет в  $P_K$

ТАБЛИЦА

$K$	$L_K \text{ (m)}$	$F_K$	$L_K' = \frac{F_K}{F_K} \cdot L_K$	$P_K \text{ (kN)}$	$\bar{P}_K = \frac{P_K}{120}$	$\bar{P}_K F_K = P_K^2 / 120 \times L_K'$
1	5	2F	2,5	-100		83,333
2	5	2F	2,5	-100		83,333
3	4	2F	2	0		0
4	4	2F	2	0		0
5	4	2F	2	80		53,333
6	4	2F	2	80		53,333
7	3	F	3	-120		120
8	5	F	5	160		83,333
9	6	F	6	-60		30
10	5	F	5	0		0
11	3	F	3	0		0
12	5	F	5	-100		83,333
13	3	F	3	60		30
$\Sigma$				$\Sigma$	$\Sigma$	2093,333



$$V_A = \frac{2093,333}{EF} = \frac{2093,333 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 9,989 \text{ mm}$$

$$V_A \approx 9,989 \text{ mm} \checkmark$$

поэтому и больше равно  $\square \times \square$   
иногда таблица

**GEOMETRIJSKE  
KARAKTERISTIKE  
POPREČNOG PRESEKA  
GREDE**

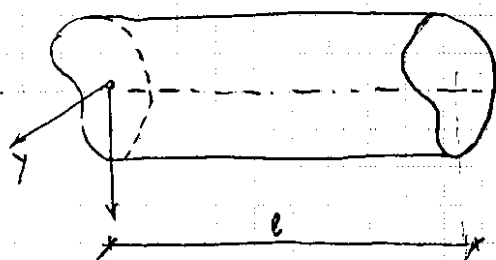




# **GREDA OPTEREĆENA PODUŽNIM SILAMA**



# \* ГРЕДА ОПТЕРЕЂЕНА ПОДУЖНИМ СИЛАМА



- Ово је декартован штаб произвољног попречног пресека  
 - оса  $x$  је дугма оса штаба (сила тежишта попречног пресека)

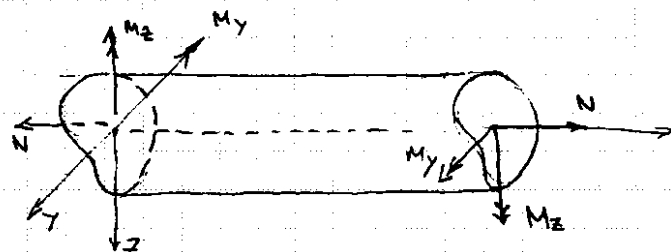
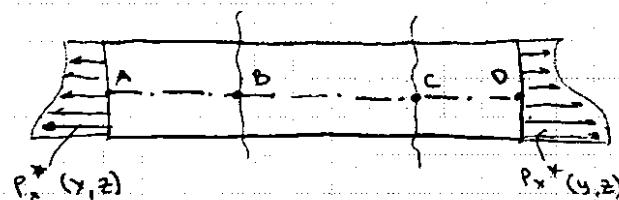
- осе  $y$  и  $z$  су произвољне, међусобно нормалне центричне осе у равни попречног пресека

-  $\vec{n}$  јединични вектор спољашње нормале у  $\delta$  којој тачки волине површине згре

$$\vec{n} = \{0, n_y, n_z\} \quad n_y = \cos \varphi \quad n_z = \cos \vartheta$$

- Дак јединични вектори спољашњих норма. у тачкама које леже у основама згре огређени су:  $\vec{n} = \{-1, 0, 0\}$  и  $\vec{n} = \{1, 0, 0\}$

Претпоставимо да је згре прено својих основа оптеретена  $\vec{P}^* = \{P_x^*, 0, 0\}$  у правцу осе носача



Када се то оптерећење регулије на тежишта основа добијају се  $N, M_y, M_z$ .

$$N = \int_F P_x^*(y, z) dF$$

$$M_y = \int_F z \cdot P_x^*(y, z) dF$$

$$M_z = \int_F y \cdot P_x^*(y, z) dF$$

## • ИЗРАЗ ЗА НОРМАЛНИ НАПОН

- инајчешће у виду облика спољашњег оптерећења, претпоставимо да је  $\sigma_x \neq 0$  а све остало  $= 0$

- али за нехранио збогеничке силе добијамо  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_x(y, z)$  и то добијамо из  $\sigma$ -на равнотеже

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0$$

где су  $x=1 \quad y=2 \quad z=3$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0$$

и  $F_i$  су збогеничке силе

- Ветрами-Michell-ове јне повративности дају

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{y}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) + 2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\text{из осталих } j\text{-на добија се } \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial z^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\text{али се израва са } \frac{1}{1+\nu} \neq 0 \text{ добија се } \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} = 0$$

што значи да је  $\sigma_x$  линеарна функција  $y$  и  $z$  јер је  $\sigma_{11}$  повративност  $= 0$

$$\text{ДАКЛЕ } \sigma_x = a + by + cz \quad \text{где су } a, b \text{ и } c \text{ константе}$$

- Гранични услови, услови у тачкама доине површине
 
$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= p_1^{(n)} \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= p_2^{(n)} \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= p_3^{(n)} \end{aligned} \quad \text{jer } \vec{n} = \{0, n_y, n_z\}$$

годинја се  $p_x^{(n)} = p_y^{(n)} = p_z^{(n)} = 0$  што значи да нема нити оптерећења нити површинских оптерећења на дојној површини

- Гранични услови у тачкама које леже у основама греде
 
$$p_x^{(n)} = \pm \sigma_x = \pm (a + by + cz) \quad p_y^{(n)} = 0 = p_z^{(n)} \quad \vec{n} = (\pm 1, 0, 0)$$

извршимо саге редукцију оптерећења  $p_x^{(n)}$  у нити дојној греде

$$T_y = T_z = 0 \quad \text{као и} \quad M_x = 0 \quad N = \int_F \sigma_x dF = a \int_F dF + b \int_F y dF + c \int_F z dF = aF + S_y \cdot b + S_z \cdot c$$

$$M_y = \int_F z \cdot \sigma_x dF = a \int_F z dF + b \int_F xy dF + c \int_F z^2 dF = a \cdot S_y + b I_{yz} + c I_y$$

$$M_z = \int_F y \sigma_x dF = -a \int_F y dF - b \int_F y^2 dF - c \int_F yz dF = -a S_z - b I_z - c I_{yz}$$

Међутим  $S_y = S_z = 0$  јер су  $y$  и  $z$  тежишне (централне) осе попречног пресека.

Одатиме имамо  $N = aF$ ,  $M_y = b I_{yz} + c I_y$ ,  $M_z = -b I_z - c I_{yz}$

Решавањем  $\Rightarrow \boxed{a = \frac{N}{F}}$ , из (3)  $\Rightarrow M_z + b I_z = -c I_{yz} \Rightarrow c = -\frac{M_z + b I_z}{I_{yz}}$  и тако даљно (2)

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow M_y &= b I_{yz} + \frac{(M_z + b I_z) I_y}{I_{yz}} \Rightarrow M_y = b I_{yz} + \frac{M_z I_y}{I_{yz}} + \frac{b I_z I_y}{I_{yz}} = b \left[ \frac{I_{yz}^2 - I_z I_y}{I_{yz}} \right] + \frac{M_z I_y}{I_{yz}} \\ \Rightarrow \frac{M_y + \frac{M_z I_y}{I_{yz}}}{\frac{I_{yz}^2 - I_z I_y}{I_{yz}}} &= \frac{M_y I_{yz} + M_z I_y}{I_{yz}^2 - I_z I_y} \Rightarrow b = - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \dots \boxed{c = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}} \end{aligned}$$

$$\text{дакле } \sigma_x = a + by + cz = \frac{N}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot z$$

и овим је одређено стање напона у било којој тачки збоје оптерећене појзоном површинским оптерећењем на својим крајевима, које се редукције на нормалну силу  $N$  и моменте савијања  $M_y$  и  $M_z$  а који су зати претхргом изрезима

Ако су пак осе  $y$  и  $z$  главне централне осе инерције изрез се упростићава

$$\text{и постоје } \sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M_z I_y}{I_y I_z} \cdot y + \frac{M_y I_z}{I_y I_z} \cdot z = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z -$$

Овај изрез одговара најопштијем случају оптерећења, појзоном, силама и одговара експлицитном напрезању греде ( $N \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$ ).

- А поред овог могуће су и следећи случајеви оптерећења

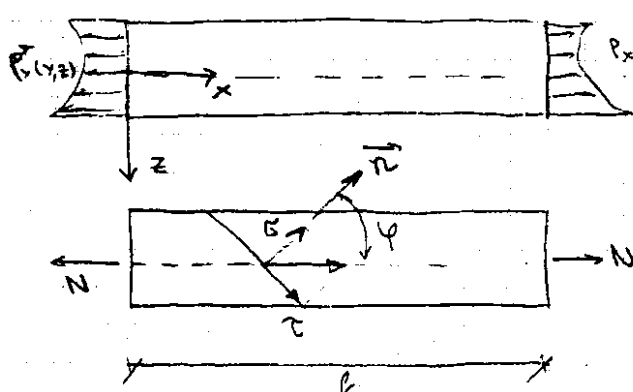
- аксијално напрезање .....  $N \neq 0, M_y = M_z = 0$

- чисто савијање греде ...  $N = 0$

$\xrightarrow{\text{ПРАВО}}$   
 $\xrightarrow{\text{КОСО}}$

$\xrightarrow{\text{око } y \text{ осе}} \dots M_y \neq 0 \text{ и } M_z = 0$   
 $\xrightarrow{\text{око } z \text{ осе}} \dots M_y = 0 \text{ и } M_z \neq 0$   
 $M_y \neq 0 \text{ и } M_z \neq 0$

# \* АКЦИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ ГРЕД



$$p_x^*(y,z) \quad \text{где је } N = \int_F p_x^* dF \quad \text{где } p_x^* = p_x^*(y,z)$$

закон ако у изједи оштен за  $\sigma_x$  смешно  
закон аксијалног напрезања  $M_y = M_z = 0$

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M_z I_y}{I_y I_z} y + \frac{M_y I_z}{I_y I_z} z \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{N}{F}}$$

Ој напон  $\sigma_x$  је равномерно распореден у попречном пресеку

Ово је тако решење као је оптерећење равномерно распоредено по пресеку, али ако није, али тако да се одукује на силу  $N$  у тачкишту основе, тада је ово решење приближно и према Saint-Venant-овом принципу тешко тачном решењу на деловима греде који су довољно далеко од крајева греде.

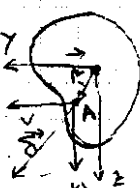
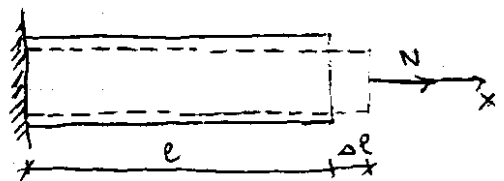
С обзиром да о свих елемената тензора напона једино  $\sigma_x \neq 0$  остале напона при аксијалном напрезању греде је линејско (тежно осно)

$$\text{Компоненте напона у којој равни} \quad \sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi = \frac{N}{2F} (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi = \frac{N}{2F} \sin 2\varphi$$

Одређуемо сада компоненте тензора деформација из Хуковог закона следи

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x = \frac{N}{EF} \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x) = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu N}{EF} \quad \epsilon_z = -\frac{\nu N}{EF} \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$$



компоненте померања деформационог интеракционог претходних израза

$$u = \int \epsilon_x dx = \frac{N}{EF} x$$

$$v = \int \epsilon_y dy = -\frac{\nu N}{EF} y$$

$$w = \int \epsilon_z dz = -\frac{\nu N}{EF} z$$

$\vec{s} = v \vec{e}_y + w \vec{e}_z$   
укључујући померање тачке А

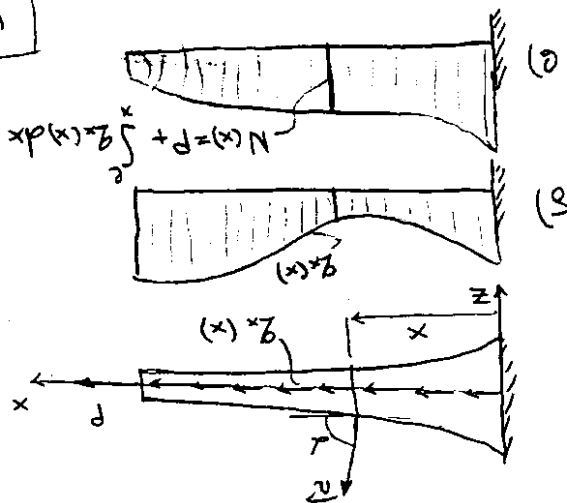
$$\vec{s} = -\frac{\nu N}{EF} [y \vec{e}_y + z \vec{e}_z] = -\frac{\nu N}{EF} \vec{r}$$

## ЗАКЉУЧАК

- Тачке које леже на оси  $x$  ( $y=z=0$ ) померају се само у правцу те осе ( $v=w=0$ )
- Тачке на некој правој паралелној  $x$ -оси имају и попречно померање које је пропорционално удаљености тих тачака од осе  $x$ . То померање има правцу вектора  $\vec{OA} = \vec{r}$ . Дакле та права ос је паралелна оси  $x$  и припада њој се ако се штап затегне, а одмакне се од ње ако се штап притисне
- Све тачке једног попречног пресека померају се исто у правцу осе  $x$  - тј равни померања постоји у једној равни и након деформације

• Изгибные напряжения  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF}$  где  $l$  — расстояние между сечениями  $N$  — осевая сила,  $EF$  — жесткость стержня.

EF — коэффициент жесткости стержня.



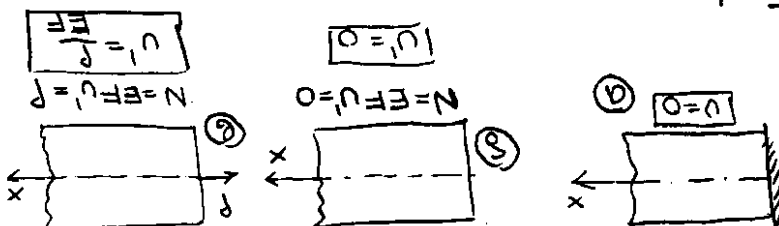
$$U = U(x) \text{ — потенциальная энергия деформации}$$

$$\frac{dU}{dx} = \epsilon_x = \frac{N(x)}{EF}$$

$$U' = \frac{N(x)}{EF}$$

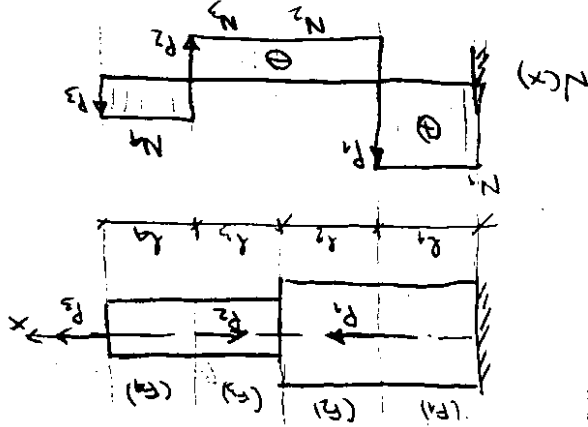
Изменение потенциальной энергии  $U$  при перемещении  $x$  равно работе осевой силы  $N$ .  
 $\frac{dU}{dx} = \epsilon_x = \frac{N(x)}{EF}$   
 $\frac{d^2U}{dx^2} = -\epsilon_x' = -\frac{N'(x)}{EF}$   
 $\frac{d^2U}{dx^2} = -\epsilon_x' = -\frac{N'(x)}{EF}$   
 $\frac{d^2U}{dx^2} = -\epsilon_x' = -\frac{N'(x)}{EF}$

Уравнение Лагранжа



$$U(x) = \int_0^x N(x) \cdot \frac{1}{EF} dx$$

• Уравнение Лагранжа



• Уравнение Лагранжа

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{EF_i}$$

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EF} + \Delta l_T$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF} + \epsilon_{xT}$$

## • СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ ПРОБЛЕМИ ПРИ АКСИЈАЛНОМ НАПРЕЗАЊУ ГРЕДЕ

Носач који се састоји од више штапова назива се конструктивни систем. Он може бити

① статички одређен - нормалне силе у свим штаповима се могу одредити из услова равнотеже

② статички неодређен - морају се поред услова равнотеже морати искористити и услови компатибилности деформација

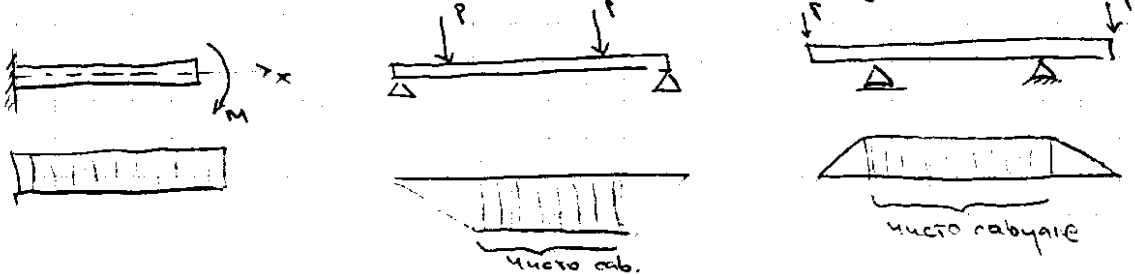
Потребан број ових ј-на одговара степеноу статичке неодређености система. Ови додатни услови обезбеђују да приликом деформација не дође до расцепљива беза излаза из појединих делова елемената система и називају се геометријским условима.

## • Димензионисање при аксијалном напрезању

димензије попречног пресека одређују се тако да је у свим попречним пресецима згоде задовољен услов  $\sigma_x \leq \sigma_d$  - дозволени напон, што је  $\sigma_x = \frac{N}{F} \leq \sigma_d \Rightarrow F \geq \frac{N}{\sigma_d}$

## \* ЧИСТО ПРАВО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ

Појављује се при праву савијању такође напрезање при коме су две компоненте унутрашњих сила једнаке нули осим момента савијања. Ако момент савијања делује око једне од осни инерције попречног пресека имамо право савијање греде.



Датим равном уз једне равном савијању. Појављује се при праву савијању такође напрезање при коме су две компоненте унутрашњих сила једнаке нули осим момента савијања. Ако момент савијања делује око једне од осни инерције попречног пресека имамо право савијање греде.

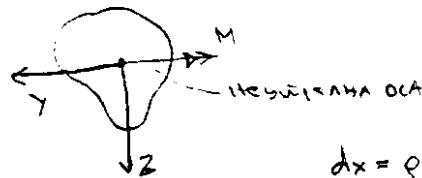
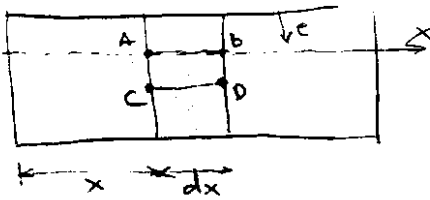
Пресек неутралне површи и равном савијању  $\sigma_x$  назива се еластична линија пресека која представља савијену издужину осу греде.

Пресек неутралне површи и равном попречног пресека греде назива се неутрална оса.

① Попречни пресеци греде при деформацији остају равни и управни на еластичну линију

② Све компоненте напона изазван  $\sigma_x$  су 0

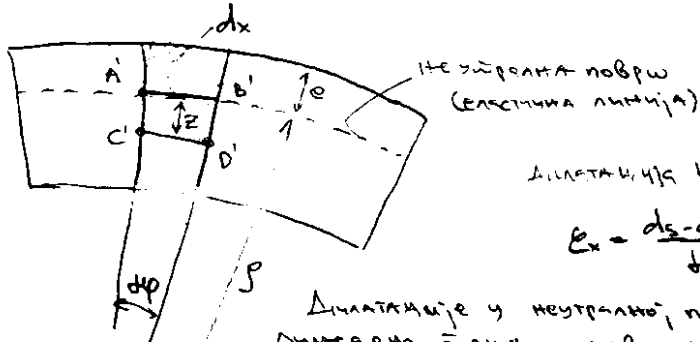
Ако са  $\rho$  означимо полупречник кривине еластичне линије имамо



$$dx = \rho d\varphi \quad \text{— дугина вјетке на } A'B' \text{ на}$$

$$ds = (\rho - z) d\varphi \quad \text{— } C'D' \text{ на растојању } z$$

$$\text{од } \pi\text{-и-ае}$$



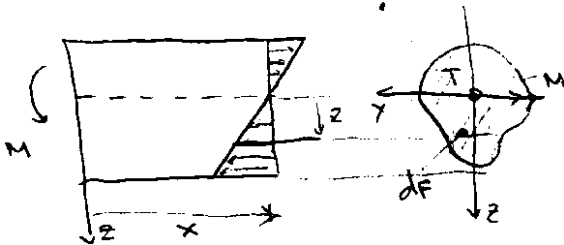
Дилатација вјетке  $C'D'$  је

$$\epsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{z}{\rho}$$

Дилатације у неутралној површи су  $= 0$  јер  $z = 0$  и мењају се линеарно према крајевима пресека

— Како је ставе напон из Хукоовог закона  $\rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x \rightarrow -\frac{E}{\rho} z$

— Једине нормални напон се мења линеарно са удаљењем од неутралне површи



Силе у произвољном пресеку  $z$  реге

$$\begin{aligned} N &= 0 & M_x &= 0 \\ T_y &= 0 & M_y &= -M = \text{const} \\ T_z &= 0 & M_z &= 0 \end{aligned}$$

$$N = \int_F \sigma_x dF = -\frac{E}{\rho} \int_F z dF = -\frac{E}{\rho} S_y = 0$$

$$T_y = \int_F \tau_{xy} dF = 0$$

$$T_z = \int_F \tau_{xz} dF = 0$$

$$M_x = \int_F \int_F (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dF = 0$$

$$M_y = \int_F \sigma_x \cdot z dF = -\frac{E}{\rho} \int_F z^2 dF = -\frac{EI_y}{\rho} = -M$$

$$M_z = \int_F \sigma_x \cdot y dF = -\frac{EI_y}{\rho} = 0$$

Из ових стави  $S_y = I_{yz} = 0$  што значи да је неутрална оса (односно  $y$  оса) главна централна оса инерције попречног пресека реге

Из  $M_y \dots \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y} = \text{const}$   $EI_y$  јесу величина коју зовемо крутост реге на сабијање око  $y$ -осе

Како је  $\kappa = \text{const}$  то је крива чистог првог сабијања Еластична линија.

Бертрам Ојлеров закон

Кривина еластичне линије реге је пропорционална моменту сабијања, а одбацио пропорционална крутости реге на сабијање

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{M}{I_y} z$$

А одвајајући се можда добити и из општег  $\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$

израз за ексцентрично напрезање

$$\text{Ако } N=0 \text{ и } M_z=0 \rightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

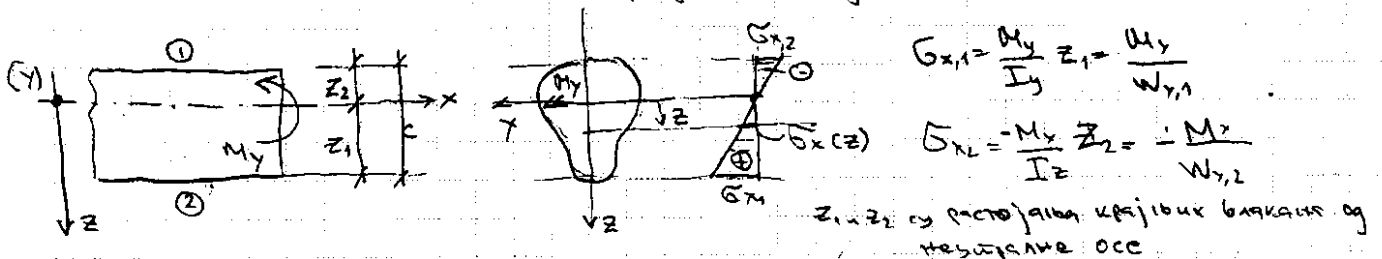


- Деформација греде при чистом правом савијању прелатеријин власнимост

се исто добија  $\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M_y}{EI_y} = \text{const}$

- Димензионисање при чистом савијању правих

- Као што смо видели екстремне вредности напона (нормалног) се јављају у крајњим влакнима греде тј. влакнима која су најудаљенија од неутралне осе ( $x=0$ )



При димензионисању захтева се да највећи нормални напон по апсолутној вредности не преконачи дозвољену вредност напона  $\sigma_d$

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\max} \leq \sigma_d$$

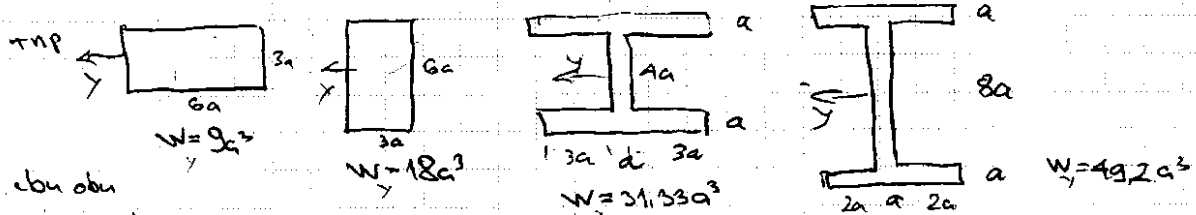
$$\Rightarrow \sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_d \Rightarrow W_y \geq \frac{M_y}{\sigma_d}$$

и онда се ради о димензијама

Датим пресеку увек треба одабрати тако да тежиште буде јавице затезујућег, савијајућег  
 учинило је  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sigma_{d,2}}{\sigma_{d,1}} < 1$

### ЗАКЉУЧАК

- При димензионисању греде попречног пресека треба изабрати да се она што више приближи попречном пресеку поситиште што већи отпорни момент. То се може постићи узгађавањем делова попречног пресека од неутралне осе



пресеци и највише површину  $F=18$

Било би идеално ако би се попречни пресек састојао из два правоугла појаса сваки површину  $F/2$ , у ствари ова два појаса морају бити спојена редом тако добијемо профиле I, E, U

- Максимални отпорни момент је  $W_{y,*} = \frac{1}{2} F \cdot c$

- Степен искоришћења пресека  $\eta = \frac{W_{y,\text{створено}}}{W_{y,*}} < 1$

### \* ЧИСТО ПРАВО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ ОД НЕХОМОГЕНОГ МАТЕРИЈАЛА

Поштрајмо греду од нехомогеног материјала тј. греду која је састављена од више делова који су међусобно спрегнути тако да се при деформацији греду понаша



с. оштрим да се при деформацији греду понаша као целина према изразу напона и појерним деловима пресека су

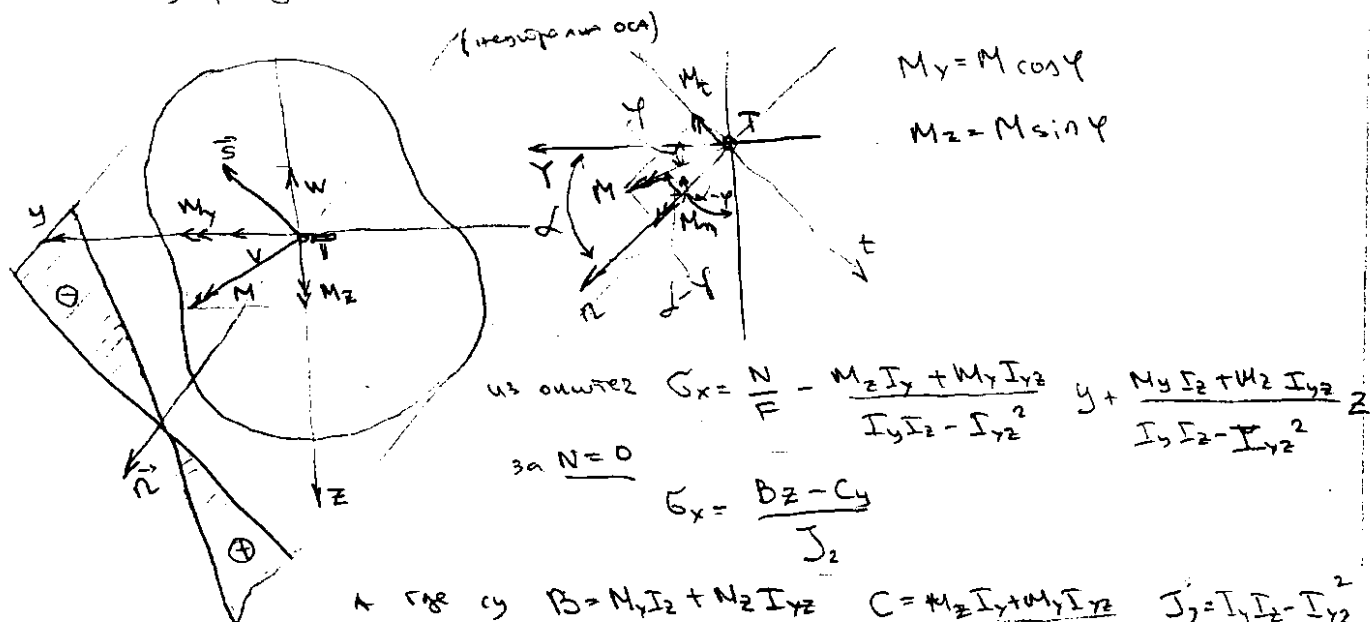
$$\sigma_x^{(k)} = -\frac{E_k}{\rho} z = -\eta_k \frac{E_0}{\rho} z$$

осадине (која одговара) свих материјала регулираће се на основни материјал  $\rho_k = \frac{E_k}{E_0}$ .

На крају ипак се добије  $G_x = \rho_k \frac{M_y}{I_y} \cdot 2$  где је  $I_y$  - аксијални момент инерције изабраног пресека у односу на  $y$ -осу.

## ЧИСТО КОСО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ

Уколико момент савијања не делује око једне од главних оса инерције као што је случај код чистог правог савијања имамо случај чистог косога савијања греде



а овде је  $J_2$  гинз инваријанта момента инерције пресека

- $\Pi$  - неутрална оса попречног пресека дефинишемо их као геометријско место тачака у којима је нормални напон  $\sigma_x = 0$

а то је  $G_x = 0 \Rightarrow Bz - Cy = 0$  тј.  $z = \frac{C}{B} y$   
 $z = \tan \alpha \cdot y$

најбо неутралне осе  $\Pi$  према осу  $y$   $\tan \alpha = \frac{C}{B} = \tan \alpha = \frac{I_y \tan \varphi + I_{yz}}{I_z + I_{yz} \tan \varphi}$

Експлицитно изразивши напон  $G_x$  јављају се у највећим и најмањим тачкама које припадају пресеку а највеће и најмање су од неутралне осе.

Извршимо сада трансформацију израза  $G_x = \frac{Bz - Cy}{J_2}$  са система  $(y, z)$  на систем оса  $(\eta, t)$  где се  $\Pi$  поклапа са са неутралном осом а  $t$  је  $\perp$  на  $\Pi$ у

$y = \eta \cos \alpha - t \sin \alpha$   $z = \eta \sin \alpha + t \cos \alpha$

у овом случају  $G_x = \frac{Bz - Cy}{J_2} = \frac{B(\eta \sin \alpha + t \cos \alpha) - C(\eta \cos \alpha - t \sin \alpha)}{J_2}$   
 $= \frac{B \cdot \eta \cdot \sin \alpha + B \cdot t \cdot \cos \alpha - C \cdot \eta \cdot \cos \alpha + C \cdot t \cdot \sin \alpha}{J_2} = \frac{\eta [B \sin \alpha - C \cos \alpha] + t [C \sin \alpha + B \cos \alpha]}{J_2}$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}$   $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}$

$G_x = \frac{B \cos \alpha + C \sin \alpha}{J_2} \cdot t = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{J_2} \cdot t$

$\Rightarrow G_x = \frac{M_{\Pi}}{J_2} t$

$\frac{M_{\Pi}}{J_2} = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{J_2}$

$[B \cos \alpha - C \sin \alpha] [\eta]$

ево и

као што будимо  $\sigma_x$  је лин. функција од  $t$

на одакле имамо је  $\sigma_x = \lambda t$  и  $M_n = \int_F \sigma_x dF = \lambda \int_F t^2 dF = \lambda \cdot I_n$

$\Rightarrow M_n = \lambda I_n \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{M_n}{I_n}}$  дакле  $\sigma_x = \frac{M_n}{I_n} \cdot t$

• ДЕФОРМАЦИЈЕ И ПОМЕРАЊА ГРЕДЕ ПРИ ЧИСТОМ КОСОМ САВИЈАЊУ

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x = \frac{1}{E} \frac{B \cdot z - C y}{J_z}$$

$$\epsilon_z = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\frac{\nu}{E} \frac{B \cdot z - C y}{J_z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

компоненте померања добијемо интеграли

$$u = \frac{1}{E J_z} (B z - C y) x$$

$$v = -\frac{\nu B}{E J_z} y z + \frac{C}{2 E J_z} [x^2 + \nu (y^2 - z^2)]$$

$$w = -\frac{B}{2 E J_z} [x^2 - \nu (y^2 - z^2)] + \frac{\nu C}{E J_z} y z$$

при чему су узети исти гранични услови као и у случају чистог правоугаоног сагијања  
 а одакле ова померања за тачке на осци ( $y=0=z$ ) следе

$$u=0$$

$$v = \frac{C}{2 E J_z} x^2$$

$$w = -\frac{B}{2 E J_z} x^2$$

овим једнама одређена је ела-  
 стичка линија греде

Интерет резултатез померања тачака  $x$  осе јесу  $s = |\vec{s}| = \sqrt{v^2 + w^2}$

! ПРАВАЦ ВЕКТОРА ПОМЕРАЊА  $\vec{s}$  НОРМАЛАН ЈЕ НА НЕУТРАЛНУ ОСУ  $n$

Раван  $tx$  је равна сагијана зреде

\* ИЗРАЗИ ЗА НАПОН И ДЕФОРМАЦИЈУ  $\gamma$  ОДНОСУ НА ГЛАВНЕ ЦЕНТРАЛНЕ ОСЕ  
 ИНЕРЦИЈЕ ПРЕСЕКА

Јако  $\Rightarrow$  главне централне осе пресека  $\Rightarrow I_{yz} = 0 \Rightarrow B = M_y I_z$  и  $C = M_z I_y$

$$\Rightarrow J_z = I_y I_z$$

$$\sigma_x = \frac{M_n}{I_n} \cdot t \quad \text{tg } \alpha = \frac{I_y}{I_z} \text{ tg } \varphi$$

$$u=0 \quad v = \frac{M_z}{2 E I_z} x^2 \quad w = -\frac{M_y}{2 E I_y} x^2 \quad |\vec{s}| = \frac{M_n}{2 E I_n} x^2 \quad \text{tg } \beta = -\frac{I_z}{I_y} \text{ tg } \varphi$$

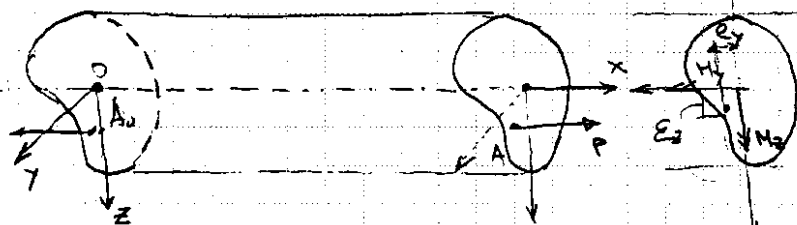
7

8

9

10

# ЕКСЦЕНТРИЧНО НАПРЕЗАЊЕ ГРЕДЕ



Оно настаје ако је зграда оптерећена на крајевима подужном силом која не пролази кроз тежиште попречног пресека.

Нека су  $y$  и  $z$  произвољне тежишне осе попречног пресека и нека сила  $P$  делује у тачки  $A_0$  окупно  $A$  чије су координате  $y_A = e_1$  и  $z_A = e_2$  ексцентрицитети силе  $P$

Ако силу  $P$  разложимо у тежишне попречног пресека, тада добијемо аксијалну силу  $N$  и  $M_y, M_z$ :

$$N = P \quad ; \quad M_y = e_2 \cdot P \quad M_z = -e_1 \cdot P$$

Одмах из ексцентричнога напрезања представља комбинацију аксијалног напрезања и чистог вентил са вентилу  $\bar{x}$

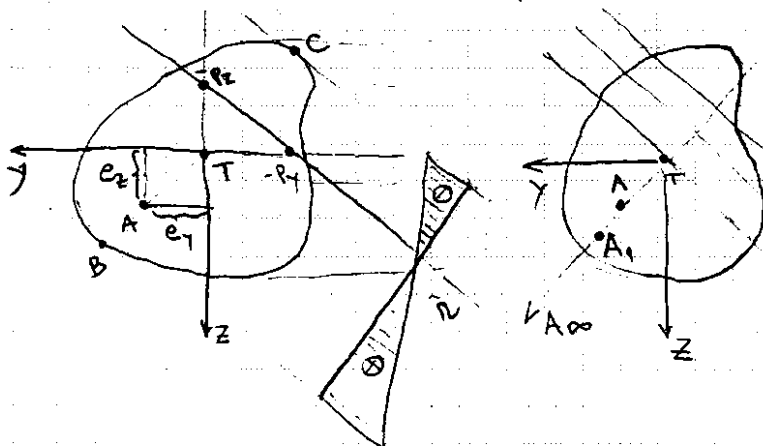
$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \gamma \cdot \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{J_z} + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{J_z} \cdot z \quad \text{Ако изложимо оно одозго}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{F} - \gamma \cdot \frac{e_1 P I_y + e_2 P I_{yz}}{J_z} + \frac{e_2 P I_z + e_1 P I_{yz}}{J_z} \cdot z$$

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left[ 1 - \frac{y}{P_y} - \frac{z}{P_z} \right] \dots \dots \dots \text{где су } P_y = - \frac{J_z}{(e_1 I_y - I_{yz} e_2)} \quad P_z = \frac{J_z}{F(I_z e_2 - I_{yz} e_1)}$$

Неутрална оса  $n$  дефинисана је са  $\sigma_x = 0 \Rightarrow$

$$1 = \frac{y}{P_y} + \frac{z}{P_z}$$



при померању напона тачке силе по правој која пролази кроз тежиште попречног пресека и неутрална линија се помера тангентално у истој смеру. Ако је тачка у бесконечно сити  $n$ -оса што пролази кроз тежиште.

Ако се пак напона тачка силе помера грлом неке граве  $n$  која не пролази кроз тежиште попречног пресека, тада се одговарајућа неутрална оса одређује око тачке  $M$  где је  $M$  напона тачка силе за коју је граве  $n$  неутрална оса

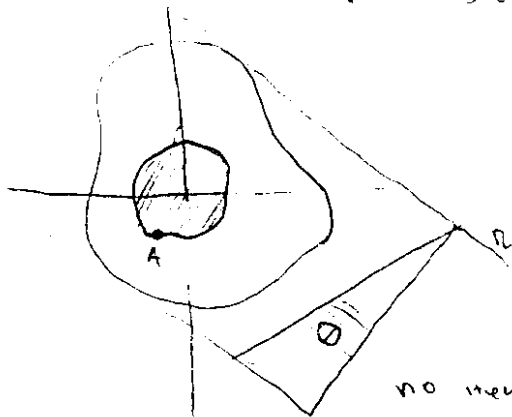
• специјалном случај када су  $y$  и  $z$  главне центричне осе

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{e_1}{I_y} y + \frac{e_2}{I_z} z \right) \quad \text{где су } I_y \text{ и } I_z \text{ главни полупречници инерције попречног пресека } \bar{x}$$

$$I_y = \frac{I_z}{F} \quad I_z = \frac{I_y}{F} \quad \text{тада су осечени неутралне осе на коор } 0 \Rightarrow P_y = - \frac{I_z}{e_1} \quad P_z = \frac{I_y}{e_2}$$

ЈЕЗГРО ПРЕСЕКА

Језгро пресека је површина око центарца попречног пресека која издржавају јачке силе  
ује неутралне линије (осе) додирују контуру попречног пресека



За одређивање језгра постоји произвољног померања  
попречног пресека треба изабрати карактеристичне  
неутралне осе  $\eta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) које тангирају  
попречни пресек и одређују одговарајуће осе  
уке  $p_{y(i)}$   $p_{z(i)}$  на координатним осяма

са којим решењем система

$$p_y = -\frac{I_z}{F(I_y e_y - I_{yz} e_z)} \quad p_z = -\frac{I_y}{F(I_z e_z - I_{yz} e_y)}$$

по неопознатим  $e_y$  и  $e_z$  и  $A[e_y^{(1)}, e_z^{(1)}]$

$$\text{Тј. } e_y^{(1)} = -\frac{1}{F} \left[ \frac{I_z}{p_{y(i)}} + \frac{I_{yz}}{p_{z(i)}} \right] = \frac{p_z}{p_{y(i)}} + \frac{I_{yz}}{p_{z(i)}} \quad \text{зг. } \begin{cases} p_y = -\frac{I_z}{F} \\ p_z = -\frac{I_y}{F} \\ I_{yz} = -\frac{I_{yz}}{F} \end{cases}$$

$$e_z = -\frac{1}{F} \left[ \frac{I_y}{p_{z(i)}} + \frac{I_{yz}}{p_{y(i)}} \right] = \frac{p_y}{p_{z(i)}} + \frac{I_{yz}}{p_{y(i)}}$$

Ако су  $y$  и  $z$  главне осе  $I_{yz}=0$

$$\Rightarrow e_y^{(1)} = -\frac{I_z}{F p_{y(i)}} = \frac{p_z}{p_{y(i)}} = \frac{I_z^2}{p_{y(i)}} \quad e_z = -\frac{I_y}{F p_{z(i)}} = \frac{p_y}{p_{z(i)}} = -\frac{I_y^2}{p_{z(i)}}$$

Ако се неопознати помера само по осци симетрије пресека тада није неопходно  
одређивати цело језгро већ само карактеристичне  $A_1$  и  $A_2$  на осци симетрије

$$e_z^{(1)} = -\frac{I_y}{F z_1} = -\frac{W_{y1}}{F} \quad e_z^{(2)} = -\frac{I_y}{F (-z_2)} = \frac{W_{y2}}{F}$$

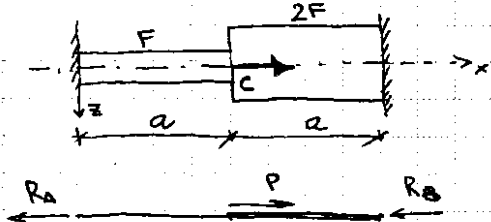
# АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ ГРЕДЕ

20

## -ЗАДАЦИ

### ① ЗАДАТАК

Обострано укљештен штаб оптерећен је подужном силом на половини распона. Одредити реакције ослонаца А и В и нацртати дијаграм нормалног напона по дужини носача.



Општењо систем је једанпут статички неодређен, терминат непознате,  $R_A$  и  $R_B$  а само једну једначину равнотеже  $R_A + R_B = P$

-Другу једну једначину добијемо из услова да штаб остаје истих димензија након деформације јер је обострано укљештен

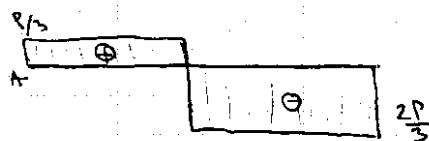
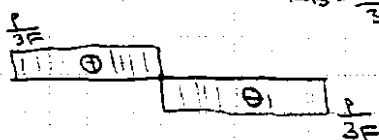
$$\Delta l = 0 = \int_0^L \frac{N(x)}{EF(x)} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{EF_i}$$

како је  $\Delta l = \frac{R_A \cdot a}{EF_1} - \frac{R_B \cdot a}{EF_2} = 0$  и  $F_1 = F_2 \Rightarrow R_A = \frac{R_B}{2}$

Дакле систем јуна  $\begin{cases} R_A + R_B = P \\ 2R_A = R_B \end{cases} \Rightarrow R_A = \frac{P}{3}$   
 $R_B = \frac{2P}{3}$

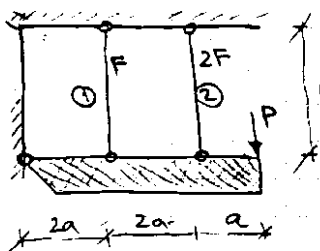
$$\sigma_1 = \frac{R_A}{F} = \frac{P}{3F}$$

$$\sigma_2 = \frac{-R_B}{2F} = \frac{-P}{3F}$$



### ② ЗАДАТАК

Идеално крути зтега је зглобно основана у тачки А и везана је са две еластичне затезе различитих аксијалних кривости. Одредити силе у тим затезама услед деловања силе P.



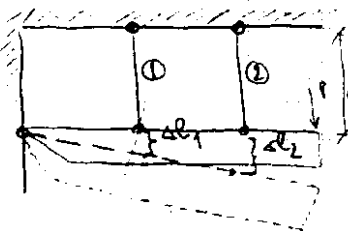
систематно је следеће

$$\sum M_A = 5Pa - 2N_1l - 4N_2l = 0$$

$$\Rightarrow 2N_1 + 4N_2 = 5P$$

Систем је једанпут статички неодређен (непознате  $R_A, N_1, N_2$  а једна једначина равнотеже је 2. и то  $M_A = 0$  и  $\sum Y = 0$ )

Додатни услов поврнућемо из:



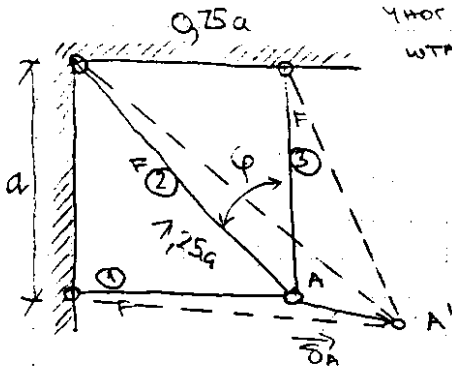
$\Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1$  из Тхетс теореме.  $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{EF}$  и  $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E2F}$

$$\Rightarrow \frac{N_2 l}{E2F} = \frac{N_1 l \cdot 2}{EF} \Rightarrow N_2 = 4N_1$$

Решавамо систем  $\begin{cases} 2N_1 + 4N_2 = 5P \\ N_2 = 4N_1 \end{cases} \Rightarrow N_1 = \frac{5}{18}P$   
 $N_2 = \frac{10}{9}P$

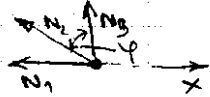
• ЗАДАЧА 3

Кондуктивни систем састоји се од три штапа истих површина попречног пресека. Огретити нормалне напоне у штаповима услед загрева штапа (1) за  $\Delta t = 40^\circ\text{C}$ . Огретити такође померање тачке А ако су:

$$a = 4\text{m} \quad \sin \varphi = \frac{3}{5} \quad \alpha = 200 \text{ GPa} \quad \text{и} \quad \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$


- Система статистики 1 неогречен

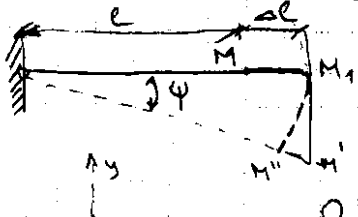
↑↑  
Равнотежа убора А



$$\sum x = -N_1 - N_2 \sin \varphi = 0$$

$$\Sigma Y = N_3 + N_2 \cos \varphi = 0$$

Фали нит још једна јатта. Из кона повластити преко померања. Претпоставке су да су соферица  
мала  $\Rightarrow$  ротације су мале штапови  $\Rightarrow$  се у ј-ти померања њихов утицај занемарује. А тачке  
приликом одређивања положаја тачке  $A'$  усвојити неко апроксимацију да се при малој ротацији,  
крај штапа у месту по луку крета се по тангенти



$$\Delta l_1 \sin \varphi' + \Delta l_3 \cos \varphi' = \Delta l_2$$

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EF} + \Delta t l_1 = \frac{N_1 \cdot 3a}{4EF} + \frac{3a}{4} \\ \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EF} = \frac{N_2 \cdot 5a}{4EF} \\ \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{EF} = \frac{N_3 \cdot a}{EF} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} \left[ \frac{N_1 36}{4EF} + \frac{3}{4} \frac{a \cdot \Delta \theta}{EF} \right] + \frac{1}{5} \left[ \frac{N_2 49}{EF} \right] = \frac{N_2 50 \cdot 5}{4EF - 5}$$

$$9N_1 a + 9a' EF_{\text{Lst}} + 16N_3 a' = 25N_2 a'$$

$$9N_1 + 9EF_{\Delta t} + 16N_3 = 25N_2$$

$$g \cdot EF \Delta t = 9 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot F \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$(1) \quad 1 N_1 + \frac{3}{2} N_2 + 0 N_3 = 0$$

$$(11) \quad 0 \cdot N_1 + \frac{4}{5} N_2 + 1 \cdot N_3 = 0$$

$$9N_1 - 25N_2 + 16N_3 = 869000000 \text{ F}$$

$$N_1 = -12 \cdot 10^6 \text{ F}$$

$$G_1 = \frac{N_1}{F_1} = -12 \text{ MPa}$$

$$N_2 = +2 \cdot 10^6 \text{ F}$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{15}} = 2 \text{ MPa}$$

$$N_3 = 16 \cdot 10^6 \text{ F}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F} = -16 \text{ MPa}$$

- Определить компоненты вектора  $\vec{r}_{AB}$

$$U_A = \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 3 \cdot A_m}{A_{EF}} + \frac{3 \cdot 4}{A} \Delta t = \frac{-12 \cdot 10^6 \cdot 3}{200 \cdot 10^9} + 3 \cdot 12 \cdot 10^5 \cdot 40 = 0,00162 = 1,62 \text{ mm}$$

$$V_1 = \Delta l_3 = \frac{N_2 \cdot l_3}{EF} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 9}{200 \cdot 10^9} = 0,00032 = 0,32 \text{ mm}$$

- Результате измерения танга А  $\delta A = \sqrt{U_A^2 + V_A^2} = \sqrt{1,62^2 + 0,32^2} = 1,30 \text{ мм}$

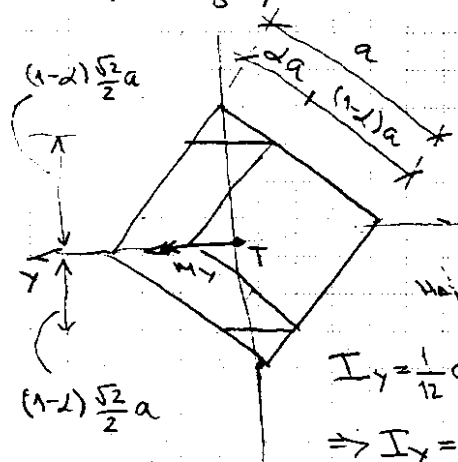


# ЧИСТО ПРАВО САВИЈАЊЕ ГРЕЛЕ 72

- ЗАДАЦИ -

## ① ЗАДАТАК

Греда квадратног пресека је изложена чистом савијању око y-осе. Одредити величину  $\alpha$  за коју се одсецањем горњег и доњег троугла пресека допунити највећа носивост греде



Без одсецања ..... дакле за  $\alpha=0$  имамо

$$I_y = \left[ \frac{1}{36} \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot 3}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{2} \right] \times 2 = \frac{1}{12} a^4$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{1}{6\sqrt{2}} a^3$$

Највећа носивост је кад је  $\sigma = \frac{M_b}{W_e}$  - најмања  $\Rightarrow W_{e,\max}$

$$I_y = \frac{1}{12} a^4 - 2 \left[ \frac{1}{36} \alpha a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\alpha a\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left[ (1-\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{2}}{2} \right]^2 \cdot \frac{\alpha^2 a^2}{2} \right]$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{(1-\alpha)^3 (1+3\alpha)}{12} a^4$$

$$W_y(\alpha) = \frac{I_y}{\frac{(1-\alpha)\sqrt{2} a}{2}} = (1-\alpha)^2 (1+3\alpha) W_y^0$$

$$\frac{dW_y}{d\alpha} = (1-\alpha)(1-9\alpha) W_y^0 = 0$$

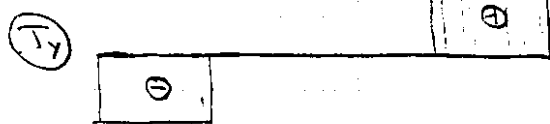
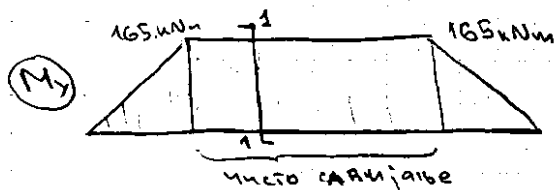
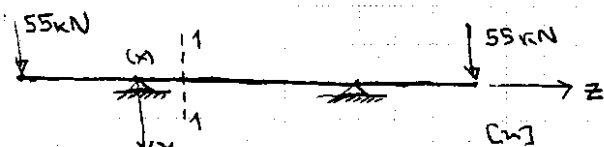
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \dots W_{y,\max} = W_y\left(\frac{1}{9}\right) = 1.0535$$

## ② ЗАДАТАК

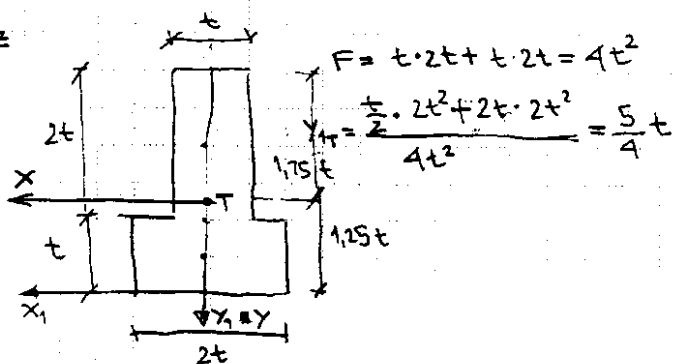
Задат је носач са два преломљива.

(а) Извршити димензионисање носача у пресеку 1-1. ако је  $\sigma_d = 12 \text{ MPa}$

(б) За тако димензионисан носач нацртати дијаграм нормалног напона



• ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРЕС



$$F = t \cdot 2t + t \cdot 2t = 4t^2$$

$$y_{tr} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2t^2 + 2t \cdot 2t^2}{4t^2} = \frac{5}{4} t$$

$$I_x = \frac{1}{12} 2t \cdot t^3 + \left(\frac{3}{4} t\right)^2 \cdot 2t^2 + \frac{1}{12} t \cdot (2t)^3 + \frac{3}{4} t^2 \cdot 2t^2$$

$$= \frac{1}{6} t^4 + \frac{2}{3} t^4 + 4t^4 \cdot \frac{9}{16} = 3.083 t^4$$

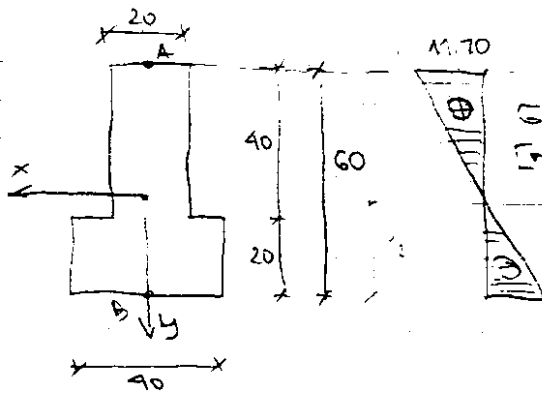
$$W_x = \frac{I_x}{z_{\max}} = \frac{3.083 t^4}{1.75 t} = 1.762 t^3$$

Пресек 1-1 изложен је чистом савијању и то  $M_y = 165 \text{ kNm}$

$$\text{КАКО ЈЕ } \sigma_d \gg \frac{M_x}{W_x} \Rightarrow W_x \gg \frac{M_x}{\sigma_d} = \frac{165 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 0.01375 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{0.01375}{1.762}} \approx 0.198 \text{ m} \approx 19.8 \text{ cm}$$

узимамо  $t = 20$

(8) Чертим распределение нормальных напряжений в сечении 1-1



$$I_{x, \text{св}} = 3,083 \cdot 10^9 = 403280 \text{ см}^4 \quad W_{x, \text{св}} = 14096 \text{ см}^3$$

$$[\text{МПа}] \quad \sigma_{x, A} = \frac{-M_x}{W_x} = \frac{165 \cdot 10^3}{14096 \cdot 10^{-6}} = +11,70 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{x, B} = \frac{-M_x}{I_{x, \text{св}}} \cdot y_2 = \frac{165 \cdot 10^3}{403280} \cdot 25 \cdot 10^{-2} = -8,35 \text{ МПа}$$

# ЧИСТО КОСО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ

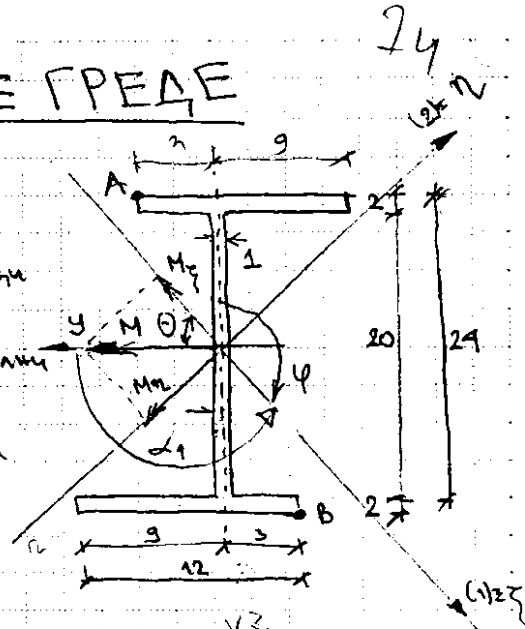
- ЗАДАЦИ -

## ① ЗАДАТАК

За греду боковног пресека и оптерећења према слици одредити:

(а) Величину спољног момента  $M$  тако да највећи нормални напон на prese  $\sigma_d = 140 \text{ MPa}$

(б) за тако одређен момент  $M$  нацртати дијаграм нормалног напона



• Геометричке карактеристике пресека:

$$I_y = \frac{1}{12} [12 \cdot 2^3 \cdot 2 + 4 \cdot 20^3] + 11^2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 2 = 6431 \text{ cm}^4 \quad I_z = 1010 \text{ cm}^4 \quad I_{yz} = 1584 \text{ cm}^4$$

- нагиб нецентрале осе јесу  $\tan \alpha = \frac{C}{B} = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{M_y I_z + M_z I_{yz}} = \frac{M_y I_{yz}}{M_y I_z} = \frac{1584}{1010} = 1.5683$

Јер је  $M$  у правцу осе  $y$

$$\alpha = \arctan 1.5683 = 57.4773^\circ$$

Ако схитирамо овај чео бићемо да се највећи напони појављују у тачкама  $A(3;12)$  и  $B(-3;12)$

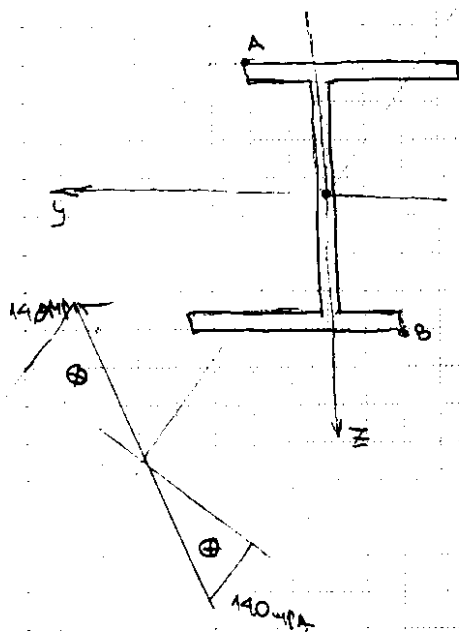
у координатах  $A$  и  $B$  бићу да ће  $\sigma_{x,A} = -\sigma_{x,B}$

$$\sigma_{x,B} = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} [(M_y I_z + M_z I_{yz})z - (M_z I_y + M_y I_{yz})y]$$

$$\sigma_d \geq \sigma_{x,B} = \frac{M(I_z z - I_{yz} \cdot y)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{\sigma_d \cdot (I_y I_z - I_{yz}^2)}{I_z \cdot z - I_{yz} \cdot y} = \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 4.0465 \cdot 10^{-10}}{12 \cdot 120 \cdot 10^{-10} + 1584 \cdot 10^{-10}}$$

$$M \geq \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 4.0465}{16.872} \geq 33579.84 \text{ Nm} \geq 33.579 \text{ kNm}$$

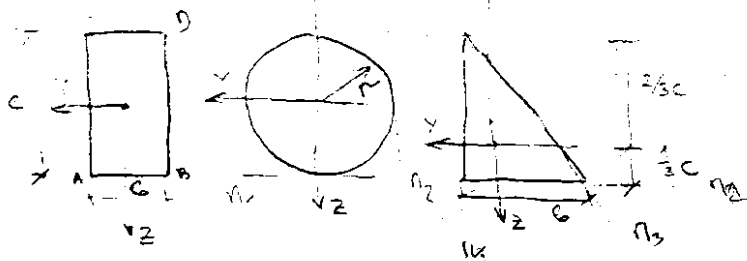


# ЕКСЦЕНТРИЧНО НАПРЕЗАЊЕ, ЈЕЗГРО

-ЗАДАЦИ-

## ① ЗАДАТАК

За одреке облике на слици одређити језгро пресека



### (a) ПРАВОУГАОНИК

карактеристичне  $\eta$ -осе су правци CD и DB.

Ихови одсечци на  $y$  и  $z$  осе су

$$\overline{CD}: p_y = 0, p_z = \frac{c}{2}$$

$$\overline{DB}: p_y = \frac{b}{2}, p_z = 0$$

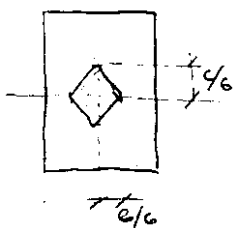
Геометријске карактеристике пресека

$$I_y = \frac{1}{12} b c^3, I_z = \frac{1}{12} c b^3, I_{yz} = 0, F = b \cdot c$$

$$f_z = -\frac{I_z}{F} = -\frac{1}{12} \frac{b^3 c}{b c} = -\frac{b^2}{12}, f_y = -\frac{I_y}{F} = -\frac{1}{12} \frac{b c^3}{b c} = -\frac{c^2}{12}, f_{yz} = 0$$

$$\overline{CD}: e_y = \frac{f_z}{p_y} + \frac{f_{yz}}{p_z} = -\frac{b^2}{12 \cdot 0} = 0, e_z = \frac{f_y}{p_z} + \frac{f_{yz}}{p_y} = -\frac{1}{12} \frac{c^2 \cdot 2}{c} = -\frac{c}{6}$$

$$\overline{DB}: e_y = \frac{f_z}{p_y} + \frac{f_{yz}}{p_z} = -\frac{b^2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{12}, e_z = 0 \quad \text{Стога } A_1 (0, -\frac{1}{6}c) \quad A_2 (-\frac{1}{12}b, 0)$$



### (b) КРУГ

$$\eta_1: p_y = 0, p_z = r$$

$$\eta_2: p_y = r, p_z = 0$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} \int_F r^2 dF = \frac{1}{2} \int_0^r r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow I_y = I_z = \frac{1}{2} \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \pi r^4$$

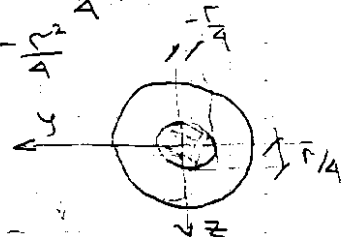
$$f_y = f_z = -\frac{1}{4} \frac{\pi r^4}{\pi r^2} = -\frac{r^2}{4}$$

$$\eta_1: e_y^{(1)} = \frac{f_z}{p_y} = 0, e_z^{(1)} = \frac{f_y}{p_z} = -\frac{r^2}{4r} = -\frac{r}{4}$$

$$\eta_2: e_y^{(2)} = -\frac{r}{4}, e_z^{(2)} = 0$$

$$A_1 (0, -\frac{r}{4})$$

$$A_2 (-\frac{r}{4}, 0)$$



### 4) ТРОУГАО

геометријске карактеристике

$$I_y = \frac{1}{36} b^3 c, I_z = \frac{1}{36} c^3 b, I_{yz} = -\frac{1}{72} b^2 c^2$$

$$\eta_1: p_y = \frac{b}{3}, p_z = 0$$

$$\eta_2: p_y = 0, p_z = \frac{c}{3}$$

$$\eta_3: p_y = \frac{b}{2}, p_z = \frac{c}{3}$$

$$f_z = -\frac{I_z}{F} = -\frac{1}{36} \frac{c^3 b}{b c} = -\frac{c^2}{36}, f_y = -\frac{I_y}{F} = -\frac{1}{36} \frac{b^3 c}{b c} = -\frac{b^2}{36}, f_{yz} = -\frac{I_{yz}}{F} = +\frac{1}{72} \frac{b^2 c^2}{b c} = \frac{1}{36} b c$$

$$f_y = -\frac{I_y}{F} = -\frac{1}{36} \frac{b^3 c}{b c} = -\frac{b^2}{36}$$

$$f_{yz} = -\frac{I_{yz}}{F} = +\frac{1}{72} \frac{b^2 c^2}{b c} = \frac{1}{36} b c$$

$$e_y^{(1)} = \frac{f_z}{p_y} + \frac{f_{yz}}{p_z} = \frac{-\frac{c^2}{36}}{\frac{b}{3}} + \frac{\frac{1}{36} b c}{\frac{c}{3}} = -\frac{c}{12} + \frac{b}{12} = \frac{b-c}{12}$$

$$e_z^{(1)} = \frac{f_y}{p_z} + \frac{f_{yz}}{p_y} = \frac{-\frac{b^2}{36}}{\frac{c}{3}} + \frac{\frac{1}{36} b c}{\frac{b}{3}} = -\frac{b}{12} + \frac{c}{12} = \frac{c-b}{12}$$

$$e_y^{(2)} = \frac{f_z}{p_y} + \frac{f_{yz}}{p_z} = \frac{-\frac{c^2}{36}}{0} + \frac{\frac{1}{36} b c}{\frac{c}{3}} = \frac{b}{12}$$

$$e_z^{(2)} = \frac{f_y}{p_z} + \frac{f_{yz}}{p_y} = \frac{-\frac{b^2}{36}}{\frac{c}{3}} + \frac{\frac{1}{36} b c}{0} = -\frac{b}{12}$$

$$e_y^{(3)} = \frac{f_z}{p_y} + \frac{f_{yz}}{p_z} = \frac{-\frac{c^2}{36}}{\frac{b}{2}} + \frac{\frac{1}{36} b c}{\frac{c}{3}} = -\frac{2c}{12} + \frac{b}{12} = \frac{b-2c}{12}$$

$$e_z^{(3)} = \frac{f_y}{p_z} + \frac{f_{yz}}{p_y} = \frac{-\frac{b^2}{36}}{\frac{c}{3}} + \frac{\frac{1}{36} b c}{\frac{b}{2}} = -\frac{2b}{12} + \frac{c}{12} = \frac{c-2b}{12}$$

$$A_1 = (-\frac{b}{6}, \frac{c}{12})$$

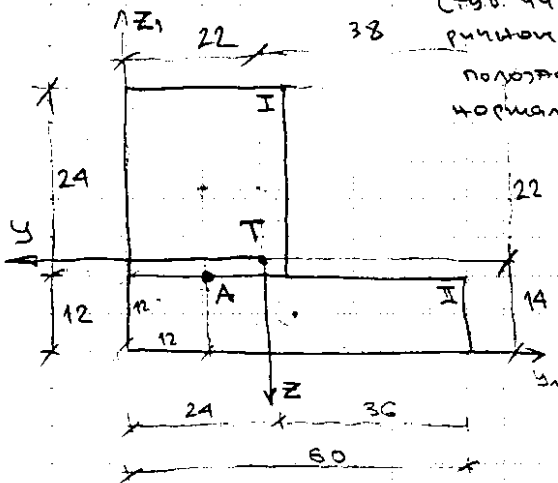
$$A_2 = (\frac{1}{12} b, -\frac{1}{6} c)$$

$$A_3 = (-\frac{1}{12} b, -\frac{1}{12} c)$$



2) ЗАДАЧА

Стуб чврст је пресек на слици приказан. Оптерећен је ексцент-  
ричним силам притиска од 500kN која делује у тачки А. Определити  
положај неутралне осе, издрго пресека и нацртати дијаграм  
нормалних напона.



A (e<sub>y</sub>, e<sub>z</sub>) A = (10, 2)  
e<sub>y</sub> = 10 e<sub>z</sub> = 2

• Геометријске карактеристике пресека

$$F_I = 24 \times 24 = 576 \text{ cm}^2 \quad F_{II} = 60 \times 12 = 720 \text{ cm}^2 \quad F_{I+II} = 1296 \text{ cm}^2$$

$$y_T = \frac{30 \cdot 720 + 576 \cdot 12}{1296} = 22 \quad z_T = \frac{576 \cdot 24 + 720 \cdot 6}{1296} = 14$$

$$I_y = \frac{1}{12} 60 \cdot 12^3 + \frac{1}{12} 24^4 + 8^2 \cdot 720 + 10^2 \cdot 576 = 139968 \text{ cm}^4$$

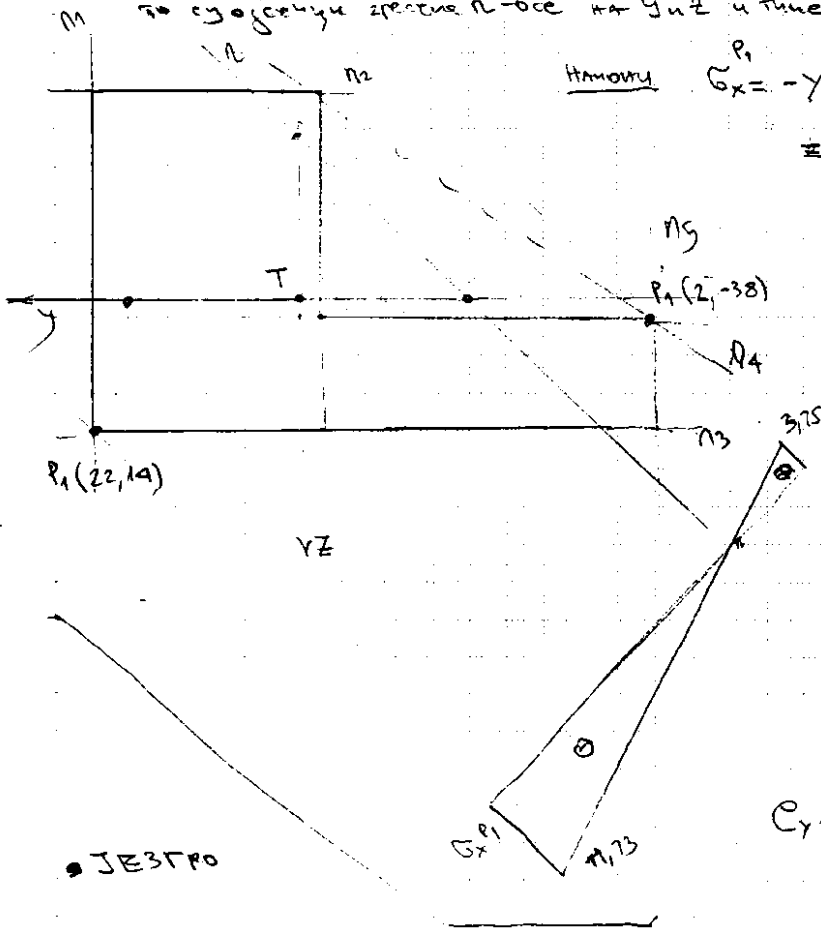
$$I_z = \frac{1}{12} 60^3 \cdot 12 + \frac{1}{12} 24^4 + 8^2 \cdot 720 + 10^2 \cdot 576 = 347328 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = -8^2 \cdot 720 - 10^2 \cdot 576 = -103680 \text{ cm}^4 \quad I_2 = 3,865 \cdot 10^8$$

$$p_y = - \frac{I_z}{(e_y I_y - I_{yz} e_z) F} = - \frac{378,65 \cdot 10^8}{(10 \cdot 139968 + 103680 \cdot 2) 1296} = -18,18 \text{ cm}$$

$$p_z = - \frac{I_y}{(e_z I_z - I_{yz} e_y) F} = - \frac{378,65 \cdot 10^8}{(2 \cdot 347328 - 103680 \cdot 10) 1296} = -16,87 \text{ cm}$$

• Издрго пресека по осе на y и z и тачке споја неутралне линије



Напомена  $G_x^{P1} = -y \cdot \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_z} + z \cdot \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y} =$

где  $M_z = e_y \cdot P = -10 \cdot 500 \cdot 10^3 = -5 \cdot 10^6$

$M_y = e_z \cdot P = 2 \cdot 500 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^6$

или  $G_x^{P1} = \frac{P}{F} \left[ 1 - \frac{y}{p_y} - \frac{z}{p_z} \right]$

$$G_x = \frac{500 \cdot 10^3}{1296 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 - \frac{22}{-18,18} - \frac{14}{-16,87} \right]$$

$$G_x^{P1} = 71,73 \text{ MPa}$$

$$G_x^{P2} = 3,75 \text{ MPa}$$

$$p_y = - \frac{I_y}{F} = - \frac{139968}{1296} = -108$$

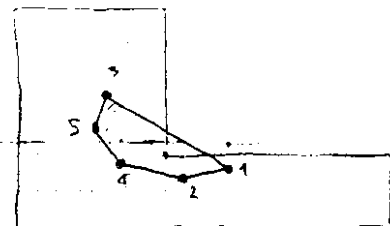
$$p_z = - \frac{I_z}{F} = - \frac{347328}{1296} = -268$$

$$p_{yz} = - \frac{I_{yz}}{F} = - \frac{103680}{1296} = -80$$

$$c_y = \frac{p_z}{p_y} + \frac{p_{yz}}{p_z} \quad c_z = \frac{p_y}{p_z} + \frac{p_{yz}}{p_y}$$

• ИЗДРГО

✓ n <sub>1</sub>	p <sub>y</sub> = 22	p <sub>z</sub> = 0	c <sub>y</sub> = -12,18	c <sub>z</sub> = 3,636
✓ n <sub>2</sub>	p <sub>y</sub> = 0	p <sub>z</sub> = -22	c <sub>y</sub> = -3,636	c <sub>z</sub> = 4,909
✓ n <sub>3</sub>	p <sub>y</sub> = 0	p <sub>z</sub> = 14	c <sub>y</sub> = 5,714	c <sub>z</sub> = -7,714
(n <sub>4</sub> )	p <sub>y</sub> = -35	p <sub>z</sub> = -23,3	c <sub>y</sub> = 4,23	c <sub>z</sub> = 2,34
n <sub>5</sub>	p <sub>y</sub> = -38	p <sub>z</sub> = 0	c <sub>y</sub> = 7,05	c <sub>z</sub> = -2,11



τ<sub>z</sub>

1. The first part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

2. The second part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

3. The third part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

4. The fourth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

5. The fifth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

6. The sixth part of the document is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the company. The names are listed in alphabetical order, and each name is followed by the position to which the person has been appointed.

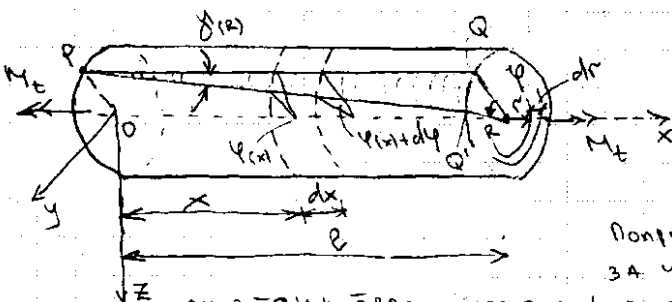
# **TORZIJA GREDE**





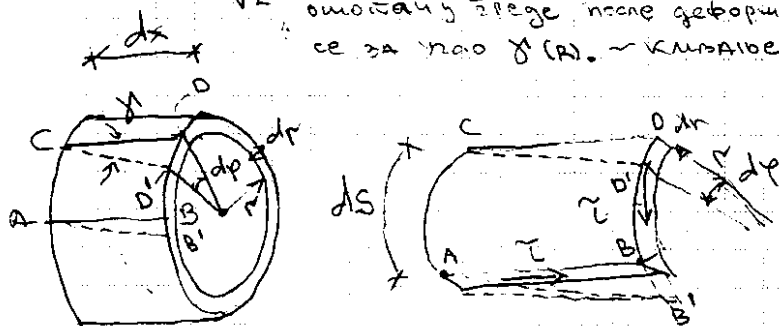
# ТОРЗИЈА ГРЕДЕ

- При деформацији штапа попречни пресеци остају равни и управни на осу штапа
- попречни пресеци заравњају се при деформацији као крвте плоче, тј остају прави



Како померање зрече као крвтег тела не утиче на стање напона и деформација, пожељно ради једноставности, да усвојимо да је леви крај непокретан, а да се десни зароти у односу на леви за угао  $\varphi(x)$

Попречни пресек на удаљењу  $x$  заравњаје се за угао  $\varphi = \varphi(x)$ . Поједино влакно  $PQ$  на омотачу зрече после деформације прелази у положај  $PQ'$  тј заравњаје се за угао  $\gamma(x)$ . — кривање



Десни крај заротиран је према левом за угао  $d\varphi$ . Правугаоник  $ABCD$  после деформације прелази у  $A'B'C'D'$ . Првобитни угао  $\angle DCA = 90^\circ$  сменаује се за угао  $\angle DCD' = \gamma(x)$  — кривање  $\gamma(x)$

$$\overline{DD'} = \gamma dx \quad \text{односно} \quad CD' \cos \gamma = dx \Rightarrow CD' = \frac{dx}{\cos \gamma} \quad \text{и} \quad DD' = CD' \sin \gamma = \tan \gamma dx \quad \text{за мале} \quad \gamma \rightarrow \delta$$

$$\text{исто тако} \quad \overline{DD'} = r d\varphi \Rightarrow \gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \Theta \quad \text{зга је} \quad \Theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{КАО ТОРЗИЈЕ}$$

$\Theta$ -коэффициент торзије — то је релативно обртање два попречна пресека на јединичном растојању

из Хуковог закона  $\gamma = \frac{1}{G} \tau$  зга је  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  модул кривања

$$\Rightarrow \tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \Theta$$

Дакле ситични напон је линеарна функција од полупречника  $r$ , а делује у правцу управном на полупречник пресека. Делује тако делујтез ситичтез на пона у цент пресека еквивалентно је моменту торзије.

$$M_t = \int_F \tau \cdot r dF = \int_F G r \Theta r dF = G \Theta \int_F r^2 dF = G \cdot \Theta \cdot I_0$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{M_t}{G I_0} \quad \text{а величина} \quad G I_0 \quad \text{је} \quad \text{же} \quad \text{торзиона} \quad \text{кривост} \quad \text{зрече} \quad I_0 = \frac{1}{2} \pi R^4$$

$$\text{јер} \quad I_0 = \int r^2 r dr \int d\varphi = \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \pi r^4$$

$$\text{коначно} \quad \tau = G r \cdot \Theta = G r \frac{M_t}{G I_0} = \frac{M_t}{I_0} r = \tau$$

— величина обртања произвољног зречека

$$\text{како је} \quad \Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G I_0} \Rightarrow d\varphi = \frac{M_t}{G I_0} dx \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_t}{G I_0} dx \quad \text{зга је} \quad \varphi_0 = \varphi$$

$$\text{Ако је штап} \quad G I_0 = \text{const} \quad \text{и} \quad M_t = \text{const} \Rightarrow \Delta \varphi = \varphi(x) - \varphi_0 = \frac{M_t}{G I_0} \cdot x$$

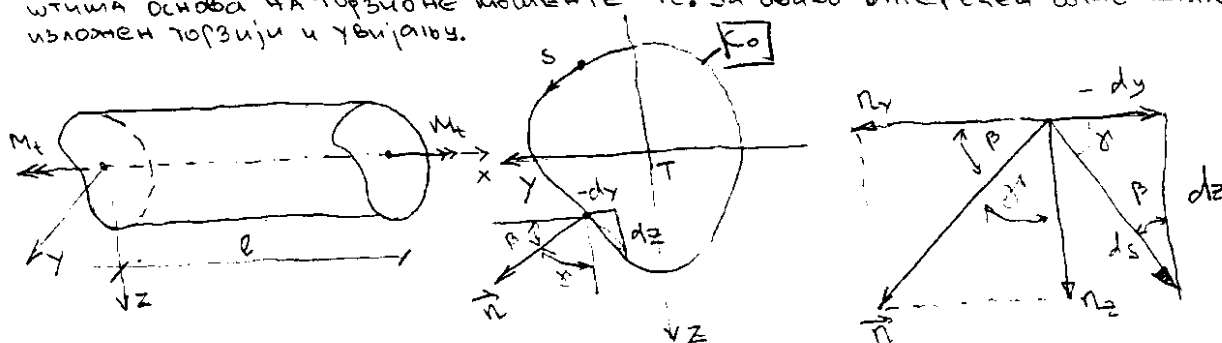
$$\text{— МАХ ситичтез напона} \quad \tau = \frac{M_t}{I_0} R = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{зга је} \quad W_t = \frac{I_0}{R} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{R} = \frac{1}{2} \pi R^3 = W_t$$

отпорни момент при торзији

# \*ТОРЗИЈА ГРЕДЕ ПРОИЗВОЛЈНОГ ПУНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА

81

Испитивамо призматичан штап пуног попречног пресека који је оптерећен спољашњим површинским силама које делују само на основима штапа и које се редукцију у тешнитима основа на торзионе моменте  $M_t$ . За овако оптерећен штап кажемо да је изложен торзији и увијању.



За одређивање напона и деформација користимо S-V полуобратни поступак. Претпоставићемо да су од свих компонента тензора напона само две сличне компоненте  $\tilde{\tau}_{xz}$  и  $\tilde{\tau}_{xy}$  различите од нуле.  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ ,  $\tilde{\tau}_{xy} \neq 0$ ,  $\tilde{\tau}_{xz} \neq 0$

Запнећемо заједничке силе из једнакости силе

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} = 0$$

као што видимо  $\tilde{\tau}_{xy}$  и  $\tilde{\tau}_{xz}$  не зависе од  $x$  .....  $\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{xy}(y, z)$  и  $\tilde{\tau}_{xz} = \tilde{\tau}_{xz}(y, z)$

Зато збогимо Prandtl-ову функцију  $\phi(y, z)$  тако да је  $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  и  $\tilde{\tau}_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$

Имећемо прву ј-ну система равнотеже идентички задовољени, што је уопште идеја S-V полуобратног поступка. Да нешто претпоставимо, и кажећемо тако да неке ј-не су само од себе идентички задовољене а неке појединачно.

Убацујемо дакле  $\tilde{\tau}_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  и  $\tilde{\tau}_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  у Белтрами-мичелове ј-не компатибилности

$$G_{ij,kl} + \frac{1}{1+\nu} G_{ks,lj} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} F_{k,l} + F_{i,j} + F_{l,i} = 0$$

$$\text{дакле, } \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) + 2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0$$

Ове ј-не су све идентички задовољене осим:

$$(1) \neq 0, (2) \neq 0, (3) \neq 0, (5) \neq 0 \quad \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\text{односно } \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{xy}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{xz}}{\partial z^2} = 0 \right\}$$

$$\text{или преко } \phi \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0$$

одакле интеграцијом  $\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = H = \text{const}$  то је диференцијална ј-на коју мора задовољити функција напона  $\phi(y, z)$  да би ј-не задовољиле услови компатибилности.

## \*ГРАНИЧНИ УСЛОВИ

• по бојној површини - пошто на бојној површини нема површинских сила  $P_x = P_y = P_z = 0$  и саопрећен да је на бојној површини призматичног штапа  $n_x = \cos \alpha = 0$ , а рачи и трећи услов ће бити идентички задовољени -  $\vec{n} \{0, n_y, n_z\}$

$$\sigma_{11} n_x + \tau_{1y} n_y + \tau_{1z} n_z = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{1y} n_y + \sigma_{22} n_y + \tau_{1z} n_z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$\tau_{1z} n_x + \tau_{2z} n_y + \sigma_{33} n_z = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

СА СЛИКЕ СА ПЛОХОМ  
СТРАНЕ

закле од граничних услова по дну поворштини остало је  $\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0$ 

како је  $n_y = \cos \beta = \frac{dz}{ds}$  и  $n_z = \cos \gamma = -\frac{dy}{ds}$

што се може обозначити  $\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  и  $\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  у  $\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0$  добијемо

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 0 \Rightarrow \phi(y, z) = \phi_0 = \text{const}$$

Ова константа  $\phi_0$ , кад седе попут попречног пресека можемо узети произвољно, јер огузмицање или годрвање произвољне константе од  $\phi$  је  $\phi(y, z)$  не утиче на сили течења које су гати као први изводи од  $\phi$ .

Узетимо за  $\phi_0 = 0$  па је гранични услов  $\phi(y, z) = 0$  на некој контури  $C_0$ 

• гранични услови по основима зде

$$\vec{n} = \{\pm 1, 0, 0\}$$
 па гранични услови зде

(1)  $\pm 0$

(2)  $\tau_{xy} \cdot (\pm 1) =$

(3)  $\tau_{xz} \cdot (\pm 1) =$

$$\begin{aligned} p_x^{(n)} &= 0 \\ p_y^{(n)} &= \pm \tau_{xy} \\ p_z^{(n)} &= \pm \tau_{xz} \end{aligned}$$

- зде се знак "+" огузи на левој осову ( $x=0$ ) а "-" на десној

узгај померање  
a' b + a c'

Како је  $M_t = \int_F (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dF = \int_F \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right] dF$

$$= - \int_F \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)' y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)' z \right] dF = 2 \int_F \phi dF - \int_F \left[ \frac{\partial (y\phi)}{\partial y} - \frac{\partial (z\phi)}{\partial z} \right] dF$$

! применимо Гингову формулу  $\int_F \left[ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right] dF = \oint_{C_0} (Q dy + R dz)$

добујемо:  $M_t = 2 \int_F \phi dF + \oint_{C_0} (y\phi dz - z\phi dy) = 2 \int_F \phi dF - \oint_{C_0} \phi_0 (y dz - z dy)$

 $\phi$  је на  $C_0 = \text{const}$  па можемо га изаћи из интеграла

$$\Rightarrow M_t = 2 \int_F \phi dF - 2\phi_0 F$$
 и ако ставимо  $\phi_0 = 0 \Rightarrow M_t = 2 \int_F \phi dF$

Једначине  $\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  и  $\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  и  $M_t = 2 \int_F \phi dF$  имају тачноставање збо евријску интерпретацију. Наиме ако вредно св функције  $\phi(y, z)$  нанесемо као апликате, добијемо простору површ  $\phi$ 

ТАДА је: Величина силичез напона једнака нагибу тангенте на површ ( $\phi$ ) - правцу управном на правац, тачноста силичез напона, а момент тор? једнак је двосмерној запремини тела коју ова површ огузицава заједно са равни попречног пресека!

односно  $\tau_{xy} = t_g \psi_z$   $\tau_{xz} = -t_g \psi_y$   $M_t = 2V\phi$

Одредимо сада компоненте сичућез напона у произвољној тачки А у правцу тангенте и нормале на тзв. линију напона  $\phi(y,z) = \phi_m = \text{const}$

Са слике је очигледно  $\cos \beta = \frac{dy}{dn}$  и  $\cos \gamma = \frac{dz}{dn}$ , односно  $\cos \beta = \frac{dz}{ds}$  и  $\cos \gamma = -\frac{dy}{ds}$

$$\tau_{xs} = \tau_{xz} \cos \beta + (-\tau_{xy}) \cos \gamma = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dn} \right) = - \frac{d\phi}{dn} \text{ — тотални градијент}$$

$$\tau_{xn} = \tau_{xz} \cos \gamma - (-\tau_{xy}) \cos \beta = + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \text{ — по раније}$$

Закључујемо да је тотални сичућез напон  $\tau = \tau_{xs} = -\frac{d\phi}{dn} = -\text{tg} \psi_n = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$

односно  $\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2}$  — тотални сичућез напон у некој тачки има правца тангенте на линију напона, а без обзира величина збога је називу тангенције на површ  $(\phi)$  у правцу нормале на линију напона у тој тачки.

Ако пак, контуру попречног пресека схватимо као линију напона  $[\phi(y,z) = \phi_0 = 0]$  тада закључујемо да тотални сичућез напон  $\tau$  има правац тангенте на контуру попречног пресека.

### • Деформација греде

Када је одређена функција напона  $\phi(y,z)$  из  $\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  и  $\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  одређујемо компоненте сичућеза напона, а из Хуковог закона следи

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{и} \quad \gamma_{xy} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

јер као што знамо

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1+\nu}{E} G_{12} \Rightarrow \gamma_{12} = \frac{(1+\nu)2}{E} G_{12} = \frac{1}{G} G_{12} \Rightarrow \boxed{\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}}$$

$$\text{Аналогно томе и} \quad \boxed{\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

Компоненте померања  $u, v$  и  $w$  седе интеграцијом

$$u = -\frac{H}{2G_1} yz + \frac{1}{G_1} \left[ \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dy + \int \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} dz \right]$$

$$v = \frac{H}{2G_1} xz$$

$$w = -\frac{H}{2G_1} xy$$

при чему се интеграционе константе одређују из услова да су све компоненте померања и одређене

# ТОРЗИЈА - ЗАДАЦИ-

84

① Конзолна греда оптерећена је према слици:

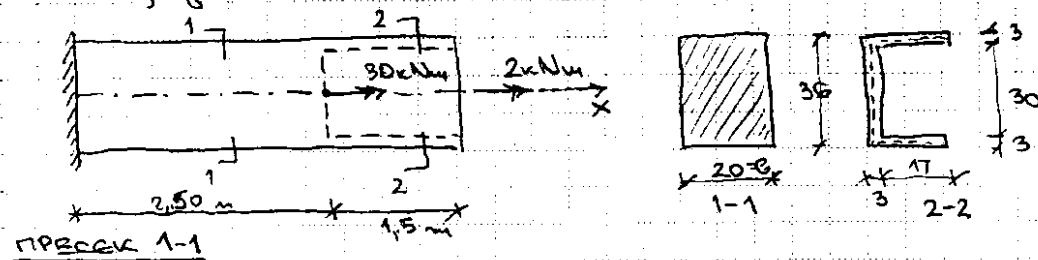
(а) Нацртати дијаграм моментата торзије дуж осе зрге

(б) Нацртати дијаграм промене угла обртања  $\varphi(x)$

(в) Одредити максималне напоне ситцања у пресецима 1-1 и 2-2

$$G = 12 \text{ GPa}$$

модул кривања



Према Табели за  $\mu = 1.5$   $\alpha = 0.195$   $\beta = 0.231$  кад нас  $\mu = 1.8 = \frac{36}{20}$   
 за  $\mu = 2.0$   $\alpha = 0.229$   $\beta = 0.246$

интерполациом за  $\mu = 1.8$   $\alpha = 0.195 + \frac{1.8-1.5}{2.0-1.5} (0.229-0.195) = 0.215$

$\beta = 0.231 + \frac{1.8-1.5}{2.0-1.5} (0.246-0.231) = 0.240$

$\Rightarrow I_{t,1} = \alpha^2 \cdot 20^3 \cdot 36 = 0.215 \cdot 20^3 \cdot 36 = 61920 \text{ cm}^4 = 6.192 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

$W_{t,1} = \beta \cdot 20^2 \cdot 36 = 0.240 \cdot 20^2 \cdot 36 = 3456 \text{ cm}^3 = 3.456 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

ПРЕСЕК 2-2 - отворени танкозични

$I_{t,2} = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = \frac{1}{3} [2 \cdot 18.5 + 33.0] \cdot 3^3 = 630 \text{ cm}^4$

$W_{t,2} = \sum \frac{I_{t,2}}{t_{\text{min}}} = \frac{630}{3} = 210 \text{ cm}^3$

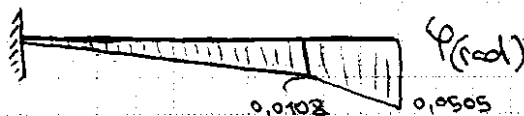
(а) дијаграм моментата торзије дуж зрге

знак "+" јер је момент торзије позитиван ако се изглед бретац дејства поклапа са позитивним смером осе штапа.

б) Угао обртања у произвољном пресеку дат је изразом  $\varphi(x) = \int_0^x \frac{M_t}{G I_t} dx$  па је за

$\varphi(2.5) = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 2.5}{12 \cdot 10^9 \cdot 6.192 \cdot 10^{-4}} = 0.0108 \text{ rad}$

$\varphi(4.0) = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4.0}{12 \cdot 10^9 \cdot 630 \cdot 10^{-8}} + \varphi(2.5) = 0.0505 \text{ rad}$



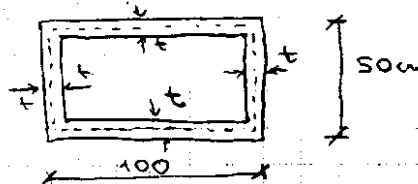
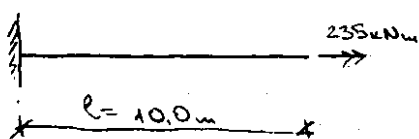
$\varphi$  је линеарна ф-ја од  $x$

(в) Максимални ситчасти напони у пресецима 1-1 и 2-2 дат су са  $\tau_{\text{max}} = \frac{M_t}{W_t}$

• пресек 1-1  $\tau_{\text{max}}^{(1)} = \frac{32 \cdot 10^3}{3.456 \cdot 10^{-3}} = 9.26 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 9.26 \text{ MPa}$

• пресек 2-2  $\tau_{\text{max}}^{(2)} = \frac{2 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^{-6}} = 9.52 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 9.52 \text{ MPa}$

② ЗАДАТАК. Конзолни штаб према слици оптерећен је моментом  $M = 235 \text{ kNm}$ . Одредити деформацију  $t$  тако је  $\tau_{\text{доп}} = 6 \text{ MPa}$  и  $\varphi_d = 1^\circ$ . Модул кривања је  $G = 12 \text{ GPa}$ .



$F = 1.0 \cdot 0.5 = 0.5 \text{ m}^2$

$L = 2(1.0 + 0.5) = 3.0 \text{ m}$

$W_t = 2 F t = 2 \cdot 0.5 \cdot t = t$

$I_t = \frac{4 F^2 t}{L} = \frac{4 \cdot 0.5^2 t}{3.0} = \frac{1}{3} t$

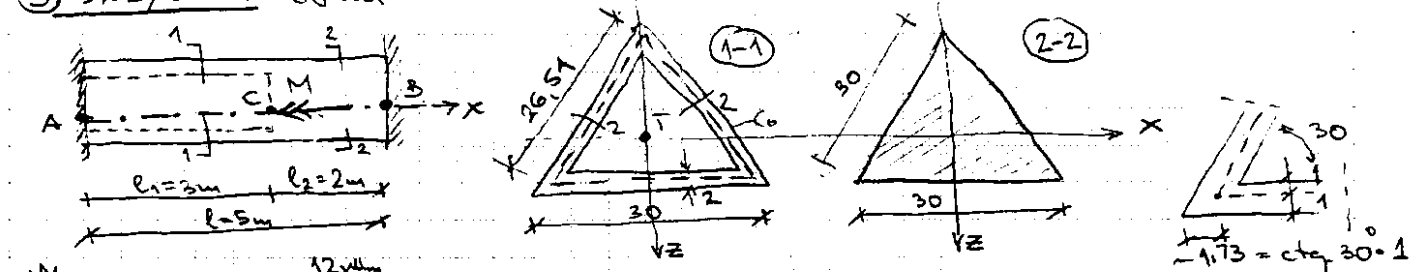
$$\tau_d \geq \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{235 \cdot 10^3}{t} \leq 6 \cdot 10^6 \Rightarrow t \geq \frac{235}{6000} = 0,039 \approx 3,92 \text{ cm}$$

$$\text{из условия } \varphi_d \geq \varphi_{\max} = \frac{M_t \cdot l}{G I_t} = \frac{235 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{3} t}{12 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{3} t} \leq 1^\circ = 1 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow t \geq 3,37 \text{ cm}$$

$$\text{Према томе } t_{\min} = \max \{3,92; 3,37\} = 3,92 \text{ cm} \dots \text{хватајемо } t = 4 \text{ cm}$$

$$\text{НАПОНЕНА } I_t = \frac{4 \bar{F}}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \text{ како је } t = \text{const ује истог интервала, а интервал } \oint ds = L$$

③ ЗАДАТАК Овој правоугаони укивештени зrega оптерећена је моментом  $M = 12 \text{ kNm}$  на сл.



- (а) Дијаграм  $M_t$  гдје осе зrega  
(б) макс. шимите напоне у пресецима 1-1 и 2-2  
(в) Нацртати дијаграм промене угла обртања  $\varphi(x)$

### ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРИТЕРИСТИКЕ

ПРЕСЕК 1-1 (правобугни-заворени)

$$\bar{F} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{26,54^2 \sqrt{3}}{4} = 305,00 \text{ cm}^2$$

$$L = 3 \cdot a' = 3 \cdot 26,54 = 79,62 \text{ cm}$$

$$W_{t,1} = 2 \bar{F} t_{\min} = 2 \cdot 305,00 \cdot 2 = 1220 \text{ cm}^3$$

$$I_{t,1} = \frac{4 \bar{F}^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4 \bar{F}^2 t}{L} = \frac{4 \cdot 305^2 \cdot 2}{79,62} = 9346,9 \text{ cm}^4$$

ПРЕСЕК 2-2  $I_{t,2} = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4 = \frac{\sqrt{3}}{80} 30^4 = 17537,01 \text{ cm}^4$   $W_{t,2} = \frac{a^3}{20} = \frac{30^3}{20} = 1350 \text{ cm}^3$

(а) Задати носач је једноставно статички неодређен, јер две непознате реакције ослонаца  $M_A$  и  $M_B$  се не могу одређити из услова равнотеже. Тај услов равнотеже је  $M_A = M_B$ . Други услов равнотеже ћемо добити ако нпр. ако уклонимо ослонац у тачки В и захтевамо да обртање пресека у тој тачки буде једнако нули.

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{M_t(x)}{G I_t(x)} dx = \int_0^{l_1} \frac{(+M_A)}{G I_{t,1}} dx + \int_0^{l_2} \frac{M_B}{G I_{t,2}} dx = 0$$

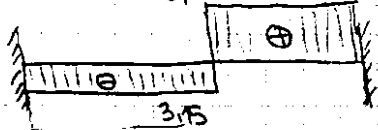
погледај дијаграм  $M_t$  какав заграда ①

$$\Rightarrow \varphi_B = 0 \Rightarrow \frac{+M_A l_1}{G I_{t,1}} = \frac{M_B l_2}{G I_{t,2}} \text{ и ако је } M_A = \alpha M_B$$

$$\Rightarrow \frac{+\alpha l_1}{I_{t,1}} = \frac{l_2}{I_{t,2}} \Rightarrow \alpha = \frac{l_2}{l_1} \frac{I_{t,1}}{I_{t,2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9346,9}{17537,01} = 0,3553$$

Посађено осовем  $j = M_A$

8,85



$$M_A + M_B = 12$$

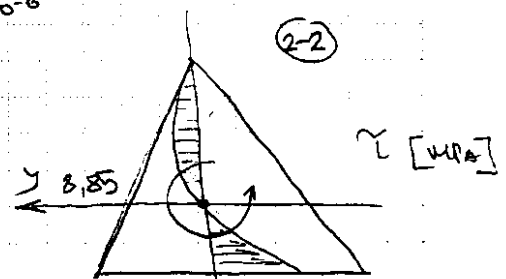
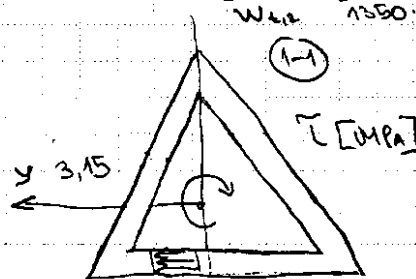
$$M_A = 0,3553 M_B$$

$$\left. \begin{aligned} M_A + M_B &= 12 \\ M_A &= 0,3553 M_B \end{aligned} \right\} 1,3553 M_B = 12 \Rightarrow M_B = \frac{12}{1,3553} = 8,85 \text{ kNm}$$

$$M_A = 3,15 \text{ kNm}$$

$$(б) \sim (а) \tau_{\max} = \frac{M_{t,1}}{W_{t,1}} = \frac{-3,15 \cdot 10^3}{1220 \cdot 10^{-6}} = -2,58 \text{ MPa}$$

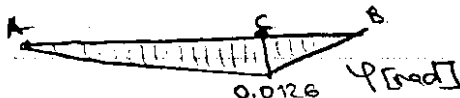
$$\tau_{\max}'' = \frac{M_{t,2}}{W_{t,2}} = \frac{8,85 \cdot 10^3}{1350 \cdot 10^{-6}} = 6,56 \text{ MPa}$$



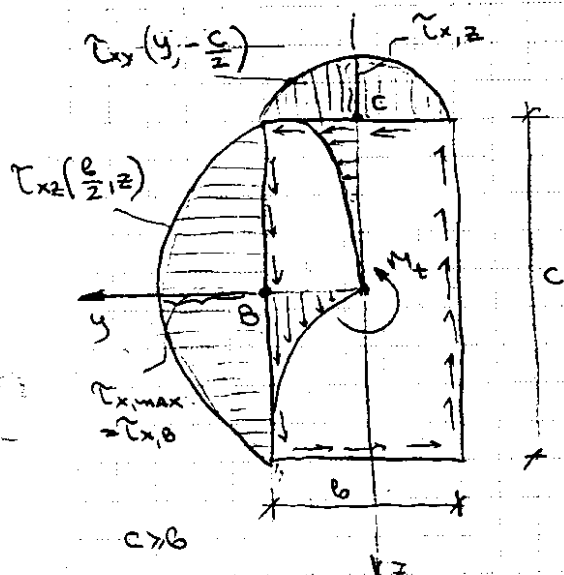
(в) Угао обртања у тачки С

$$\varphi(C) = \int_0^{l_1} \frac{M_t(x)}{G I_t(x)} dx = -\frac{M_A l_1}{G I_{t,1}}$$

$$= 0,0126 \text{ rad} \approx \frac{0,0126}{2 \cdot \pi} \cdot 360 = 0,72^\circ$$



# \* ТОРЗИЈА ГРЕДЕ ПРАВОУГАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА



НАПОМЕНА:

испитују обих  $\mu$  вредности  $\alpha, \beta, \gamma$  наводе се интерполацијом.

Видимо на слици да су на контури попречног пресека сличити напони истог правца као и стране бр-воула, а једнаки су нули у угловима правоугаони

Сличити напони се добијају решавањем сличних  $\alpha, \beta$  партициларног типа и решење се изражава у облику бескрајног тригонометријског реда, па коэф.  $\alpha, \beta, \gamma$  су скраћена решења,  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  из таблице

$\mu = \frac{c}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1,00	0,141	0,208	0,208
1,5	0,195	0,231	0,270
2,0	0,229	0,246	0,309
3,0	0,263	0,267	0,355
4,0	0,281	0,282	0,378
6,0	0,298	0,298	0,402
10,0	0,312	0,312	0,421
$\infty$	0,333	0,333	0,449

ИЗРАЗИ ( $\alpha, \beta, \gamma$ ):

$$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

$$I_t = \alpha b^3 c$$

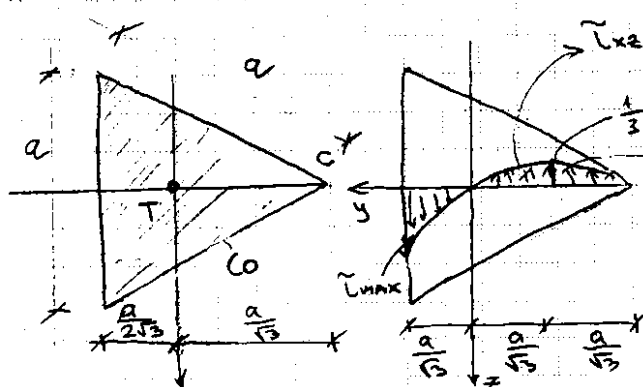
$$\tau_{x,0} = \frac{M_t}{W_{t,0}}$$

$$W_{t,0} = \beta b^2 c$$

$$\tau_{x,c} = \frac{M_t}{W_{t,c}}$$

$$W_{t,c} = \gamma b^2 c$$

# \* ТОРЗИЈА ГРЕДЕ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА У ОБЛИКУ ЈЕДНАКОСТРАНИЧНОГ $\Delta$

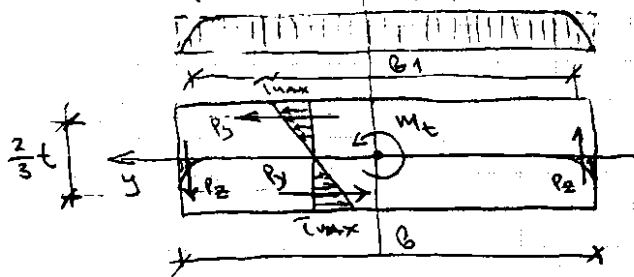


$$\tau_{max} = \tau_{xz} \left( \frac{a}{2\sqrt{3}}, 0 \right) = \frac{\sqrt{3}}{a} \frac{M_t}{I_t} a = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\text{где је } W_t = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{I_t}{a} = \frac{1}{20 a^3}$$

# \* ТОРЗИЈА ГРЕДЕ ОТВОРЕНОГ ТАНКОСТИЧНОГ ПРОФИЛА

- Попречни пресек у облику уског правоугаоника ( $\frac{b}{t} \gg 1$ )



$$I_t = \frac{1}{3} b t^3 \text{ то је случај } \mu = \frac{b}{t} \rightarrow \infty$$

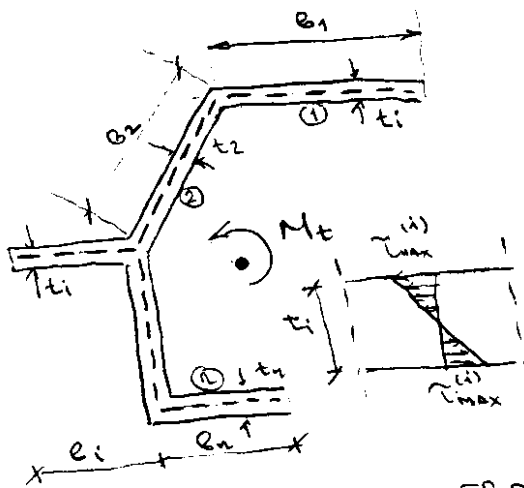
$$\tau_{xy} = -2 \frac{M_t}{I_t} z \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{max} = \tau_{xy} \left( \pm \frac{t}{2} \right) = \pm \frac{M_t}{I_t} t = \pm \frac{M_t}{W_t}$$

$$W_t = \frac{I_t}{t} = \frac{1}{3} b t^2$$

$$u = \frac{M_t}{G I_t} \chi(y, z) = - \frac{M_t}{G I_t} y z$$

• ОТВОРЕН ТАНКОСТЕН ПРЭСЕК ПРОИЗВОЛНОГ ОБЛИКА



$$M_t = \sum_{i=1}^n M_t^{(i)} = \sum_{i=1}^n G I_t^{(i)} \theta$$

$$\text{где } I_t^{(i)} = \frac{1}{3} e_i t_i^3 \Rightarrow I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n e_i t_i^3$$

$$\Rightarrow M_t^{(i)} = \frac{I_t^{(i)}}{I_t} M_t$$

$$\tau_{\max}^{(i)} = \frac{M_t^{(i)}}{I_t^{(i)}} t_i = \frac{M_t}{W_t^{(i)}} \text{ где } W_t^{(i)} = \frac{I_t^{(i)}}{t_i} = \frac{1}{3} e_i t_i^2$$

$$\tau_{\max} = [\tau_{\max}^{(i)}]_{\max} = \frac{M_t}{I_t} t_{\max} = \frac{M_t}{W_{t, \min}}$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\min}}$$

• ТОРЗИЈА ПРЕД ЗАТВОРЕНИМ ТАНКОСТЕНИМ ПРОФИЛА



# OGRANIČENA TORZIJA GREDE



# ОГРАНИЧЕНА ТОРЗИЈА ГРЕДЕ

— ОТВОЕНОГ ТАНКОЗНАДНОГ ПРОФИЛА —

• **ЧИСТА ТОРЗИЈА** то је облик торзије греде кад ти у једном попречном пресеку није срећена деформација пресека, та се назива слободна. Видети смо раније да нпр. деформација попречног пресека у облику због правоугаоника или облику хиперболичког једра болоуца. У случају слободне торзије у попречним пресецима греде не јављају се никакви нормални напони.

• **ОГРАНИЧЕНА ТОРЗИЈА** - Ако је због деформација попречног пресека ограничена, нпр. укључењем једног краја греде, у попречним пресецима јављају се нормални напони који елиминирају ту деформацију која би се јавила. У општем случају ти нормални напони варирају од пресека до пресека дуж греде.

**НАПОМЕНА:** У ограниченој торзији хипотеза равних пресека и S-V принцип који важе у теорији греде пуног пресека овде се не могу примењивати! То је зато зато што танкозидни носач у суштини представља лозу, а не 3D тело које се под одређеним условима може третирати и као зидерни носач.

• **ДИМОМЕНТ** - чине два среза једнака али супротних смерова који се јављају у паралелним равнинама. То је због неједнаког оптерећења које изазива деформацију сличну оној због торзије. У случају ограничено торзије греде, на месима где је срећена деформација попречног пресека јављају се нормални напони који се такође сваде на ди момент то је ВЛАСОВА ТЕОРИЈА.

## \* ОСНОВНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ

- ① Облик попречног пресека остаје непромењен у току деформације
- ② Кривање  $\delta_{xs}$  у средњој површини греде се занемарује.

Дакле и ① следи да димензије попречног пресека остају непромењене, при чему пресек може претпоставити произвољну деформацију управо на свој рфач.

- ③ Нормални напон  $\sigma_x$  је равномерно распоређен по дебелини зида.
- ④ Компоненте напона нормалне на средњу линију профила  $= 0$  тј.  $\sigma_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$
- ⑤ Сичузни напон  $\tau_{xs} \approx \tau$  је распоређен линеарно по дебелини зида и може се приказати као збир напона  $\tau_{xs}^{(s)} \approx \tau^{(s)}$  и  $\tau_{xs}^{(w)} \approx \tau^{(w)}$

Сичузни напони  $\tau = \tau^{(s)} + \tau^{(w)}$  резултирају се у торзиону момент  $M_t$  који се може приказати као збир два момента

$$M_t = M_t^{(s)} + M_t^{(w)}$$

-  $M_t^{(s)}$  одговара сичузним напонима  $\tau^{(s)}$  и назива се S-V торзиону момент  $M_t^{(s)} = G I_t^{(s)} \Theta$  где је  $I_t^{(s)}$  торзиона константа попречног пресека дата са  $\frac{1}{3} \sum b_i t_i^3$ , а величина  $G I_t^{(s)}$  је S-V торзиона кривост штапа

-  $M_t^{(w)}$  је торзиону момент кривљења јер настаје због сичузних напона  $\tau^{(w)}$  који се јављају због тога што је кривљење попречног пресека срећено.  $M_t^{(w)} = \int \tau^{(w)} t ds$  или  $\int \tau^{(w)} t h ds$  а може и  $M_t^{(w)} = -E I_w \Theta''$  па је  $E I_w$  кривост греде на кривљење

$$M_w = \int_F \sigma_x w dF - \text{ди момент.}$$

• Диферен з-на танкозидног штапа при ограниченој торзији

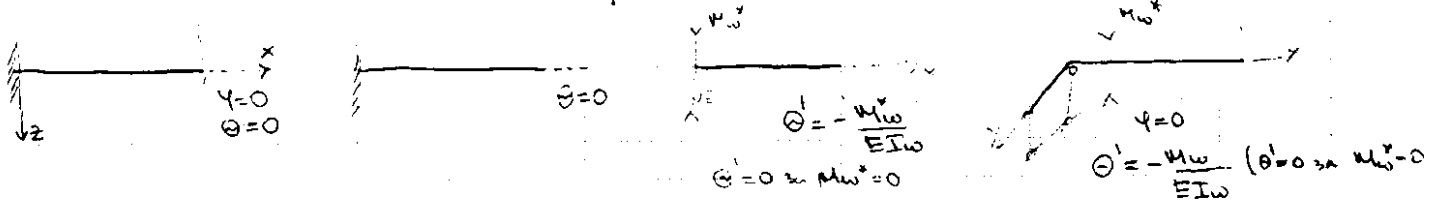
$$\Theta'' - k^2 \Theta = -k^2 \frac{M_t}{G I_t^{(s)}} \quad \text{где је } k^2 = \frac{G I_t^{(w)}}{E I_w}$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ у облику  $\Theta = C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + \Theta_0$  где је  $\Theta_0$  партикуларно решење  $\Delta_j$  које се добија методом варијације константи.

## ИЗРАЗИ ЗА НАПОНЕ

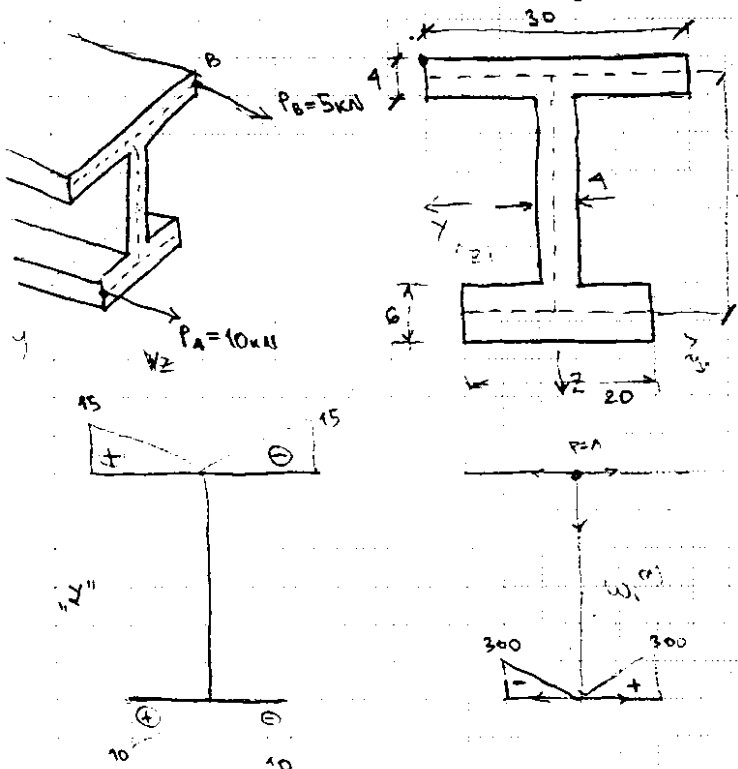
$$\tau^{(s)} = \frac{2M_z^{(s)}}{I_z^{(s)}} \cdot \rho \quad \tau^{(w)} = -\frac{M_z^{(w)} S_w^*}{I_w \cdot i} \quad \sigma_x = \frac{M_w}{I_w} \cdot w$$

\*ГРАНИЧНИ УСЛОВИЯ ЗА НЕКОЛИКО СЛУЧАЈА ОСЛАБЉИВА ШТАМА



## ПРИМЕР ①

Одређити величину пресекајућих сила на крајевима конзоле тангосијног попречног пресека ако у тачкама А и В делују две концентрисане силе затезањем  $P_A = 10 \text{ kN}$   $P_B = 5 \text{ kN}$



$$I_z = 2 \cdot \frac{15^2 \cdot 15}{3} + \frac{2}{3} \cdot 10^3 = 6 = 13000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y, \text{пр}}^{(A)} = -2 \cdot 6 \cdot \frac{300 \cdot 10 \cdot 10}{3} = -120000 \text{ cm}^4$$

$$Z_s = Z_p + \frac{I_{y, \text{пр}}^{(A)}}{I_z} = 9,23 \text{ cm}$$

$$F = 30 \cdot 4 + 30 \cdot 4 + 6 \cdot 20 = 360 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_1} = \frac{1 \cdot 30^2}{2} + 6 \cdot 20 \cdot 30 = 5400$$

$$Z_T = \frac{S_{y_1}}{F} = 15 \text{ cm}$$

$$M_w = 10 \cdot (-207,7) + 5 \cdot (-138,5) = -2769,4 \text{ Ncm}$$

$$M_z = +15 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = -25 \text{ Ncm}$$

$$M_y = 10 \cdot 15 - 5 \cdot 15 = 75 \text{ Ncm}$$

$$N = 15 \text{ kN}$$

$$I_z = \frac{2}{3} \left[ \frac{20 \cdot 20 \cdot 20}{4} + \frac{10^3}{6} \right] = 25333,3 \text{ cm}^4$$

$$I_{y, \text{пр}} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{10 \cdot 250 \cdot 10}{3} = 100000 \text{ cm}^4$$

$$Z_s = Z_p - \frac{I_{y, \text{пр}}}{I_z} = 3,947 \text{ cm}$$

$$F = 40 \cdot 125 + 6 \cdot 20$$

$$F = 580 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_1} = 4 \cdot 25 \cdot \frac{25}{2} + 25 \cdot 20 \cdot 6 = 4250 \text{ cm}^3$$

$$Z_T = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{4250}{580} = 7,329 \text{ cm}$$

$$N = 15 \text{ kN}$$

$$M_y = -5 \cdot 11,189 + 10 \cdot 13,846 = 82,29$$

$$M_z = 20 \cdot 5 - 10 \cdot 10 = 0$$

$$M_w = 10 \cdot (-210,53) - 5 \cdot 78,94 = -2500 \text{ Ncm}$$

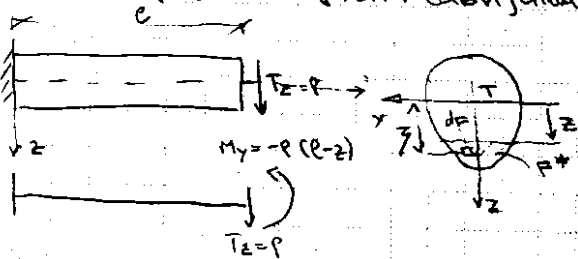
# **SAVIJANJE GREDE SILAMA**



# ТЕХНИЧКА ТЕОРИЈА САВИЈАЊА ГРЕДЕ

① Од две компоненте сичућег напона  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  доминантнија је  $\tau_{xz}$

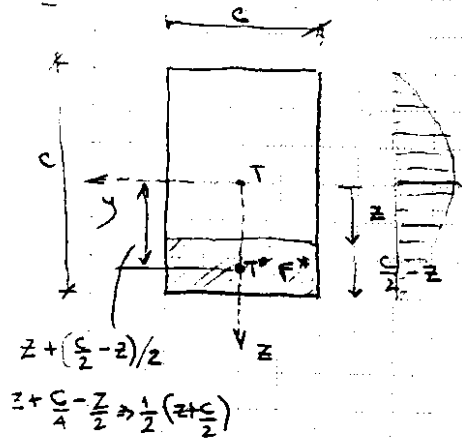
- ХИПОТЕЗА ЖУРАВСКОГ: Компонента сичућег напона паралелна равни савијања је константна због првих парастених са неутралном осом, а компонента сичућег напона управна на равни савијања се занемарује...  $\tau_{xy} = 0$  и  $\tau_{xz} = \tau_{xz}(z)$



$$\tau_{xz}(z) = \frac{T_z(x) \cdot S_y^*}{I_y \cdot b(z)}$$

$$S_y^* = \int_{F^*} z \, dF \quad \text{— статички момент у односу на неутралну осу тј на y-осу}$$

## \* ПРАВОУГАОНИ ПОПРЕЧНИ ПРЕСЕК



$$b(z) = b \cdot \text{const} \quad S_y^* = \frac{1}{2} \left( z + \frac{c}{2} \right) \cdot b \cdot \left( \frac{c}{2} - z \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{c^2}{4} - z^2 \right)$$

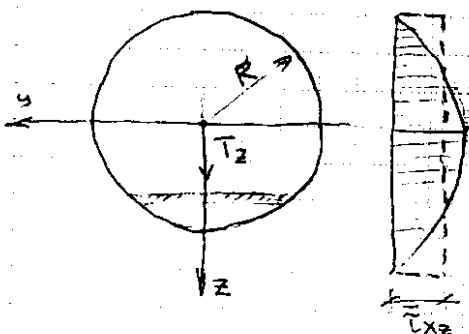
$$I_y = \frac{1}{12} b \cdot c^3$$

$$\tau_{xz}(z) = \frac{T_z \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{c^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{1}{12} b c^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4z^2}{c^2} \right) \frac{T_z}{F} \quad F = b \cdot c$$

Максимална вредност се јавља на неутралној оси  $z=0$

$$\tau_{xz, \max} = \frac{3}{2} \frac{T_z}{F} = \frac{3}{2} \bar{\tau}_{xz} \quad \text{— средња (просечна) вредност сичућег напона}$$

## \* КРУЖНИ ПОПРЕЧНИ ПРЕСЕК



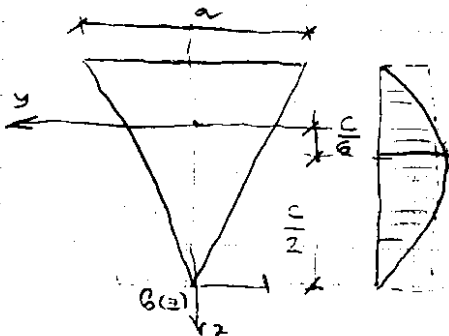
$$F = R^2 \pi \quad b(z) = 2 \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$S_y^* = \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2}$$

$$\tau_{xz, \max} = \frac{4}{3} \frac{T_z}{F} \quad \tau_{xz}(z) = \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{T_z}{F}$$

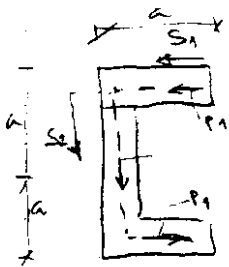
$$\tau_{xz, \max} = \frac{4}{3} \frac{T_z}{F} = \frac{4}{3} \bar{\tau}_{xz}$$

## \* ТРОУГАОНИ ПОПРЕЧНИ ПРЕСЕК



$$\tau_{xz, \max} = \frac{3}{2} \frac{T_z}{F} = \frac{3}{2} \bar{\tau}_{xz}$$

## \* ТАКОЗНАДНИ ОТВОРЕНИ ПРОФИЛИ



$$\tau(s_1) = -\frac{T_z S_1^*}{I_y t}$$

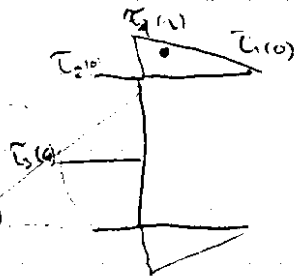
$$\tau_1(0) = 0$$

$$\tau_1(a) = \dots$$

$$\tau(s_2) = -\frac{T_z S_2^*}{I_y t}$$

$$\tau_2(0) = \dots$$

$$\tau_3(a) = \dots$$



Проверка центра симметрии: здесь установлено, что момент сил внутренних сил у оси симметрии центра симметрии равен нулю.

где  $P_1$  — нпр.  $P_1$  — поверхность,  $2a$  — толщина  $x$  — толщина профиля на том месте

$$P_2 \text{ — то же } M_x = 2 \cdot P_1 \cdot a - c \cdot P_2 = 0 \quad \checkmark$$

Это же касается и угловых осей инерции

• Ано нису израз постоје  $\tau(s) = \frac{q(s)}{t(s)} = -\frac{1}{J_2 \cdot t(s)} [(T_z I_z - T_y I_{yz}) S_y^* + (T_y I_y - T_z I_{yz}) S_z^*]$

• Ано јесу израз постоје  $(I_{yz}=0)$   $\tau(s) = -\frac{1}{J_2 \cdot t(s)} [T_z (I_z S_y^* - I_{yz} S_z^*)]$

• Центар симетрије — Ано нису  $Y_s = Y_P + \frac{1}{J_2} [I_z I_{yz} \omega_P^{(A)} - I_{yz} I_y \omega_P^{(A)}]$

$$Z_s = Z_P - \frac{1}{J_2} [I_y I_{yz} \omega_P^{(A)} - I_{yz} I_z \omega_P^{(A)}]$$

Ано јесу  $J_s = Y_P + \frac{I_y \omega_P^{(A)}}{I_y} \quad Z_s = Z_P + \frac{I_z \omega_P^{(A)}}{I_z}$

## \* ТАКОЗНАДНИ ЗАТВОРЕНИ ПРОФИЛИ

$q(s) = \bar{q} + q_0(s)$  где је  $q_0(s) = -\frac{T_z S_y^*}{I_y} - \frac{T_y S_z^*}{I_z} = -Q_z S_y^* - Q_y S_z^*$  Ако су углови симетрије осе

$$Q_y = \frac{1}{J_2} (T_y I_y - T_z I_{yz})$$

$$Q_z = \frac{1}{J_2} (T_z I_z - T_y I_{yz})$$

а  $\bar{q}$ , непознату величину тока симетрије одређујемо из услова једнозначности померања  $\oint_L \tau_i ds = 0$  где је  $L$  средња линија профила, којим је изразен услов за

релативно померање у одређеној осе утврђено крајева на месту пресека у тачки А мора бити једнако нули:  $\oint_L \tau(s) ds = 0$  а може се писати и у облику  $\oint \frac{q(s)}{t(s)} ds = 0$ .

Упошлем израз  $q(s) = \bar{q} + q_0(s)$  у  $\oint \frac{q(s)}{t(s)} ds = 0$  добијемо

$$\delta_1 \bar{q} + \delta_0 = 0 \quad \text{где су } \delta_1 = \oint \frac{ds}{t(s)} \quad \delta_0 = \oint \frac{q_0(s)}{t(s)} ds$$

Решавањем јте  $\delta_1 \bar{q} + \delta_0 = 0$  одређујемо непознату ток симетрије  $\bar{q}$  а затим и укупан ток симетрије у произвољној тачки средње линије профила

Када је одређен распоред тока симетрије  $q(s)$  можемо одредити одговарајући резултатни момент  $M_x^{(P)}$  у односу на произвољно изабрану тачку Р

$$M_x^{(P)} = \int_L q \cdot r_P ds \quad \text{а затим и растојање највеће линије резултатне силе Т од Р је}$$

$$e = \frac{M_x^{(P)}}{T}$$

Ако бисмо одређили центра симетрије  $S$  у односу на тачку Р онда бисмо требало решити посебно усред дејства силе  $T_y$ , а затим, само услед дејства силе  $T_z$ .

• Савијаче граде једноосимејски пресеци осом симетрије која лежи у равни савијања.

Изрази за ток симетрије и момент исти су као код одговарајућег отвореног профила којим се користе пресецањем одговарајућег профила и јермени а. Дакле, то је

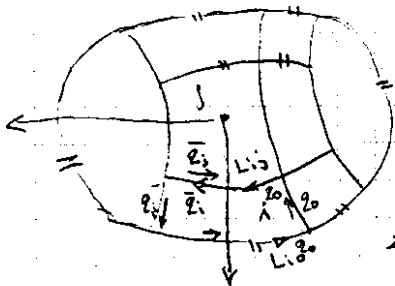


# \* САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ ВИШЕЊЕЛИЈСКОГ ПРЕСЕКА

96

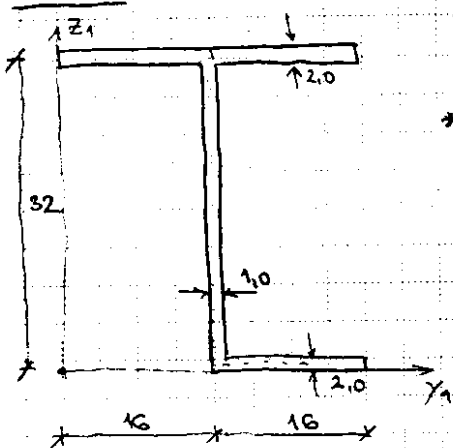
Видели смо да је танкозидни штаб једноћелијског пресека 1-пута статички неодређен, иер поред услова равнотеже потребно је формирати још један додатни услов по померању за одређивање неизвестног тока савијања  $z$  на месту замишљеног пресека.

Танкозидни штаб вишећелијског пресека са  $n$ -ћелија јесде  $n$ -пута статички неодређен. Статички неодређене величине су токови савијања  $\bar{z}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) у тачкама  $A_i$  у којима су ћелије расечене дозвонитим пресецима, тако да је додатан танкозидни штаб отвореног профла.





ЗАДАЧА



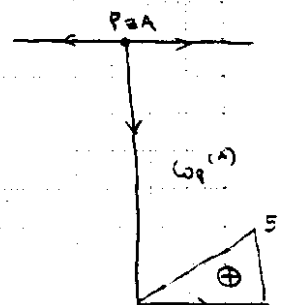
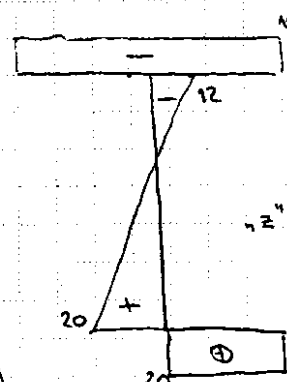
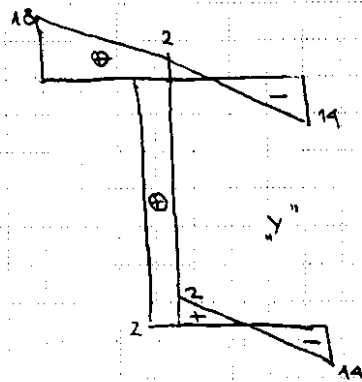
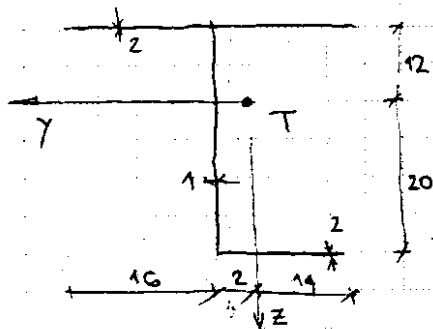
8. А. ТИКОЗУКИ ИТОПАН А. РЕЖИМ ДОРОЖАЈИ ГЕНТАР СМУТАРИВА  
А. ЗАДАЧА РЕЖИМ ДОРОЖАЈИ СМУТАРИВА ИТОПАН ПОГ РЕЖИМ  
СМУТАРИВА  $T_1 = 250 \text{ kN}$   $T_2 = 400 \text{ kN}$

\* ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗИИ

$$F = 3 \cdot 16 \cdot 2 + 32 \cdot 1 = 128$$

$$Y_T = \frac{16 \cdot 2 \cdot [8 + 24 + 24] + 16 \cdot 32 \cdot 1}{F = 128} = 18 \text{ cm}$$

$$Z_T = \frac{2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 32 + 16 \cdot 32 \cdot 1}{128} = 20 \text{ cm}$$



$$I_z = 1 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 2 + \frac{32}{3} (18^2 - 18 \cdot 14 + 14^2) + \frac{16}{3} (2^2 - 2 \cdot 14 + 14^2) = 128 + 5717,3 + 1834,6 = 7680 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2 \cdot 32 \cdot 16^2 + 20 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{32}{3} (12^2 - 12 \cdot 20 + 20^2) = 9216 + 12800 + 3242,6 = 25258,6 \text{ cm}^4$$

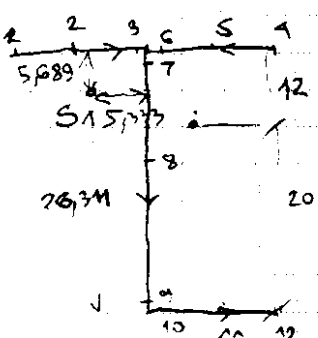
$$I_{yz} = \frac{32}{2} (-12) \cdot (18 - 14) \cdot 2 + \frac{32}{2} [2 \cdot (-12 + 20)] \cdot 1 + \frac{16}{2} [20 \cdot (2 - 14)] \cdot 2 = -1536 + 256 - 3840 = -5120 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} \omega_p^{(n)} = 2 \cdot \frac{16}{6} [512 (2 - 2 \cdot 14)] = -70997,3 \text{ cm}^5 \quad P [2, -12]$$

$$I_z \omega_p^{(n)} = 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 16 = 163840 \text{ cm}^5 \quad I_2 = I_y I_z - I_{yz}^2 = 1,6777 \cdot 10^8 \text{ cm}^8$$

$$Y_s = Y_p + \frac{I_z I_{yz} \omega_p^{(n)} - I_{yz} I_{yz} \omega_p^{(n)}}{I_2} = 2 + \frac{7680 \cdot 163840 - (-5120 \cdot (-70997,3))}{1,667 \cdot 10^8} \approx 7,333 \text{ cm}$$

$$Z_s = Z_p + \frac{I_y I_{yz} \omega_p^{(n)} - I_{yz} I_z \omega_p^{(n)}}{I_2} = -12 - \frac{25258,6 (-70997,3) - (-5120 \cdot (-163840))}{1,667 \cdot 10^8} = -6,311$$

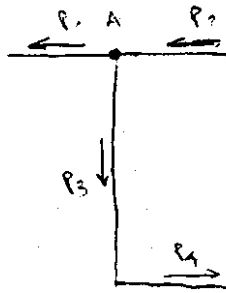
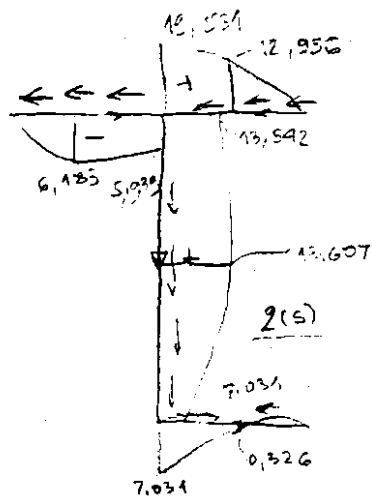


ПОСЛЕДСТВИЕ ЗА ТОК СМУТАРИВА

$$Z_0(s) = -Q_z S_x^* - Q_y S_z^* \quad \begin{cases} Q_y = \frac{I_y I_y - I_{yz} T_z}{I_2} = \\ Q_z = \frac{I_z I_z - I_{yz} T_y}{I_2} \end{cases}$$

$S_i$	$T_i$	$Q_i$	$T_i = \frac{Q_i}{T_i}$
$S_{y,1} = 0$	$S_{z,1} = 0$	0	0
$S_{y,2} = -192$	$S_{z,2} = 8 \cdot 2 \cdot 14 = 224$	-6,185	-3,092
$S_{y,3} = -384$	$S_{z,3} = 320$	-5,989	-2,995
$S_{y,4} = 0$	$S_{z,4} = 0$	0	0
$S_{y,5} = -192$	$S_{z,5} = -160$	12,956	6,478
$S_{y,6} = -384$	$S_{z,6} = -192$	19,551	9,766
$S_{y,7} = -384 \cdot 2 = -768$	$S_{z,7} = 128$	13,542	13,542
$S_{y,8} = -768 - 1 \cdot 16 \cdot 1 = -832$	$S_{z,8} = 160$	13,607	13,607
$S_{y,9} = -768 + 1 \cdot 32 = -640$	$S_{z,9} = 192$	7,031	7,031
$S_{y,10} = -640$	$S_{z,10} = 192$	7,031	3,516
$S_{y,11} = -640 + 8 \cdot 2 \cdot 20 = -320$	$S_{z,11} = 160$	0,326	0,163
$S_{y,12} = -640 + 16 \cdot 2 \cdot 20 = 0$	$S_{z,12} = 0$	0	0

99



$$P_1 = \frac{16}{6} [7.031 + 10.326 - 0] = 22.2$$

$$P_3 = \frac{32}{6} [12.542 + 4 \cdot 13.607 + 7.031] = 400$$

$$P_2 = 190.28 \text{ kN}$$

$$P_4 = 81.94 \text{ kN}$$

$$\sum Y = -P_1 - P_2 + P_4 = -81.94 - 190.28 + 22.2 = -250$$

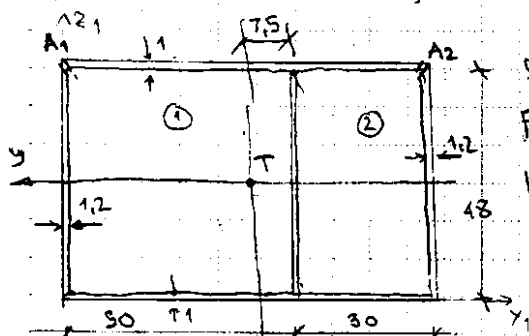
$$\sum Z = -400 \quad T_z$$

$$M_x (S) = (81.94 + 190.28) \cdot 5.689 + 22.22 \cdot 26.311 - 400 \cdot 5.033 = 0$$

что должно быть равно нулю; следовательно, расчет выполнен

## ЗАДАТАК

За двотелујски профил одредити распоред симуларног напонат узрок дејства силе  $T_2 = 800 \text{ kN}$ , а затим одредити положај центра симуларног



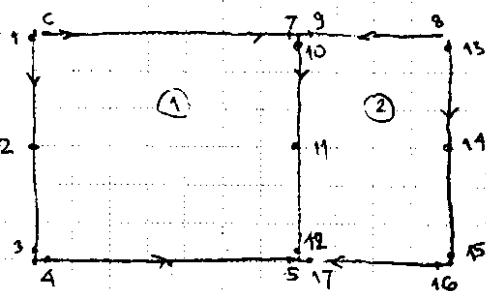
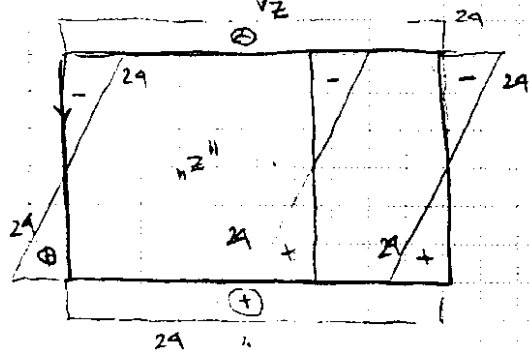
Положај тежишта

$$F = 2 \cdot 30 \cdot 1 + 48 \cdot 12 \cdot 2 + 48 \cdot 8 = 313,6$$

$$y_T = \frac{S_z}{F} = \frac{20 \cdot 1 \cdot 40,2 + 48 \cdot 12 \cdot 20 + 48 \cdot 0,8 \cdot 50}{313,6} = 41,272$$

маг је у вези 42,5!!!

Како је профил симетричан у односу на y-осу то су осе y и z главне осе инерције



$$I_y = 2 \cdot 30 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{24^3}{3} \cdot 1,2 + 2 \cdot \frac{24^3}{3} \cdot 0,8 = 121,651,2$$

формула:  $Q_z(s) = -Q_z S_y^* - Q_y S_z^*$  где  $S$ 

$$\Rightarrow Q_z(s) = -\frac{T_2 \cdot S_y^*}{I_y} = -0,00657618 S_y^*$$

$$Q_z = \frac{T_2 I_z - I_{yz} I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = \frac{T_2}{I_y}$$

$$Q_y = \frac{I_y I_z - T_2 I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0$$

$$S_{y,1} = S_{y,3} = 0 = S_{y,4} = S_{y,6} = S_{y,8} = S_{y,13} = S_{y,15} = S_{y,16} = 0$$

$$S_{y,12} = -1,2 \cdot 24 \cdot 12 = -345,6$$

$$S_{y,5} = 50 \cdot 24 \cdot 1 = 1200$$

$$S_{y,7} = 50 \cdot 1 \cdot 24 = -1200$$

$$S_{y,9} = 30 \cdot 1 \cdot (-24) = -720$$

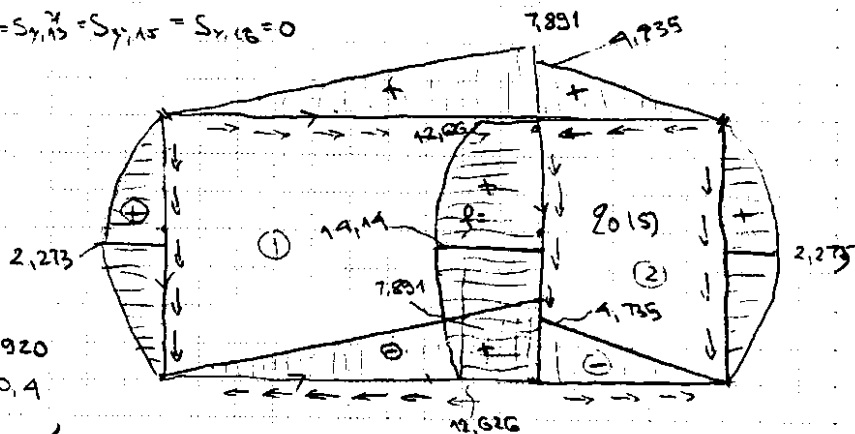
$$S_{y,14} = -1,2 \cdot 24 \cdot 12 = -345,6$$

$$S_{y,17} = 30 \cdot 24 \cdot 1 = 720$$

$$S_{y,10} = S_{y,7} + S_{y,9} = -1200 - 720 = -1920$$

$$S_{y,11} = -24 \cdot 0,8 \cdot 12 + (-1920) = -2150,4$$

$$S_{y,12} = S_{y,5} + S_{y,17} = 1920$$



$$*(-0,00657618) \quad S_{y,1} = \int_{L_1} \frac{ds}{t}$$

$$S_{y,1} = \frac{1}{1} \cdot 50 \cdot 2 + \frac{48}{1,2} + \frac{48}{0,8} = 100 + 40 + 60 = 200$$

$$S_{y,2} = \int_{L_2} \frac{ds}{t}$$

$$S_{y,2} = S_{y,1} = -\frac{48}{1,8} = -60$$

$$Q_{0,1} = 0$$

$$Q_{0,6} = 0$$

$$Q_{0,2} = 2,273$$

$$Q_{0,17} = -4,735$$

$$Q_{0,3} = 0$$

$$Q_{0,4} = 0$$

$$Q_{0,5} = -7,891$$

$$Q_{0,6} = 0$$

$$Q_{0,7} = 7,891$$

$$Q_{0,8} = 0$$

$$Q_{0,9} = 4,735$$

$$Q_{0,10} = 12,626$$

$$Q_{0,11} = 14,14$$

$$Q_{0,12} = 12,626$$

$$Q_{0,13} = 0$$

$$Q_{0,14} = 2,273$$

$$Q_{0,15} = 0$$

$$S_{z,1} = \int_{L_1} \frac{ds}{t} \Rightarrow S_{z,1} = \frac{1}{1} \cdot 30 \cdot 2 + \frac{48}{1,2} + \frac{48}{0,8} = 160$$

$$S_{z,2} = \int_{L_2} \frac{ds}{t} + \int_{L_3} \frac{ds}{t} = 2$$

$$S_{z,10} = \frac{48}{6} [0 + 4 \cdot 2,273 + 0] \cdot \frac{1}{1,2} - \frac{48}{6} [2 \cdot 12,626 + 4 \cdot 14,14] \cdot \frac{1}{0,8} - \frac{7,891}{2} \cdot \frac{50^2}{1} = -1152,1$$

$$S_{z,20} = \frac{48}{6} [2 \cdot 12,626 + 4 \cdot 14,14] \cdot \frac{1}{0,8} - \frac{48}{6} [0 + 4 \cdot 2,273] \cdot \frac{1}{1,2} + \frac{2 \cdot 30 \cdot 4,735}{2} = 899,6$$

За  $S_{z,10}$  и  $S_{z,20}$  знајте тачно симуларно а максимално савр се  $\sigma$  унутрашњег напонат на сави и где  $\sigma$  +

на се годину сусреду шта

$$\delta_{11} \bar{q}_1 + \delta_{12} \bar{q}_2 + \delta_{10} = 0$$

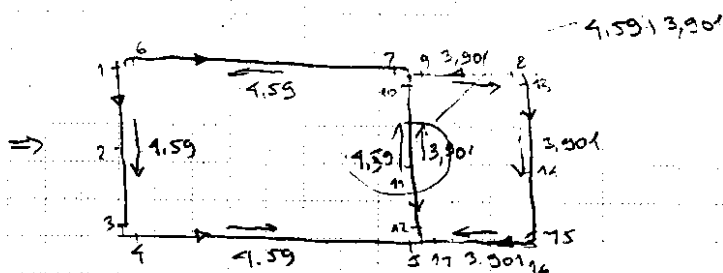
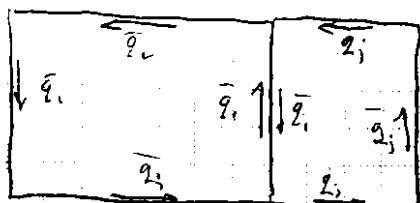
$$\delta_{21} \bar{q}_1 + \delta_{22} \bar{q}_2 + \delta_{20} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 200 & -60 \\ -60 & 160 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1152,1 \\ -833,6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{q}_1 = 4,590 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \\ \bar{q}_2 = -3,901 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \end{cases}$$

и савез ставиш  $q_0$ , долази  $q_i$  а одговара  $q_j$

$q_i$  јесте позитиван ако око посматрање брине  $i$  и геније у смеру  $q$

$q_j$  јесте позитиван ако посматрање брине  $j$  и геније у смеру  $q$



е кад у зависности од савезног смер интеракције који смо извојили на почетку ако се поклапају онда + а ако не онда -

РА УМНОЖИМО

$$q_1 = q_{01} + 4,590 = 4,590$$

$$q_2 = q_{02} + 4,590 = 6,863$$

$$q_3 = q_{03} + 4,590 = 4,590$$

$$q_4 = q_{04} + 4,590 = 4,590$$

$$q_5 = q_{05} + 4,590 = -3,301$$

$$q_6 = q_{06} - 4,590 = -4,590$$

$$q_7 = q_{07} - 4,590 = 3,301$$

$$q_8 = q_{08} - 3,901 = -3,901$$

$$q_9 = q_{09} - 3,901 = 0,839$$

$$q_{10} = q_{10} - 8,491 = 4,135$$

$$q_{11} = q_{11} - 8,491 = 6,174$$

$$q_{12} = q_{12} - 8,491 = 4,135$$

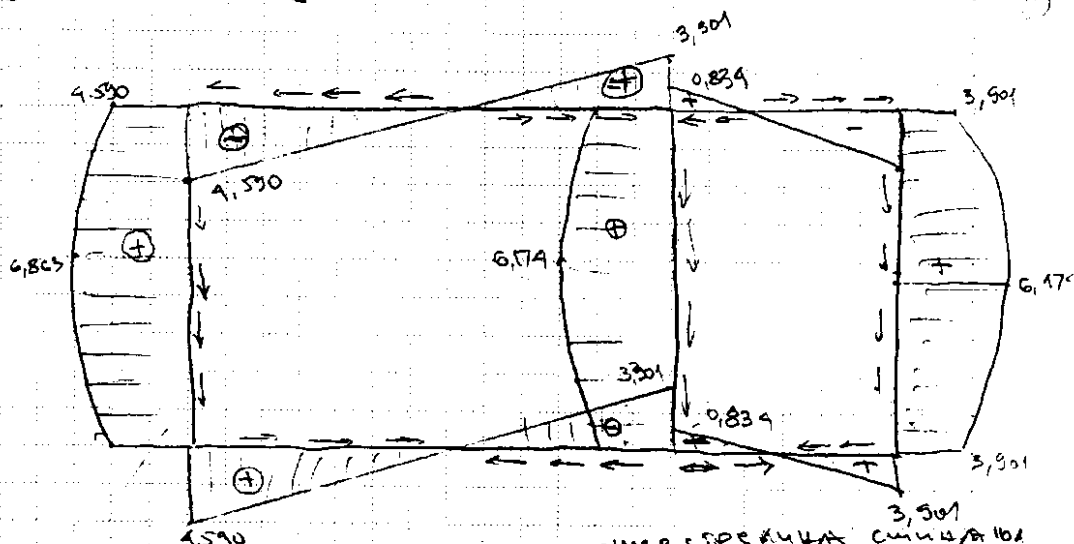
$$q_{13} = q_{13} + 3,901 = 3,901$$

$$q_{14} = q_{14} + 3,901 = 6,174$$

$$q_{15} = q_{15} + 3,901 = 3,901$$

$$q_{16} = q_{16} + 3,901 = 3,901$$

$$q_{17} = q_{17} + 3,901 = -0,839$$



у се годину ставиш  $\frac{q_i}{t_i}$

смер савезног смеру интеракције од почетка. ✓

— одакле можемо наћи силе  $P_1 \dots P_7$

$$P_1 = \frac{48}{6} \cdot [4,590 \cdot 2 + 4 \cdot 6,863] = 293,06 \text{ кН}$$

$$P_2 = \frac{50}{2} (4,590 - 3,301) = 32,23 \text{ кН} = P_3$$

$$P_4 = \frac{48}{6} (2 \cdot 4,135 + 4 \cdot 6,174) = 296,96 \text{ кН}$$

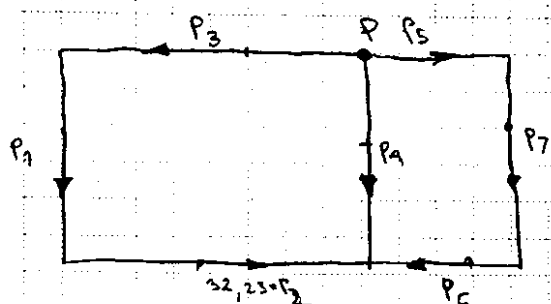
$$P_5 = P_6 = \frac{30}{2} (3,901 - 0,839) = 46,01$$

$$P_7 = \frac{48}{6} (3,901 \cdot 2 + 4 \cdot 6,174) = 259,98$$

ако изаберемо такву  $P$  тако да уопште нема  $P$ -је момент.

$$M_x(r) = 50 \cdot P_1 + P_2 \cdot 48 - P_6 \cdot 48 - P_7 \cdot 30 = 6192,16$$

$$e = \frac{M_x(r)}{T_2} = \frac{6192,16}{800} = 7,740 \text{ м}$$



# **SLOŽENO NAPREZANJE GREDE**





## \* КОМБИНОВАНО (СЛОЖЕНО) НАПРЕЗАЊЕ ГРЕДЕ

Пре свега разматрали различите врсте напрезања зредног носача као што су:

линијално напрезање, чисто савијање, торзију и савијање преде силата. Ово су две основне врсте напрезања зредног носача. Међутим, греда носач може бити изложена истовременом дејству више основних врста напрезања. Тада имамо комбиновано или сложено напрезање.

Напон и деформације при комбинованом напрезању могу се једноставно добити применом закона суперпозиције, тј. сабирањем напона, односно деформација услед појединачних основних напрезања. То је могуће јер су све ј-те којима се опису основне врсте напрезања линеарне.

Ако је штап изложен произвољном оптерећењу, тада се у попречним пресецима штапа јављају свих врста сила у пресеку. Ако за осе  $y$  и  $z$  извојимо за главне централне осе инерције попречног пресека добијемо.

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\tau_{xy} = \frac{I_y}{I_z} t_y(y) + \frac{M_z}{I_z} \gamma_y(y, z)$$

$$\tau_{xz} = \frac{I_z}{I_y} t_z(z) + \frac{M_y}{I_y} \gamma_z(y, z)$$

ставање преде  
силата

торзија

$$\text{где су } t_y(y) = \frac{S_z^*(y)}{C(y)} \quad t_z(z) = \frac{S_y^*(z)}{C(z)}$$

$$\gamma_y(y, z) = \frac{2\phi'}{2z}$$

$$\gamma_z = -\frac{2\phi'}{2y}$$

$\gamma_y$  и  $\gamma_z$  зависе једне од друге због деформације  $\phi$  пресека

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}(y, z) \text{ и } \tau_{xz} = \tau_{zx}(y, z) \quad \phi \text{ је Prandtl-ова функција напона}$$

Као што видимо у најопштијем случају комбинованог напрезања зредног носача имамо само две компоненте напона: нормални напон  $\sigma_x$  и сичутић напон  $\tau$  у равни попречног пресека греде.  $\tau$  је резултујући напон компонентних напона  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  према томе ставе напона је равнаско па се главни напони одређују из израза

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2}) \quad \text{tg } 2\alpha_1 = -\frac{2\tau}{\sigma_x}$$

### ПОДСЕТАК

- ставе напона је равнаско ако је један з напон = 0

- главни напони се рачунају

$$(*) \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}; \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tg } 2\alpha_1 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

$$\text{ако је } \sigma_x = \sigma_{11} \\ \sigma_y = \sigma_{22} = 0$$

$$\tau = \sigma_{12}$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \frac{\sigma_x + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + 0}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2})$$

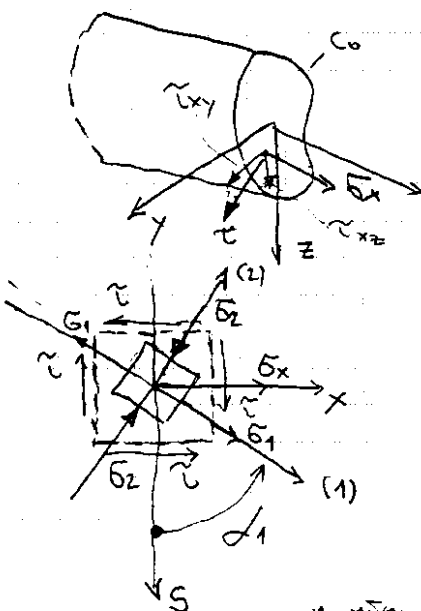
$$а (*) се добија из секундарне \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$\text{где су } I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$I_3 = \det[S] = 0$$

и добијемо у секундарни  $\sigma$ -т и добијемо  $\sigma_N$



\* ГРЕДА ОТВОРЕНОГ ТАНГОЗНАНОГ ПРОФИЛА

105

$$G_x = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \omega$$

$$\gamma = -\frac{T_y S_z^*}{I_z \cdot t} - \frac{T_z S_y^*}{I_y \cdot t} + 2 \frac{M_{\tau}^{(s)}}{I_x^{(s)}} \rho - \frac{M_{\tau}^{(s)} S_{\omega}^*}{I_{\omega} \cdot t}$$

\* ЕНЕРГИЈА ДЕФОРМАЦИЈЕ ПРИ КОМБИНОВАНОМ НАПРЕЗАЊУ ГРЕДЕ

## 106

- $$\frac{r^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{40 \cdot h \cdot h}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{r^3 \cdot 1}{40}} = h = \sqrt{\frac{20^3}{10}} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

$$I_y = \frac{1}{36} \cdot 40 \cdot (20\sqrt{2})^3 + \left(\frac{20\sqrt{2}}{3}\right)^2 \left(\frac{40 \cdot 20\sqrt{2}}{2}\right) + 0,10976 \cdot 20^4 + \left(\frac{4}{3} \frac{20}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{20^6 \pi}{2}$$

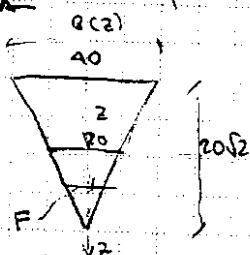
$$I_y = 25\,141,574 + 50\,283,149 + 17\,561,6 + 45\,270,735 = 138\,256,98 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{48} \cdot 40^3 (20\sqrt{2}) + 0 + \frac{1}{8} \pi^4 = 100544,21 \text{ cm}^4 \checkmark$$

- $$G_x = -y \cdot \frac{M_z I_y - I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} + z \cdot \frac{M_y I_z - I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} = -y \cdot \frac{M_z}{I_z} + z \cdot \frac{M_y}{I_y}$$
- $$G_x^{M_y} = -y \cdot \frac{M_z}{I_z} = -y \cdot \frac{30 \cdot 10^3}{100544,21 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-2} = -0,2984 \text{ y [ura]}$$
- $\left. \begin{array}{l} 3y - z = 20 \\ 3z - y = -20 \end{array} \right\}$

$$G_x^{ult} = z \cdot \frac{M_y}{I_y} = z \cdot \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{138256,58} = 0,072 \cdot z \text{ [cm}^2\text{]} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = -20 \\ z = +20,52 \end{array} \right.$$

- $$\tau_x^{\tau_2} = \frac{T_z \cdot S_y^*}{I_y \cdot c(z)}$$



$$\frac{10}{20\sqrt{2}} = \frac{G(z)}{20\sqrt{2} - z} \Rightarrow G(z) = \frac{10(20\sqrt{2} - z)}{20\sqrt{2}} = \sqrt{2}(20\sqrt{2} - z)$$

$$I_y = \frac{1}{36} 10 (20\sqrt{2})^3 = 25\,141.574$$

$$S_y^* = F^* - 2\tau = \frac{8(-2) \cdot (20\sqrt{2} - 2)}{2} \cdot \left[ \frac{(20\sqrt{2} - 2)}{3} + 2 \right]$$

$$S_1^* = \frac{6(z)(20\sqrt{2}-z) \cdot (10\sqrt{2}+z)}{3}$$

$$\tau_x = \frac{10^3 \cdot 10 \cdot 0.62 (2052 - z)(1052 + z) 10^{-6}}{3 \cdot 138256.58 \cdot 10^{-8} \cdot 0.62 \cdot 10^2} = 241,1 \cdot (2052 - z)(1052 + z)$$

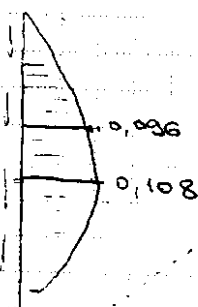
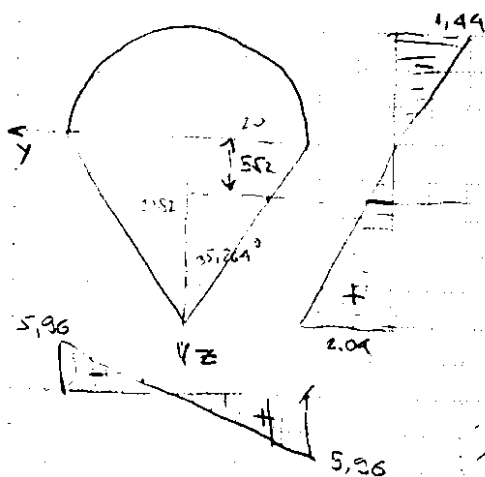
$$= 24,11 (400 + 20\sqrt{2} \cdot z - 10\sqrt{2}z - z^2) = 24,11 (400 + 10\sqrt{2}z - z^2)$$

максимум  $\tau_{x=1} = (10\sqrt{2} - 2z) = 0$

$$\Rightarrow 10\sqrt{2} = 2z \Rightarrow z = 5\sqrt{2}$$

$\rightarrow \tau_x^{T_2} = 0,1085$

4. 3A.  $z=0 \rightarrow 2411 \cdot 400 = 0,09644$




\* Одредити танку у пресеку у којој се јавља  $\tau_{max}$  и максимални тензор напона у њој

$T_{max} / \cos \alpha = T_{xy}$   
 $\Rightarrow T_{xy} = 0,108 / \cos 35,261 = 0,132 \text{ MPa}$   
 @ Ass: 20 mm max in  $T_{xy}$

$$\tau_{xy} = \tau_{xs} \cdot \sin \alpha = 0,0762$$

$$\Rightarrow \frac{2,09}{20,57} = \frac{x}{556} = 0,51$$



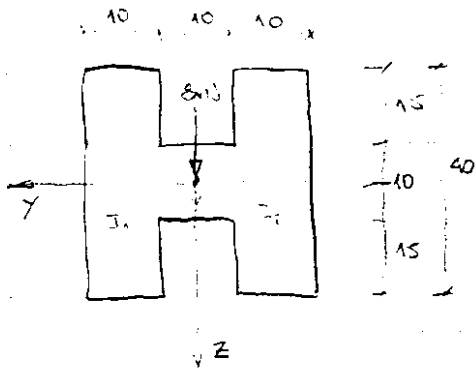
$$\frac{x}{P} = \frac{5.96}{20} \Rightarrow x = 4.47$$

$$p = 1582 \cdot \tan 42^\circ = 1153$$

$$Q_x = Q_{x1} + Q_{x2} = 4.47 + 0.51 = 4.98$$

$$S = \begin{bmatrix} 4,08 & 0,0762 & 0,108 \\ 0,0762 & 0 & 0 \\ 0,108 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

107



$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10^3 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10^4 = 107500 \text{ mm}^4$$

$$S_{y0} = z_c [5, 20]$$

$$Q(z) = \text{const} = 20 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

$$S_{y0} \text{ на место центра} = 15 \cdot 20 \cdot 12,5 = 3750$$

$$\tau_{xy} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 3750 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^3 \cdot 107500 \cdot 10^{-8}} = 0,1395 \text{ MPa}$$

$$S_{y0} = z_c [0, 5]$$

$$Q(z) = 30 \cdot 10 \quad F^* = 30 \cdot 5 + 15 \cdot 20 = 450$$

$$z_T = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 12,5 + 5 \cdot 10 \cdot 2,5}{2 \cdot 10 \cdot 15 + 5 \cdot 30} = 8,611'$$

$$S_y = F^* \cdot z_T^* = 450 \cdot 8,611' = 3875$$

# STATIČKI NEODREĐENI LINIJSKI NOSAČI



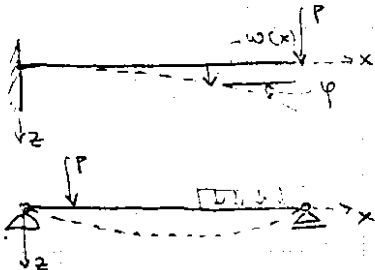
ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА ГРЕД, E + M - M <sup>или</sup> АНАЛОГИЈА

Крива у коју прелази ова зреде након деформације назива се ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЈА ГРЕДЕ. Видно смо раније да је за случај малих деформација кривина еластичне линије конзоле оптерећене силом на крају дата изразом:

$$K = \frac{1}{\delta} = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{-M_y(x)}{EI_y} \quad \text{огносно } EI_y w'' = -M_y(x) \quad \text{где } w(x) \text{ — поперечные прогибы в точке на осн. и т.д. ; } w(0) = 0$$

А ось  $y_1, y_2$  и  $z$  — главные оси инерции пересечения

-  $M_y(x)$  ... момент сгиба относительно  $Y$ -оси на участке  $x$



- УГИБ ПРЕДЕ ..... ордината на еластичните линии
- НАГЪБ ПРЕДЕ ..... нагъб  $\varphi$  тангенте еластичне линии на x-осу

за малог померања  $\varphi = \tan \varphi = \frac{dw}{dx} = w'$

Ако замечамо утицај трансверзалних сила на деформацију, можемо сугатрати да пресеци остију прости и управити на ол. ГРЕДЕ

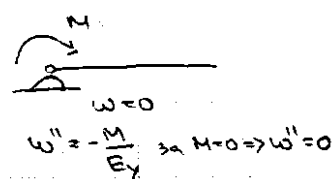
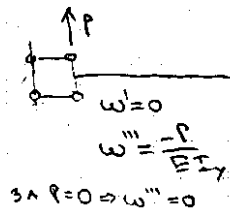
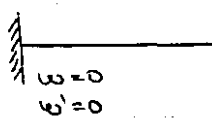
⇒ НАГИБ ГРЕДНЕ ЈЕДНАК ЈЕ ОБРАТАЊУ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА!

- 3-на  $EIW''$  - Мухијеске диференцијална 3-на еластиче линије.

Апо искомистично  $\frac{dM_y}{dx} = T_2$  и  $\frac{d\bar{T}_2}{dx} = -q_x$  пошто по  $EI_y w'''' = q_x$

што је еквивалентна  $3^{\text{та}}$ . Интеграцијом обе гле  $3^{\text{та}}$  и добијано  $\psi(x)$ .

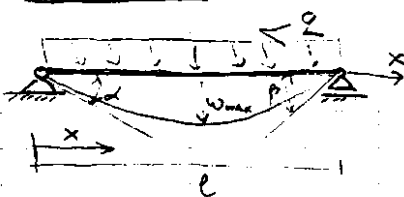
Да ли термички решени ове дјелове се јављају 2 а у другој 4 интеракционе константе појача постављамо граничне услове.



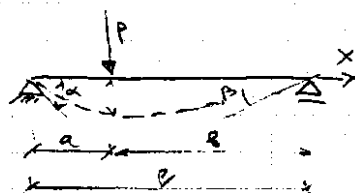
$$\omega''' = -\frac{p}{EI_y}$$

$$\omega'' = -\frac{M_x}{EI_y}$$

### ПРИМЕРЫ



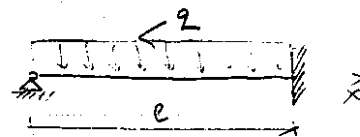
$\Delta 1 \quad M_y = \frac{q}{2}(lx - x^2) = EI_y$   
 gegeben  $w(0) = 0$  u.  $w(l) = 0$



$$M_Y(x) = \frac{P \cdot e}{e} x - H(x-a) P(x-a)$$

$$3-14A \quad \text{EI}, \omega'' = -M_x$$

γCMBU     $\omega(0)=0$      $\omega(l)=0$



$$\Delta j \equiv T_y \omega^N = 2$$

Условия:  $\omega(0)=0$   $\omega(l)=0$   $\omega'(0)=0$   $\omega''(0)$

\* Mohr-Maxwellova analogija

Зависноста између  $\gamma$  титра и концентрација дата је једначином  $\omega' = 19$  а то ако због због

7. Діагностичне значення грає добірочно  $\varphi_2 = \frac{M_{\gamma}(x)}{\Sigma I_{\gamma}(x)}$

Множеством все же можно назвать  $\exists! y \in \mathbb{R} \text{ т.ч. } \exists! y_0 \in \mathbb{R} \text{ такая что}$  УПОРЯДНА КРУТОСТЬ ГРЕДЕ  $\exists x$

u gorgmo boze  $M_y' = T_z$  u  $T_z' = -Q_z$  og pome.

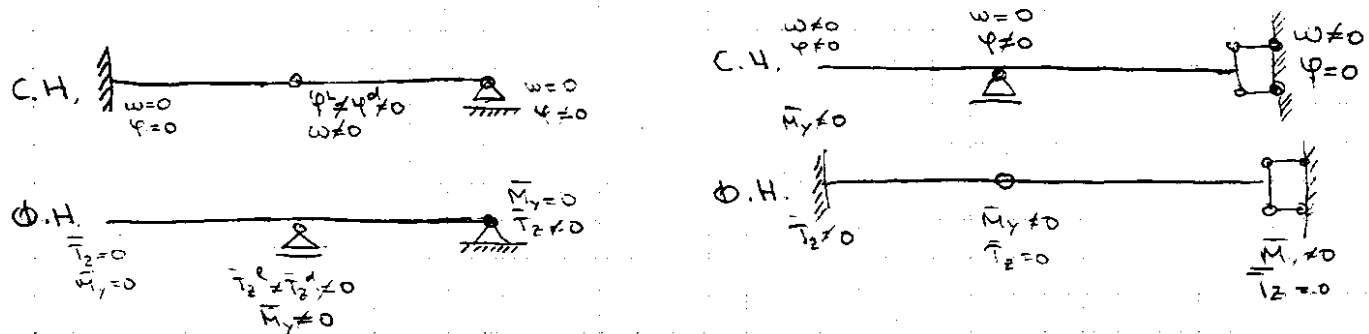
Ако  $\bar{z} = M_y(x) \frac{I_{y0}}{I(x)}$  замишљамо као фиктивно оптерећење греде, тада су одговарајући фиктивни момент и фиктивна трансверзална сила дати са:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_y &= EI_{y0} \omega \\ \bar{T}_z &= EI_{y0} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega &= \frac{\bar{M}_y}{EI_{y0}} \dots \text{угиб еластичне линије} \\ \varphi &= \frac{\bar{T}_z}{EI_{y0}} \dots \text{нагиб еластичне линије} \end{aligned}$$

Међутим аналогија има неке довољне. Да би аналогија била довољна, неопходно је обезбедити и аналогију у односу на граничне услове греде.

Бато се фиктивним оптерећењем мора одговорити не саваљна греда већ фиктивна греда која испуњава захтеве аналогије граничних услова.

(нај закључак:  $M_y \sim \omega$  и  $T_z \sim \omega' = \varphi$  по овој аналогији за фиктивно  $\bar{z}$ )



- уклањеном крају С.Н. ( $w=0, \varphi=0$ ) одговара слободан крај Ф.Н.  $T_z = M_y = 0$  и обротно
- слободно ослобоњеном крају С.Н. ( $w \neq 0, \varphi \neq 0$ ) одговара слободно ослобоњено крај Ф.Н.  $M_y = T_z = 0$
- средњем ослобоњеном крају С.Н. ( $w=0, \varphi \neq 0$ ) одговара моментни зглоб Ф.Н. ( $M_y = 0, T_z \neq 0$ )

\* СТАТИЧКИ НОДРЕЂЕНИ ПРОБЛЕМИ ПРИ САВЈАЊУ ГРЕДЕ СИЛАМ.



# **TEORIJA DRUGOG REDA. IZVIJANJA GREDE**



## СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ ЛИНИЈСКИ НОСАЧИ

Линијски носачи се деле на: ГРЕДЕ, ОКВИРНЕ НОСАЧЕ И РЕШЕТКАСНЕ. Две греде још називамо пуним равним носачима. Ако сви елементи конструктивног система леже у једној истој равни за тадаш носач кажемо да је РАВАН НОСАЧ. Код тих носача постоје само две силе у пресецима које леже у равни носача.

Ако елементи конструкције леже у једној равни и ако спољашње силе дејствују управно на ту равн, тадаш носачи се називају РОВНИЦИ. Код тих носача силе у пресеку које леже у равни носача су једнаке нули.

Конструкција која не припада ниједној од ове две категорије представља ПРОСТОРНУ КОНСТРУКЦИЈУ.

### \* СТАТИЧКА НЕОДРЕЂЕНОСТ НОСАЧА

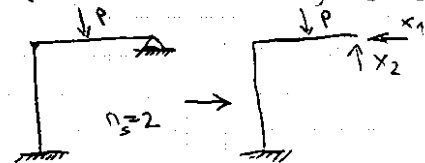
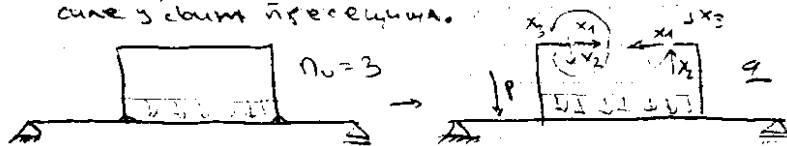
Статички неодређени системи су такви системи код којих се реакције опораца и силе у пресецима не могу одредити из услова равнотеже и помоћу методе пресека.

П-СТЕПЕН СТАТИЧКЕ НЕОДРЕЂЕНОСТИ - јесте број који представља разлику између броја непознатих и броја независних статичких услова за посматрани систем. Тако је то је број веза, унутрашњих или спољашњих, које треба укинути да би задати систем постао статички одређен а остао кинематички стабилан. А кинематички стабилан је онај систем који не може променити геометријски облик само уз деформацију његових елемената.

СТАТИЧКА НЕОДРЕЂЕНОСТ се може поделити на  $\left\{ \begin{array}{l} \text{спољашњу } (n_s) \\ \text{унутрашњу } (n_u) \end{array} \right.$

• СПОЉАШЊА НЕОДРЕЂЕНОСТ - ако се из статичких ј-на равнотеже не могу одредити реакције опораца

• УНУТРАШЊА НЕОДРЕЂЕНОСТ - ако се из познате реакције опораца не могу одредити унутрашње силе у свим пресецима.



\* МЕТОДА СИЛА - код померања се елиминирају из ј-на одређања, на секао основне познате појављују генерализоване силе.

Алгоритам:

- 1) одредити степен статичке неодређености  $n$
- 2) формирамо статички одређени систем уклањањем укупно  $n$ -спољашњих или унутрашњих веза из датог система. Такав одређен систем је ОСНОВНИ СИСТЕМ
- 3) Да би такав основни систем био статички еквивалентан датом систему морамо на нестима где су везе унети одговарајуће генерализоване силе. Те величине називају се СТАТИЧКЕ НЕПОЗНАТЕ и обележавају се са  $X_j$  ( $j=1, \dots, n$ )

④ Статички непознате величине  $X_j$  одређујемо из услова померања или оброта на тештини где су везе уклоњене. Наиме, генерисана померања у основном систему услед дејства спољашњих сила и статички непознатих  $X_j$  морају да буду тачно онолико колико проишљу из везе (обично су једнака нули). Ови услови називају се геометријски услови

⑤ Одређивање статички непознатих  $X_j$  своди се на решавање система од  $n$  линеарних алгебарских ј-та којима су изражени геометријски услови

Како форми суперпозиција, тада померање напдне тачке статички непознате  $X_i$  у правцу те силе можемо изразити као збир померања у основном систему услед дејства свих статичких непознатих величина и задатог оптерећења.

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} + \xi_{i0} \quad (i=1, \dots, n). \text{ Користећи Maxwellove утицајне коэф-}$$

$$\text{фицијенте } \delta_{ij} \Rightarrow \xi_{ij} = \delta_{ij} \cdot X_j$$

$$\text{односно како } \xi_i = \xi_i(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} dX_j = \delta_{ij} dX_j \text{ где је } \delta_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}$$

$$\text{на интеграцијом } \xi_i = \int d\xi_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} dX_j \Rightarrow \xi_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n$$

$$\Rightarrow \xi_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_{i0} \text{ ато узмемо } \delta_{i0} = \xi_{i0}$$

Геометријски услови за  $X_i$  гласе  $\xi_i = \delta_{ic}$  где су  $\delta_{ic}$  задати померања на месту деловања статички непознате силе  $X_i$  у правцу те силе. Ако је осномца на месту  $i$  непомерљив ово померање је нула.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \delta_{i0} &= \delta_{ic} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \delta_{20} &= \delta_{2c} \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \delta_{n0} &= \delta_{nc} \end{aligned}$$

Где су  $\delta_{ij}$  - померање напдне тачке силе  $X_i$  у правцу те силе услед дејства јединичне силе  $X_j$

$\delta_{i0}$  је померање напдне тачке силе  $X_i$  услед спољашњег оптерећења

Коэффициенте  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{i0}$  одређујемо из

$$\delta_{ij} = \int_S \left[ \frac{N_i N_j}{EF} + \frac{T_{yi} T_{yj}}{GF_y} + \frac{T_{zi} T_{zj}}{GF_z} + \frac{M_{xi} M_{xj}}{GI_x} + \frac{M_{yi} M_{yj}}{EI_y} + \frac{M_{zi} M_{zj}}{EI_z} \right] ds$$

у матричном облику:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad D_0 = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix}; \quad D_c = \begin{bmatrix} \delta_{1c} \\ \vdots \\ \delta_{nc} \end{bmatrix} \Rightarrow D \cdot X + D_0 = D_c$$

где је  $D$  - матрица флексибилности

Решавен система добијамо  $X_i$ .

Коначно приложеном систему суперпозиције можемо бити који утицај  $Q$  у задатом носачу одредити као збир одговарајућих утицаја у основном систему услед дејства статички непознатих и задатог оптерећења

$$Q = \sum_{j=1}^n Q_j X_j + Q_0 \quad \begin{aligned} Q_j &\text{ теоријски утицај услед јединичне силе } X_j \\ Q_0 &\text{ услед задатог оптерећења} \end{aligned}$$

$$R = 2K - (Z_0 + Z_u + Z_s + Z_k)$$

сп. чворова      сп. опора      сп. чвор      сп. утисака      конт. веза  $Z_k = 2$

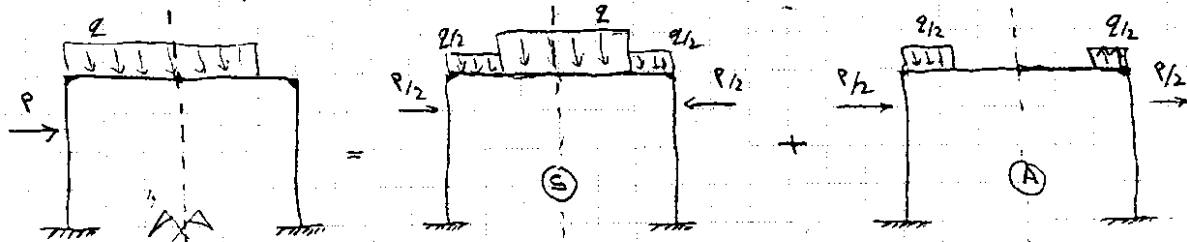
$$\delta'_{ij} = EI_y \delta_{ij} = \frac{I_y}{F} \int_N N_i N_j ds + \int M_i M_j ds$$

$$\text{где } EI_y = \frac{I_y}{F} \int_N N^2 ds$$

## KORIŠĆENJE OSOBINE SIMETRIJE PRI REŠAVANJU STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA

Уколико је посматрани носач симетричан у односу на неку равину или осу, могуће је упростити решење задатка тј снижити степен статичке неодређености система ако је оптерећење симетрично или антисиметрично.

Ако на симетричан носач делује произвољно оптерећење, оно се увек може расставити на симетрично и антисиметрично оптерећење.

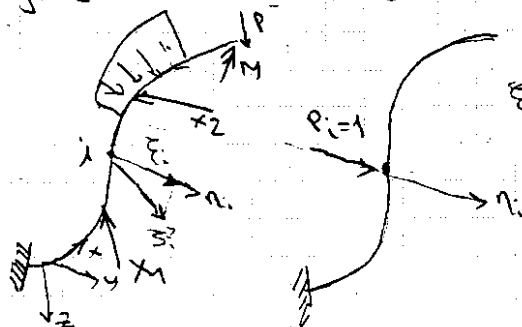


### \* ОДРЕЂИВАЊЕ ПОМЕРАЊА КОД СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИХ СИСТЕМА

Пре свега видети да се генерализовано померање произвољне тачке  $i$  у правцу  $P_i$  може оцити преко Морсовог интеграла  $\xi_i = \int_s \left( \frac{N \bar{N}}{EF} + \frac{T_y \bar{T}_y}{GF_y} + \dots + \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} \right) ds$

У том изразу налазе се производни чланови сила у пресецима услед спољашњег оптерећења и сила у пресецима услед генерализоване силе  $P_i=1$ , која одговара траженом померању  $\xi_i$ . Овај израз важи и за статички одређене и статички неодређене системе. Код статички неодређених задатак је поворедно решити 2 пута: прво услед задатог спољашњег оптерећења, а затим услед силе  $P_i=1$ .

Други начин поступка је да се кетреша давати и погрешни пута решити статички неодређени задатак услед  $P_i=1$  већ то може се додати (силе у пресеку) решавањем статички одређеног система услед  $P_i=1$ .



$$\xi_i = \int_s \left( \frac{N \bar{N}_0}{EF} + \frac{T_y \bar{T}_{y0}}{GF_y} + \dots + \frac{M_z \bar{M}_{z0}}{EI_z} \right) ds$$

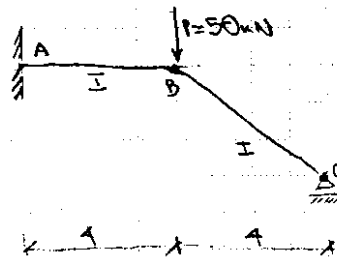
"0" је дајето у основном систему



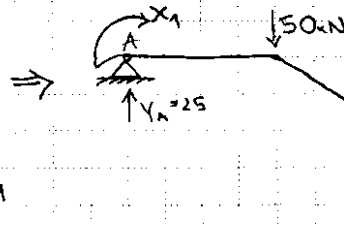
# РЕШАВАЊЕ СТАТИЧКИ НЕОПРЕДЕЉЕНИХ НОСАЧА

-> АДАДИ -

ЗАДАТАК 1 За носач приказан на слици нацртати дијаграме пресечних сила и деформацију, нормалних и тангенталних сила на деформацију.

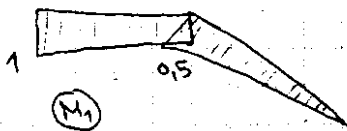
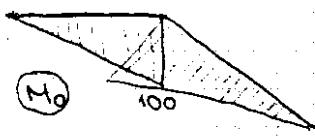


Једногласни статички неопређен систем



$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \dots Y_A + Y_B &= 50 \\ \sum M_A = 0 \dots 50 \cdot 4 &= 8Y_B \Rightarrow Y_B = 25 \\ \Rightarrow Y_A &= 50 - 25 = 25 \end{aligned}$$

$$Y_A = Y_B = 50$$

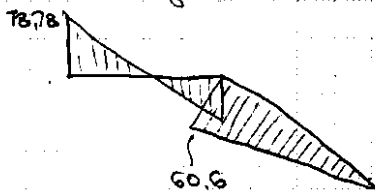


$$EIS_{11} = \int \frac{M \cdot M_1}{EI} ds = \frac{1}{3} (1^2 + 1 \cdot 0.5 + 0.5^2) + \frac{5}{3} 0.5^2 = 2.750$$

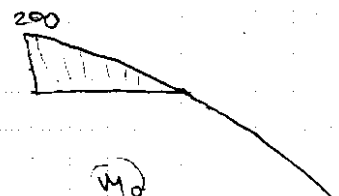
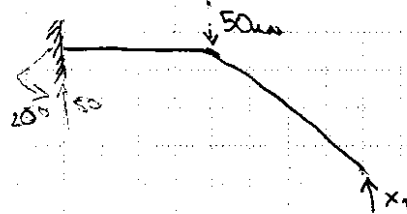
$$EIS_{10} = \int \frac{M \cdot M_0}{EI} ds = \frac{1}{6} 100 (2 \cdot 0.5 + 1) + \frac{5}{3} 100 \cdot 0.5 = 216.67$$

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-216.67}{2.750} = -78.788$$

на је дијаграм помената



II НАЧИН



$$EIS_{11} = \frac{1}{3} (8^2 + 32 + 16) + \frac{5}{3} 4^2 = 176$$

$$EIS_{10} = \frac{1}{6} 200 (4 + 2 \cdot 8) = 2666.66$$

$$\delta_{11} X_1 = -\delta_{10} \Rightarrow X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-2666.66}{176} = -15.15 \quad \checkmark$$

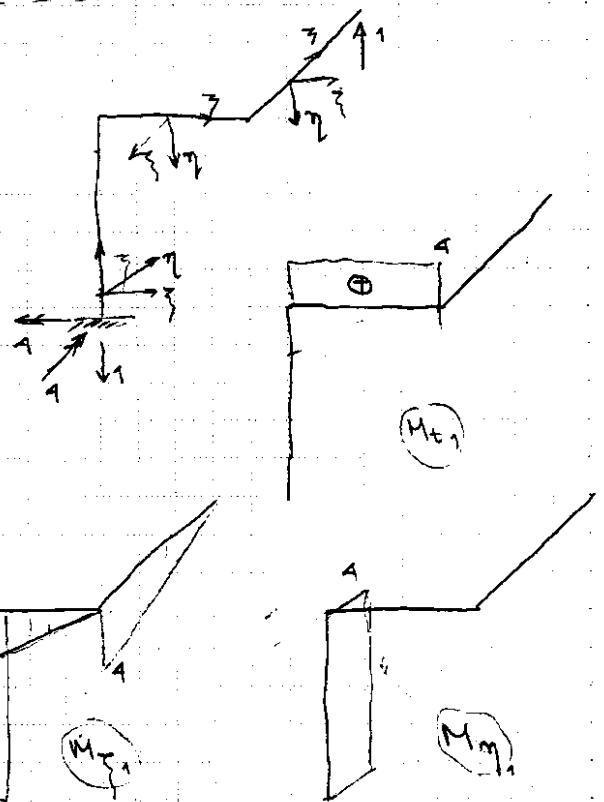
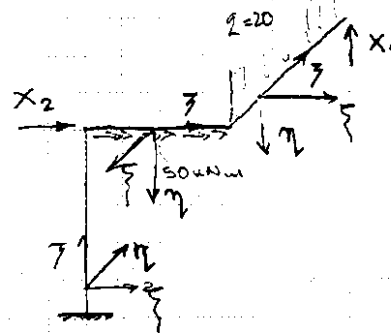
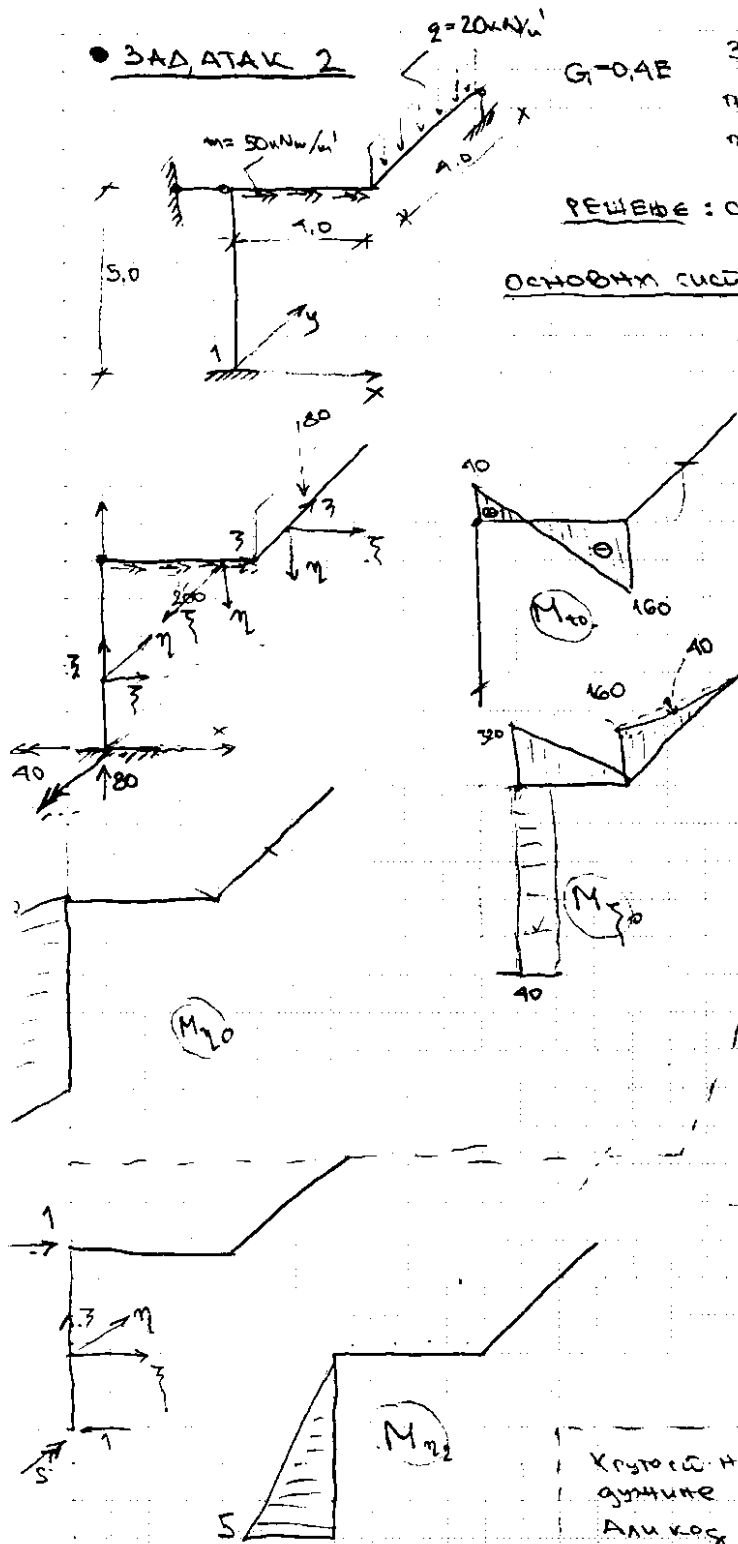
## ЗАДАТАК 2

$$G = 0,4E$$

За дати систем бреша слици нацртати функције пресечних сна. Сви шипови су кружни покретно према истих крутоћи

РЕШЕЊЕ: Систем је 2 пута статички неодређен.

ОСНОВНИ СИСТЕМ



Крутоћа на савијање је свуда иста пошто су и периметричне дужине = савршеним.

Али код  $I_t$  није све исто код сваког угла.

Како је свуда  $\frac{I}{EI}$  а код торзије  $\frac{I}{GI_t}$

$$2\pi \text{ је } I_t \text{ за круг} = I_o = \int r^2 df = \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} df = \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi r^4}{2} \rightarrow I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{2}$$

односно  $I_t = 2I$  и зато је  $G = 0,4E$

па имамо  $\frac{I}{EI}$  а код торзије  $\frac{I}{0,4E2I} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{0,8} \right]$  дакле све шипови би требало да су реше за 1,25 пута

$$\delta_{11} = 5 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 4 + \left( \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3} \right) 2 + 5 \cdot 4^2 = 282,6667$$

$$\delta_{22} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{3} = 41,6667$$

$$\delta_{10} = \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot (40 - 160) - \frac{5 \cdot 4 \cdot 320 + 4 \cdot 40 \cdot 5 - \frac{320 \cdot 4 \cdot 4}{3} - \frac{160 \cdot 4 \cdot 4}{3} + \frac{4 \cdot 40 \cdot 4}{3}}{3} = -9146,66$$



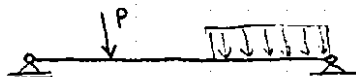
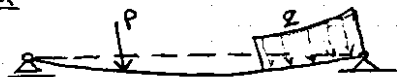
# ELASTO-PLASTIČNA TEORIJA

121

# ТЕОРИЈА ДРУГОГ РЕДА. ИЗВИЈАЊЕ

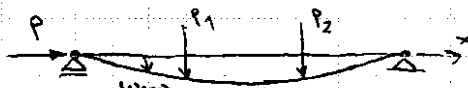
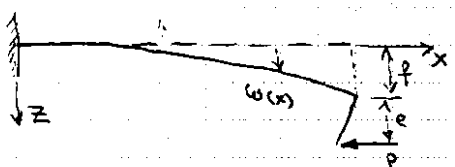
• **ТЕОРИЈА I РЕДА** - услед дејства спољашњих сила у тврдом се јављују унутрашње силе (напони) а тврдо се деформише. При томе се у деформисаној конфигурацији успоставља равнотежа између спољашњих и унутрашњих сила. Уколико су оптерећење и деформација такви да се деформисана конфигурација незнатно разликује од недеформисане, можемо усвојити претпоставку да се напони рачунају и услови равнотеже постављају на недеформисаној конфигурацији, а не на деформисаној, како је заиста случај.

ПРИМЕР



• **ТЕОРИЈА II РЕДА** Међутим има случајева када, и поред усвојене претпоставке о малим померањима, утицај ових померања на расподелу напона и деформација се не може занемарити и да се услови равнотеже морају поставити на деформисаној конфигурацији тврде. Дакле овде се услови равнотеже постављају на деформисаној конфигурацији.

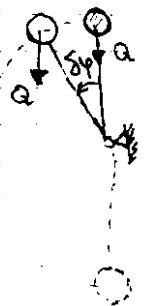
ПРИМЕР



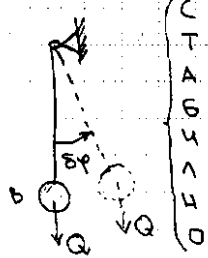
## \*ИЗВИЈАЊЕ

Уколико аксијална сила притиска доводи до критичне вредности, довољан је и најмањи поремећај (нпр. најмања погрешна сила или ексцентричношћ аксијалне силе или почетна закривљеност тврде) па да дође до појаве великих угиба тј. долома тврде. Ово је у ствари последица губљења стабилности равнотежног облика тврде при дејству критичне силе притиска. Ова појава се зове извијање, а критична сила при којој се то догађа зове се критична сила извијања. Величина критичне силе не зависи од врсте и величине попречног оптерећења, већ само од граничних услова тј. начина ослагања тврде.

- За неки положај равнотеже кажемо да је стабилан, ако се тело враћа у свој почетни положај после уклањања малог поремећаја које се радије тело. У супротном тело је у лабилној равнотежи.



А  
Б  
В  
Г  
Д  
Е  
Ж  
З  
И  
Ј  
К  
Л  
М  
Н  
О



С  
Т  
А  
Б  
В  
Г  
Д  
Е  
Ж  
З  
И  
Ј  
К  
Л  
М  
Н  
О

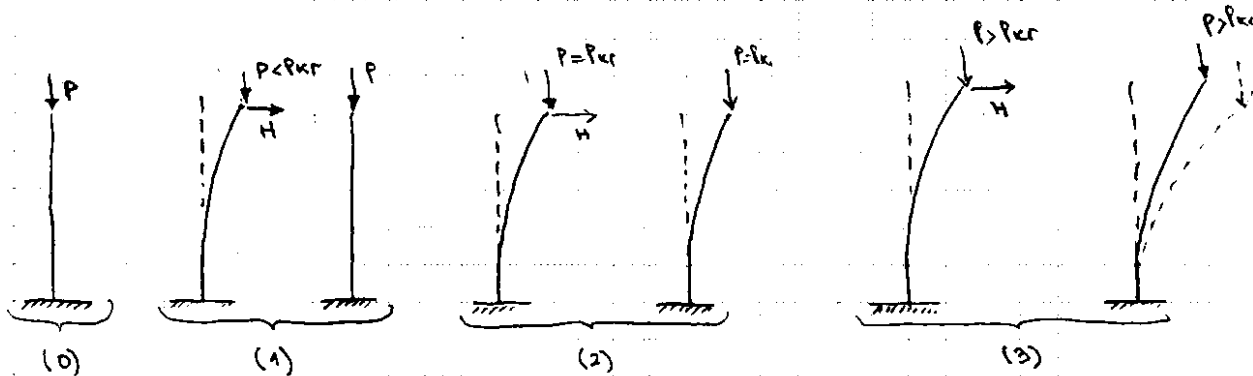
- Има виртуална померања тела у стабилној равнотежи доводе до повећања потенцијалне енергије тела.

- Ако је тело у лабилној равнотежи, виртуална померања смањују потенцијалну енергију и доводе до континуалног повећања кинетичке енергије тела.

- Ако има виртуална померања не доводе ни до какве промене потенцијалне енергије кажемо да је систем у неутралној равнотежи.

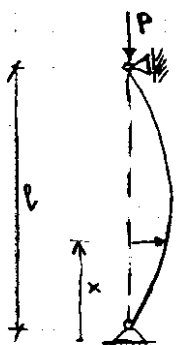
Феномен нестабилности сада ћемо детаљније анализирати и на примеру притиснутог штапа. Претпоставимо да је идеално прав, хомоген штап оптерећен идеално централно силом  $P$ . Тврди штап остаје прав. Ако на штап делује краткотрајна мала бочна сила  $H$  она ће изазвати бочна померања штапа. Постоје три случаја

- 1)  $P < P_{кр}$  и након уклањања бочне силе, бочна померања нестају  $\rightarrow$  штап се враћа у првобитан положај при томе је штап у положају стабилне еластичне равнотеже.
- 2)  $P = P_{кр}$  бочна сила изазива угиба који остају и након уклањања те силе, али се ти угиба даље не повећавају. Дакле долази до извијања штапа при чему је он у положају неутралне стабилности.
- 3)  $P > P_{кр}$  и најмања бочна сила изазива угиба који се и након уклањања те силе и даље повећавају све до лома штапа, овде се ради о нестабилној (лабилној) равнотежи штапа.



## \* ИЗВНАЈАКЕ ПРЕДЕ У ЕЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ. ДИЛЕРОВИ СЛУЧАЈЕВИ ИЗВНАЈАКЕ

### • ПРЕДА ЗАГЛАВКАСТО ОСЛОБЕЊЕНА НА ОБА КРАЈА



Дуж еластичне линије  $EI_y w'' = -M_y$  где је  $I_y$  минимални момент инерције попречног пресека преде ( $I_y = I_{min}$ )

Момент савијања у произвољном попречном пресеку преде:  $M_y = w \cdot P$

на дуж  $x$ -на постаје  $EI_y w'' = -Pw$

$$\Rightarrow w'' + k^2 w = 0 \quad \text{где је } k^2 = \frac{P}{EI_y}$$

$$P(r) = r^2 + k^2 \cdot 0 \Rightarrow P_{1,2} = \sqrt{-k^2} = \pm k \cdot i \Rightarrow w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

опште решење

Интеграционе константе  $C_1$  и  $C_2$  одређујемо из граничних услова

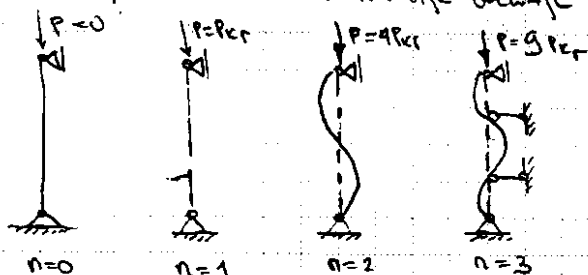
$$w(0) = 0 \text{ и } w(l) = 0 \Rightarrow w(0) = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow w(l) = C_1 \cos kl + C_2 \sin kl = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \vee \sin kl = 0$$

• Ако је  $C_2 = 0$  добијемо  $w(x) = 0$  на следи да је прав облик један од могућих равнотежних облика

• Ако је  $\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Leftrightarrow k = \frac{n\pi}{l}$  на је  $\frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI_y} \Rightarrow P = \frac{EI_y n^2 \pi^2}{l^2}$

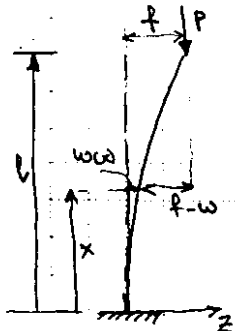
А  $x$ -на еластичне линије била је  $C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x = w(x)$



случај  $n=0$  није уопште интересан јер је  $P=0$  дакле то је случај неоптерећеног штапа

$$\text{за } n=1 \quad P = P_{cr} = \frac{EI_y \pi^2}{l^2} \quad \text{и.т.д.}$$

### • ПРЕДА УКОСЛОВЕНА НА ЈЕДНОМ И СЛОБОДНА НА ДРУГОМ КРАЈУ



$M_y = -P(f-w)$  на је  $EI_y w'' = P(f-w)$  дуж  $x$ -на еластичне линије

$$EI_y w'' = Pf - Pw \Rightarrow w'' + k^2 w = k^2 f \quad \text{где је } k^2 = \frac{P}{EI_y} \quad \text{дуж лево и десно:}$$

$$P(r) = r^2 + k^2 \cdot 0 \Rightarrow w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3$$

$$w''' + k^2 w' = 0$$

интеграционе константе одређујемо из граничних услова:

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \\ w''(l) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w(0) &= C_1 = -C_3 \\ w'(0) &= -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx = 0 \text{ за } x=0 = C_2 k = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ w''(l) &= -C_1 k^2 \cos kl - C_2 k^2 \sin kl = 0 \text{ за } x=l \Rightarrow C_1 \cos kl = 0 \end{aligned}$$

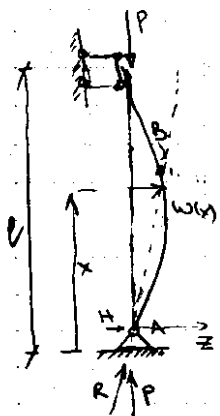
$$\Rightarrow C_1 \cos kl = 0 \Rightarrow \cos kl = 0$$

$$\text{најмања вредност за } k \text{ је када је } n=1 \quad k = \frac{\pi}{2l}$$

$$\Rightarrow kl = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{најмања вредност за } P \text{ је када је } n=1 \quad P = P_{cr} = \frac{EI_y \pi^2}{4l^2}$$

\* ГРЕДА УКЛОЊЕНА НА ЈЕДНОМ И ЗАГЛАВКАТО ОСЛОМЕНА НА ДРУГОМ КРАЈУ



Очигледно је да постоје две тачке у којима је кривина једнака нули. То су А и В. Закључујемо да се у тачки А јавља попречна сила H која са силом P даје резултујућу косу силу R чир на јавља линија пролази и кроз А и кроз В.

Момент савијања у произвољном појечном пресеку је:  $M_y = P \cdot w - H \cdot x$   
 дубина ел. линије  $EI_y w'' = Hx - Pw \Rightarrow w'' + k^2 w = Hx$  где је  $k^2 = \frac{P}{EI_y}$

Да би смо добили хомогену Δј диференцирамо је по x два пута  
 $w^{IV} + k^2 w'' = 0 \quad \chi(r) = r^4 + k^2 r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + k^2) = 0$   
 $\Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \text{ и } r_{3,4} = \pm i k$

па је опште решење Δј:  $w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 x + C_4$

Интеграционе константе одређујемо из услова:

$$w(0) = 0 \dots 0 = C_1 + C_4 \Rightarrow C_1 = -C_4$$

$$w(l) = 0 \dots 0 = C_1 \cos kl + C_2 \sin kl + C_3 l + C_4 = 0$$

$$w'(0) = 0 \dots -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + C_3 = 0$$

$$w''(0) = 0 \dots -C_1 k^2 \cos kx + C_2 k^2 \sin kx = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{из } (*) \text{ следи } -C_2 k \cos kl = C_3 \Rightarrow w = C_2 \sin kx - C_2 k \cos kl \cdot x \Rightarrow w = C_2 (\sin kx - kx \cos kl)$$

применимо гранични услов (\*\*), где је  $C_3 = -\frac{C_2 \sin kl}{l}$

$$\text{напокон погледом: } \frac{C_3}{C_2} = \frac{-\frac{C_2 k \cos kl}{1}}{-\frac{C_2 \sin kl}{l}} \Rightarrow 1 = \frac{kl \cos kl}{\sin kl} \Rightarrow \tan kl = kl$$

Ово је трансцендентна једн.

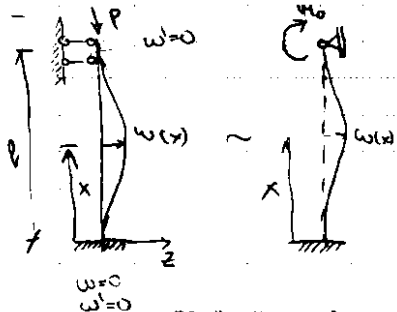
Знаменитим путем се решава и  $kl = 4.4934$  па је  $P_{кр} = \pi^2 \frac{EI_y}{(4.7l)^2}$

$$w = C_2 \left( \sin 4.4934 \frac{x}{l} + 0.9761 \frac{x}{l} \right) \text{ при чему } C_2 \text{ остаје неодређена константа}$$

\* ГРЕДА УКЛОЊЕНА НА ОБА КРАЈА

Овде имамо два случаја, две могуће форме извртања тј симетричну и антисиметричну. За сваки од тих два случаја одређујемо одговарајућу критичну силу, а она која је мања представља стварну критичну силу извртања

а) СИМЕТРИЧНА ФОРМА



$M_y = Pw - M_0$  где  $M_0$  реакциони момент у заглављеном основицу греде

Дубина ел. линије  $EI_y w'' = M_0 - Pw \Rightarrow w'' + k^2 w = M_0$  где је  $k^2 = \frac{P}{EI_y}$

Да би добили хомогену диференцирамо је по x

$$w^{IV} + k^2 w'' = 0 \dots \chi(r) = r^4 + k^2 r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 + k^2) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0, r_{3,4} = \pm i k$$

опште решење  $w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3$

$$\text{гранични услови: } w(0) = 0 \quad C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1$$

$$w(l) = 0 \quad C_1 \cos kl + C_2 \sin kl + C_3 = 0$$

$$w'(0) = 0 \quad -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

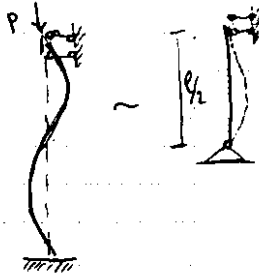
$$\text{па је из } (*) \Rightarrow C_1 (\cos kl - 1) = 0 \Rightarrow 1 = \cos kl \Rightarrow kl = 2n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2n\pi}{l}$$

па је  $P_{кр} = k^2 EI_y$  најмање је k за n=1, тј. за n=0  $\Rightarrow P=0$  неинтересан случај

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_y}{l^2} \quad \text{тј. } w = C_3 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

## 8) АНТИМЕТРИЧНО



А то смо лет радил  $P_{kr} = 2,046 \pi^2 \frac{EI_y}{(\frac{l_0}{2})^2} = 8,184 \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$

## \* СЛОБОДНА ДУЖИНА ИЗВИЈАЊА ГРЕДЕ

Ако изоредимо четири основна Ојлерова случаја можемо уочити да изрази за одговарајуће критичне силе се могу изразити у јединственом облику

$$P_{kr} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_0^2} \quad \text{где је } l_0 = \mu l \quad \text{где је } l_0 - \text{слободна дужина извијања}$$

$\mu$  - коефицијент дужине извијања који зависи од услова оснивања греде

- коефицијент дужине извијања за Ојлерове случајеве:

- где на оба краја зглобасто оснивање  $\mu = 1$
- где укљештена на једном а на другом слободна  $\mu = 2$
- где укљештена на једном, а на другом зглобасто оснивање  $\mu = 0,7$
- где обострано укљештена  $\mu = 0,5$

Геометријски, слободна дужина извијања представља дужину једног полуцикла синусоиде, тј. растојање између превојних тачака А и В еластичне линије греде у којима је момент савијања једнак нули. То је дукле дужина одговарајуће замишљајуће греде са зглобастим основеним крајевима. Грмк у књижи је 517.

## \* ДИМЕНЗИОНАЛНЕ ГРЕДЕ ПРЕМА ИЗВИЈАЊУ

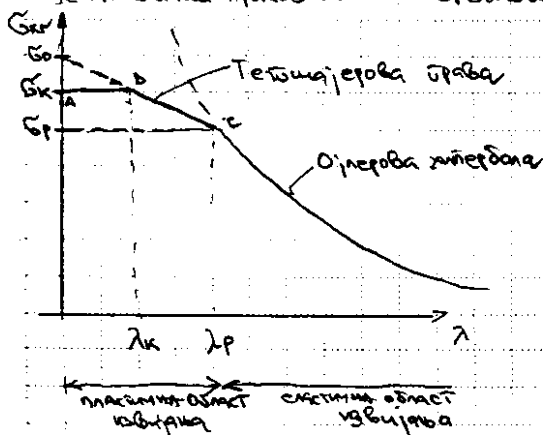
Нормалан напон који одговара критичној сили извијања је критичан напон извијања

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \pi^2 \frac{EI_y}{l_0^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_0}{i_y}\right)^2} \quad \text{где је } i_y \text{ минималан полупречник инерције појечног}$$

пресека где  $(i_y = i_{min})$  дат изразом  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$

Ако  $\lambda = \frac{l_0}{i_y}$  где је  $\lambda$  - виткост греде  $\Rightarrow \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Као што видимо  $\sigma_{kr}$  зависи само од модула еластичности и виткости. Ова зависност је графички приказана хиперболом која се назива Ојлерова хипербола.



Како је израз  $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$  изведен из претпоставке о линеарно еластичном понашању материјала, Ојлерова хипербола важи само на делу CD где је  $\sigma_{kr} < \sigma_r$  - границе пропорционалности материјала.

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_r}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_r}}$$

Ако је  $\lambda < \lambda_r$  Ојлерова хипербола више не важи јер  $\sigma_{kr} > \sigma_r$  и зато долази до пораста пластичних деформација, тј почиње нелинеарно понашање греде. Због сложеног понашања израчунавања извијања у пластичној области усвајају се трчловити емпиријски изрази који су плод великог броја експеримената. Тако је уведен Тетлингјева права

где ј-ном  $\sigma_{kr} = \sigma_0 - \sigma_1 \lambda$  где  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  зависе од врсте материјала и експериментално се одређују.

Ако је виткост греде веома мала, тј ако се ради о краткој греди, до извијања уопште неће доћи већ ће доћи до лома греде због прекорачења њене издржљивости, тј отпорности материјала греде. Тада је  $\sigma_{kr} = \sigma_k$ , где је  $\sigma_k$  једнака граници течења  $\sigma_T$  код зглабвих или  $\sigma_{yk}$  (јачини материјала).

Дакле, у зависности од виткости притиснуте преде разликујемо три случаја:

- ① КРАТКА ГРЕДА: ( $\lambda < \lambda_k$ ) коју које наставља пре краћење носивости материјала пре него извјање
- ② ГРЕДА СРЕДЉЕ ДУЖИНЕ: ( $\lambda_k < \lambda < \lambda_p$ ) која се пројектује на извјање према  $\sigma_{kr} = \sigma_0$  или постоје неке друге емпиријске формуле.
- ③ ВИТКА ГРЕДА: ( $\lambda > \lambda_p$ ) која се пројектује на извјање постоје формулом Ејлеровог израза.  

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Због увек присутних геометријских и материјалних неправилности, као и нецентрисаности притисне силе и слично, уводимо коэффициент сигурности на извјање  $\gamma_i$ , тако да је  $\sigma_{di} = \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_i}$  и, већи дозвољени напон у зреду који највише можемо допустити да не би дошло до извјања.

При димензионисању притиснуте преде захтевамо да је  $\sigma = \frac{P}{F} < \sigma_{di} = \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_i}$

Коэффициент сигурности на извјање  $\gamma_i$  зависи од виткости греде и узима се што већи што је виткост већа.

Често се међутим, уместо овог израза за димензионисање притиснуте греде примењује изв.  $\omega$  (омега) постој бач, где се узима да је  $\sigma_{di} = \frac{\sigma_d}{\omega}$

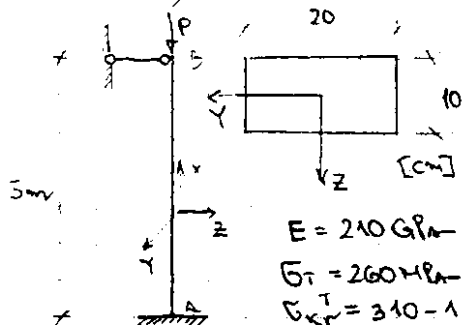
где је  $\sigma_d$  дозвољени напон у зреду кад се о извјању не води рачуна, а  $\omega > 1$  је све коэффициент извјања и зависи од виткости греде и одређује се експериментално.

Дакле при димензионисању по  $\omega$  поступку  $\sigma = \frac{P}{F} < \sigma_{di} = \frac{\sigma_d}{\omega} \Rightarrow \sigma_{рач} = \omega \cdot \sigma = \omega \frac{P}{F} \leq \sigma_d$  дакле захтева се да рачунаки напон, који се добија множењем сабирног напона са  $\omega$ , буде мањи од дозвољеног напона.

# ИЗВЕШТАЈЕ ПРЕД

-ЗАДАЧА 11-

**ЗАДАЧА 1** Угао гужине 5m укљештен је у тачки А, док је у тачки В спречено само померање у правцу локалне осе z. Одредити вредност критичне силе критичка ало је:



$$F = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} 20 \cdot 10^3 = 1666.6 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} 20^3 \cdot 10 = 6666.6 \text{ cm}^4$$

$$\lambda_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = 2.86 \text{ cm}$$

$$\lambda_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = 5.77 \text{ cm}$$

1) Ово је случај зрге кој је један крај укљештен а други слободно основана на је  $\mu = 0.7$  односно  $l_0 = 0.7l = 0.7 \cdot 5 = 3.5 \text{ m}$

2) Ово је случај зрге која је укљештена са једне и слободна са друге стране на је  $\mu = 2$  односно  $l_0 = 2l = 2 \cdot 5 = 10.0 \text{ m}$

$$\bullet \text{ Виткост зрге } \lambda = \frac{l_0}{\lambda_y} = \frac{3.5 \text{ m}}{0.0286 \text{ m}} = 121.293$$

$$\text{Виткост зрге } \lambda_z = \frac{l_0}{\lambda_z} = \frac{10.0 \text{ m}}{0.0577 \text{ m}} = 173.31$$

$$\sigma_{kr,y} = 310 - 1.15 \cdot 121.293 = 170.57 \text{ MPa}$$

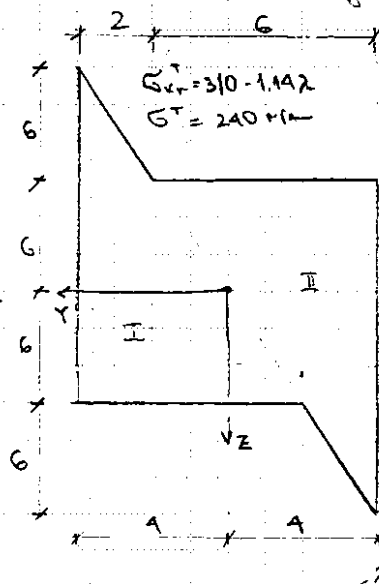
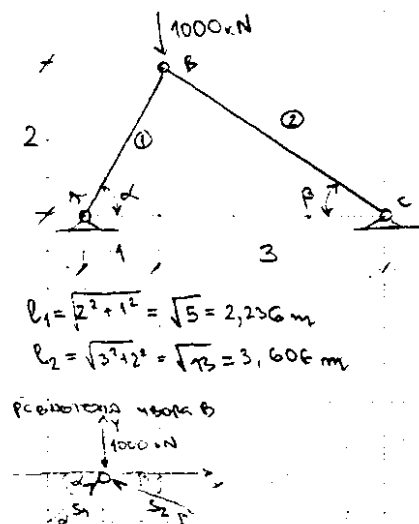
$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{E \pi^2}{\lambda^2} = \frac{210 \cdot 1000 \cdot 3.14^2}{(173.31)^2} = 69.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{kr} = \min \begin{cases} \sigma_{kr,y} = 170.57 \text{ MPa} \\ \sigma_{kr,z} = 69 \text{ MPa} \\ \sigma_T = 260 \text{ MPa} \end{cases} \rightarrow \sigma_{kr} = 69 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot F = 69 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-4} = 1380 \text{ kN}$$

**ЗАКЛУЧАК** Крива је спречено само померање неукљештеног краја зрге у z-правцу у том случају је други зрге која је на једном крају укљештена, а на другом слободна основана. ( $\mu = 0.7$ )  
Ам зато у y-правцу она је слободна на зрге неукљештеног краја која је на једном крају укљештена а на другом слободна ( $\mu = 2$ )  
Критична је она која је мања а критична је мања од силе која би у угао изазвала тежење.

## ЗАДАЧА 2



$$F = 2 \cdot \frac{12 \cdot 6}{2} = 108 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{36} [2 \cdot 6 \cdot 18^3] + 0 = 1944 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{36} [2 \cdot 6^3 \cdot 18] + 2 \cdot 2^3 \cdot 54 = 648 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{72} [6^3 \cdot 18^2] + 2 \cdot 10 = 324 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 571.31 \text{ cm}^4$$

$$\lambda_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = 2.13 \text{ cm}$$

$$l_0 = l_1 \vee l_0 = l_2 \text{ јер је } \mu_1 = \mu_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{\lambda_{min}} = 37.22 \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{\lambda_{min}} = 156.78$$

$$\sigma_{kr} = \min \begin{cases} \sigma_{kr,y} = 310 - 1.15 \cdot 37.22 = 199.17 \text{ MPa} \\ \sigma_{kr,z} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} = 213.29 \text{ MPa} \\ \sigma_T = 240 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{kr} = 199.17 \text{ MPa} \Rightarrow P_{cr} =$$

$$\sigma_{kr} = \min \begin{cases} \sigma_{kr,y} = 310 - 1.15 \cdot 156.78 = 131.27 \\ \sigma_{kr,z} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} = 84.57 \\ \sigma_T = 240 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{kr} = 84.57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{d,i} = \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_i}$$

$$\gamma_{i,1} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{d,i}} = 2.566$$

$$\gamma_{i,2} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{d,i}} = \frac{84.57}{41.732} = 2.021$$

(извршност)



# \* ЭЛАСТО ПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА ГРЕДЕ

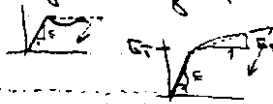
## • УВОДНО НАПОМЕНЕ

До сада смо у анализи греде сматрали да се у греди јављају само еластичне деформације, при чему је веза између напона и деформација линеарна. При томе смо дозвољено одређење и потребне димензије греде одређивали из услова да се нигде у греди не јавља пластична деформација. Дакле, у прорачунима смо усвајали модел идеално еластичног тела, користећи Хуков закон за везу између напона и деформација.

Међутим, појава пластичне деформације у некој тачки, па чак и у широј области греде, не мора да значи илом, тј губитак њене носивости. Зато се данас димензионисање чешће врши не према напону који одговара почетку пластичне деформације, већ према граничној оптерећењу које изазива губитак носивости греде, када она улази у механизам. Ово је тзв. ДИМЕНЗИОНИСАЊЕ ПРЕМА ГРАНИЧНОЈ НОСИВОСТИ.

За димензионисање материјала пожељно усвајати различите идеализације у зависности од облика дијаграма ( $\sigma, \epsilon$ ).

① ЕЛАСТИЧНО-ИДЕАЛНО ПЛАСТИЧНО БЕЗ ОТВРЂАВАЊА код оних којима је видна изражена граница течења (што код реалних тела није случај)



② ЕЛАСТО-ИДЕАЛНО ПЛАСТИЧНО СА ОТВРЂАВАЊЕМ

$$\sigma = E \cdot \epsilon \text{ за } \epsilon \leq \epsilon_T$$

$$\sigma = \sigma_T + E_T (\epsilon - \epsilon_T) \text{ за } \epsilon > \epsilon_T$$

③ У неким случајевима се еластична деформација у поређењу са пластичном може занемарити па тада имамо идеализацију:

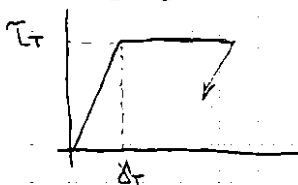
→ КРУТО-ПЛАСТИЧНО  $\sigma_T$

→ КРУТО-ПЛАСТИЧНО СА ОТВРЂАВАЊЕМ  $\sigma_T$

Еластопластична анализа греде заснива се на моделу идеално пластичног материјала

У еластопластичној анализи закон суперпозиције не важи.

• На крају претпостављамо да је при напрезању греде најчешће симетрије зависност између симетричног напона  $\sigma$  од клизања  $\gamma$

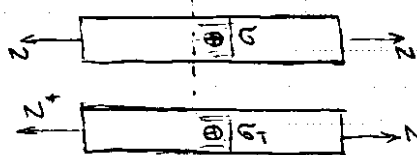


При томе је граница пластичног течења за симетрични напон  $\sigma_T$  дата

- по Трескинском критеријуму.....  $\tau_T = \frac{1}{2} \sigma_T$

- по Мисесовом критеријуму.....  $\tau_T = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_T$

## \* ЭЛАСТИЧНА АНАЛИЗА АКЦИЈАЛНО НАПРЕГНУТЕ ГРЕДЕ

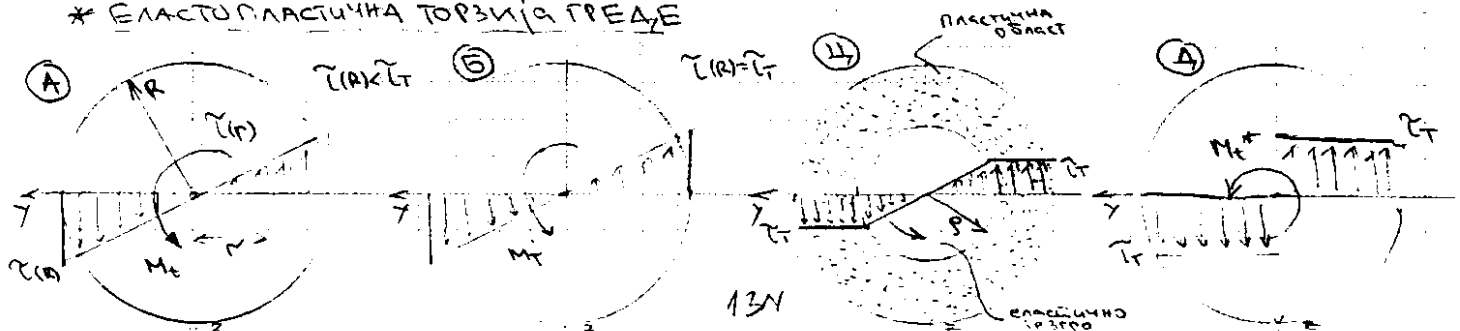


Од крмије  $\sigma = \frac{N}{F}$  где је  $F$  површина попречног пресека греде

Када напон  $\sigma$  досегне величину течења, тада истовремено долази до пластичног течења материјала у свим тачкама попречног пресека и у свим попречним пресецима греде.  $\Rightarrow N^* = \sigma_T \cdot F$

где је  $N^*$  максимална сила којом се греда може оптеретити. При сили  $N^*$  настанула пластичфикација греде (читање) и она губи даљу способност да носи.

## \* ЭЛАСТО ПЛАСТИЧНА ТОРЗИЈА ГРЕДЕ



Посматрајемо прво зреду кружног попречног пресека

- Слика (А) У случају еластично деформисање зредс кружног напон је дао изразом  $\tau = \frac{M_t}{I_0} r$  где је  $I_0$  покрени момент инерције попречног пресека  $I_0 = \frac{1}{2} \pi R^4$  Максимални кружни напон је за  $r = R$  и износи  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_0} R = \frac{2 M_t}{\pi R^3} = \frac{M_t}{W_t}$  где је  $W_t$  -отпорни момент при торзији.

- Слика (Б) При повећању торзионног момента  $M_t$  максимални кружни напон расте све док не досегне зреду пластичног течења за кружни напон  $\tau_t$ . Момент торзије за који почиње пластичификација зреде је:  $M_t^T = \frac{1}{2} \pi R^3 \tau_t = W_t \tau_t$   
 $M_t^T$  јесте торзионни момент на зреду течења. Угао торзије је дао  $\theta = \frac{M_t^T}{G I_0} = \frac{\tau_t}{G R}$

$$\Rightarrow \tau_t = \theta G R \Rightarrow \gamma_t = \frac{\tau_t}{G} = \theta R \text{ јесте клизање на зреду течења}$$

- Слика (Ц) Са даљим порастом торзионног момента зредо  $M_t^T$  почиње формирање пластичне области по целој периферији попречног пресека тако да се у неком пресеку добија еластично зредо полуокреника  $\rho$  и пластична област у облику кружног пресека

$$\text{Оде је } \begin{cases} \frac{\tau_t}{I_0} r & 0 \leq r \leq \rho \\ \tau_t & \rho \leq r \leq R \end{cases}$$

$$\text{Из равнотеже торзионних момента: } M_t(\rho) = \int \tau \cdot r dF = \int_0^\rho \frac{\tau_t}{I_0} r \cdot r \cdot 2\pi r dr + \int_\rho^R \tau_t r \cdot 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow M_t(\rho) = \frac{2 \tau_t \pi}{I_0} \int_0^\rho r^3 dr + \tau_t \cdot 2\pi \int_\rho^R r^2 dr = \frac{2 \tau_t \pi}{I_0} \frac{\rho^4}{4} + \tau_t \cdot 2\pi \left[ \frac{R^3}{3} - \frac{\rho^3}{3} \right]$$

$$M_t(\rho) = \frac{1}{6} \pi R^3 \tau_t \left[ 4 - \left( \frac{\rho}{R} \right)^3 \right]$$

- Слика (Д) Крај се пластификација проширу на читав попречни пресек тј када наступи тотална пластификација попречног пресека, зреду зду дао покривање. То је гранично стање коме одговара ГРАНИЧНИ МОМЕНТ ТОРЗИЈЕ  $M_t^*$  који се добија стављајући  $\rho = 0 \Rightarrow$

$$M_t^* = \frac{1}{6} \pi R^3 \tau_t \left[ 4 \right] = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_t = W_t^* \tau_t \text{ где је } W_t^* = \frac{2}{3} \pi R^3 \text{ ПЛАСТИЧНИ ОТПОРНИ МОМЕНТ ПРИ ТОРЗИЈИ.}$$

- Количник  $\frac{M_t^*}{M_t^T}$  зависи само од облика попречног пресека, и овај количник можемо схватити као меру за зредосталу покривање попречног пресека при торзији.

$$\text{Дакле } \frac{M_t^*}{M_t^T} = \frac{W_t^* \tau_t}{W_t \tau_t} = \beta_t \text{ - коефицијент облика ... коз кружног попречног пресека } \beta_t = 1.33$$

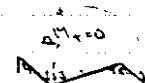
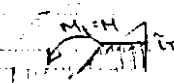
Можемо тако и обичу зредични момент торзије  $M_t^*$  добити и аналогично са чистом торзијом у еластичном домену:  $M_t^* = 2 \int \phi^*(y, z) dF$  где је  $\phi^*(y, z)$  функција напона у пластичном домену. Још је величина  $\phi^*$  кружни напон на зреду тачке на зреду тангенте на зреду ( $\phi^*$ ) у праву нормале на линију напона у посматраној тачки у пластичном домену тај напон мора бити  $\tau_t$  па имајући то у виду можемо писати  $\phi^*(y, z) = \tau_t \cdot \phi_1^*(y, z)$  где је  $\phi_1^*$  таква да је угао између тангенте на зреду и нормале пресека је  $45^\circ$ .

$$M_t^* = W_t^* \tau_t \text{ где је } W_t^* = 2 \int \phi_1^*(y, z) dF = 2 V_1 \text{ где је } V_1 \text{ запремина тела које покрива } \phi_1^* \text{ одређивања зредом на равни попречног пресека.}$$

### ЗАОСТАЛИ НАПОНИ

Претпоставимо да је зреду кружног попречног пресека изложена торзијом моментом торзије  $M_t = M$  (где  $M_t^T < M < M_t^*$ ) и да је затим одвијено растерећење зреде за тај момент  $M$ . Растерећење се одвија еластично, еластични део зреде враћа се, а пластични део улази у торзије. Остје као зредна деформација. Осим тога, у зреду су у растерећеном стању присутни и заостали (резидуални) напони. При поновном оптерећењу зреде заостали напони у зреду сабирају се са напонима од новог оптерећења.

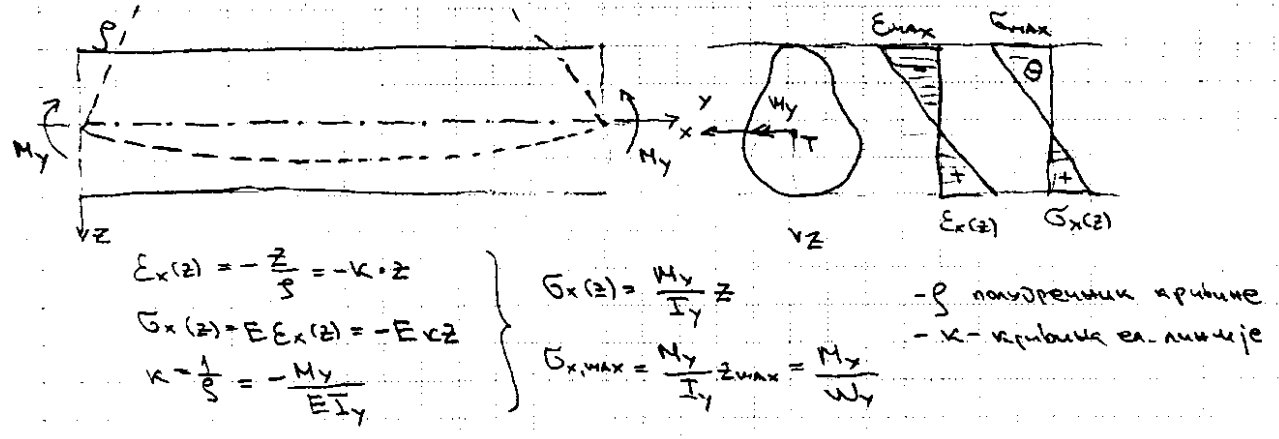
Како последица тога долази до промене покривања  $M_t$



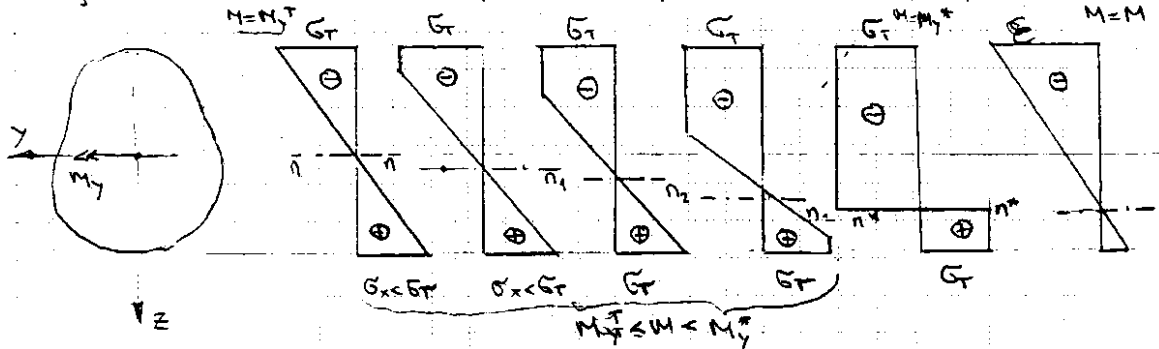
# \* ЭЛАСТОПЛАСТИЧНО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ

• чисто право-еластично савијање греде

претпоставимо морамо да се бодимо еластично деформисане греде изложене чистој брзој савијању око главне осе  $y$ .



Са порастом момента  $M_y$  расте и максималан нормални напон, али највише до границе течења  $\sigma_T$ . Момент савијања  $M_y^T$  при коме почиње пластична деформација покривача попречног пресека греде назива се момент савијања на прагу течења. ...  $M_y^T = W_y \cdot \sigma_T$



Како што видимо са дијаграмом, неутрална оса  $\eta-\eta$  у еластичном домену пролази кроз тежиште  $T$  попречног пресека, а у домену еласто-пластичних деформација она се више не доклађа са тежишном осом, већ се помера са ширењем пластичних зона. При томе релација  $\epsilon_x(z) = -\frac{z}{s}$  тј. линеарна веза  $\epsilon_x$  и  $z$  остаје у ватности и у домену еласто-пластичних деформација.

У граничном случају кад је читав попречни пресек пластично деформисан неутрална оса  $\eta^*-\eta^*$  се поклапа са симетричном попречног пресека, тј. дели попречни пресек на два дела једнаких површина. Ово следи непосредно из услова за чисто савијање за је  $N=0$  ... па је  $N_1 = \sigma_T F_1, N_2 = \sigma_T F_2, N = N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

Из услова равнотеже момента око  $\eta^*-\eta^*$  осе добијемо вредност граничног момента савијања.

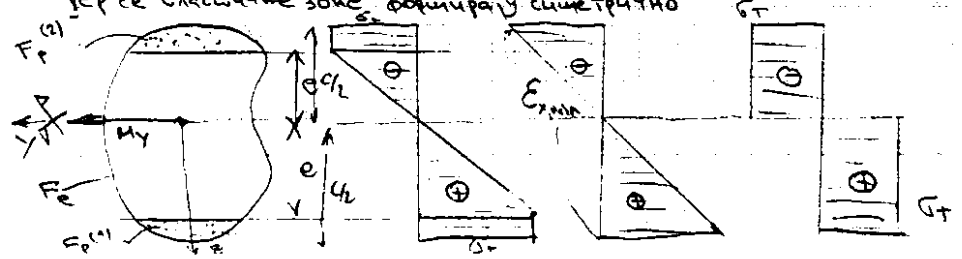
$$M_y^* = \int_F \sigma_x \cdot z \cdot dF = (F_1 d_1 + F_2 d_2) \sigma_T = (S_1^* + S_2^*) \sigma_T = \frac{1}{2} F d \sigma_T$$

где су  $S_1^*$  и  $S_2^*$  статички momenti површина  $F_1$  и  $F_2$  у односу на неутралну осу  $\eta^*-\eta^*$   
 $d = d_1 + d_2$  растојање између тежишта зорке и доње површине

$$W_y^* = S_1^* + S_2^* = F_1 d_1 + F_2 d_2 = \frac{1}{2} F d \text{ пластични отпорни момент}$$

• координате облика попречног пресека при савијању  $f_y = \frac{W_y^*}{W_y}$

Ако је  $y$  оса симетрије пресека  $\rightarrow$  неутрална оса се поклапа са тежишном осом јер се еластичне зоне формирају симетрично



све је симетрично

$$\sigma_x \begin{cases} -\sigma_T & -\frac{c}{2} \leq z \leq -e \\ \frac{\sigma_T}{e} z & -e \leq z \leq e \\ \sigma_T & e \leq z \leq \frac{c}{2} \end{cases}$$

us. uslova ravnoteze momenta oko y ose dobijamo

$$M_y = \int_F \sigma_x \cdot z \, dF = \frac{\sigma_T}{e} \int_{F_e} z^2 \, dF + \sigma_T \int_{F_p^{(1)}} z \, dF - \sigma_T \int_{F_p^{(2)}} z \, dF$$

$$\Rightarrow M_y(e) = \sigma_T \left( \frac{I_{y,e}}{e} + S_{y,p^{(1)}} + S_{y,p^{(2)}} \right) = (W_{y,e} + 2S_{y,p}) \sigma_T = W_{y,ef} \sigma_T$$

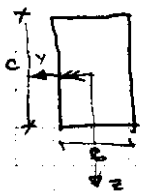
zde je  $F_e$  deo preseka koji ostaje u elastičnom stanju,  $F_p^{(1)}$  i  $F_p^{(2)}$  su delovi koji su u plastičnom stanju.  $I_{y,e} = \int_{F_e} z^2 \, dF$  je moment inercije, a  $W_{y,e} = \frac{I_{y,e}}{e}$  je elastični otporni moment elastičnog dela poprečnog preseka.  $W_{y,ef}$  - elastično-plastični otporni moment poprečnog preseka

za  $e = \frac{c}{2} \Rightarrow W_{y,ef} = W_{y,e} = W_y$  i  $M_y = M_{yT} = W_y \sigma_T$

za  $e \rightarrow 0 \Rightarrow W_{y,ef} = W_y^* \Rightarrow M_y^* = W_y^* \sigma_T$  где је  $W_y^* = 2S_y^*$  и јер је је зекле глобалној вредности статичког момента половине пресека у односу на z-осу.

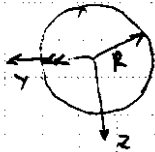
А све је много из претпоставке да не симетричан. Ако се узме  $\frac{F}{2} \cdot \frac{d}{2} = S_y^*$  онда је  $W_y^* = S_1^* + S_2^* = 2S_y^*$

Пластични отпорни момент за поједине фигуре



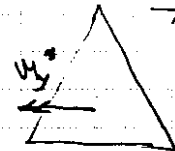
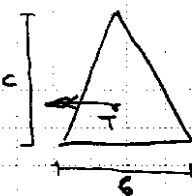
$$W_y = \frac{1}{6} b c^2$$

$$W_y^* = \frac{1}{4} b c^2$$



$$W_y = \frac{1}{4} \pi R^3$$

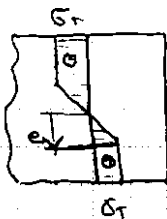
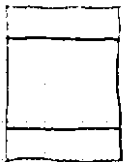
$$W_y^* = \frac{4}{3} R^3$$



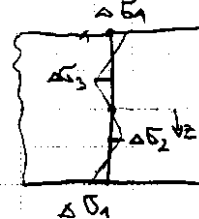
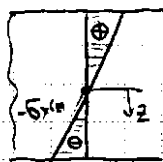
$$W_y = \frac{1}{24} b c^2$$

$$W_y^* = \frac{2\sqrt{3}}{6} b c^2$$

• ЗАО СТАНИ (РЕЗДУАЛНИ) НАПОНИ

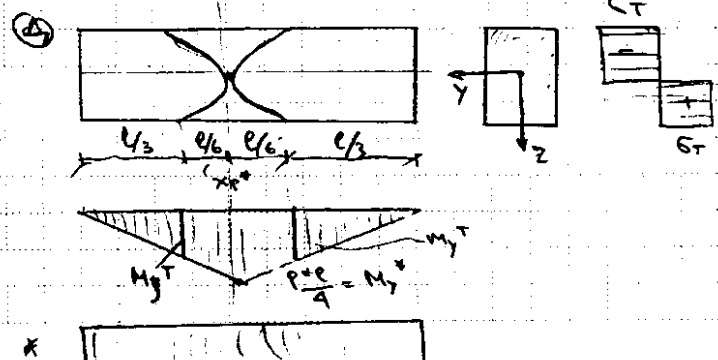
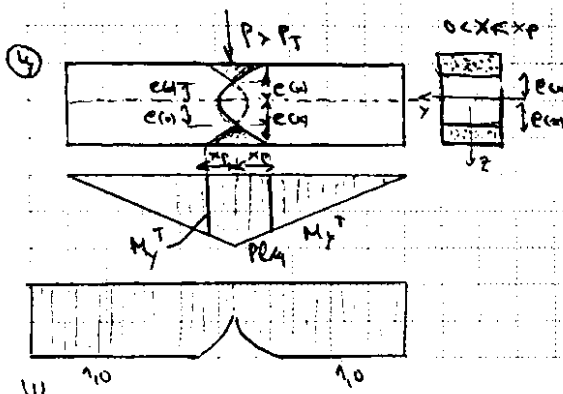
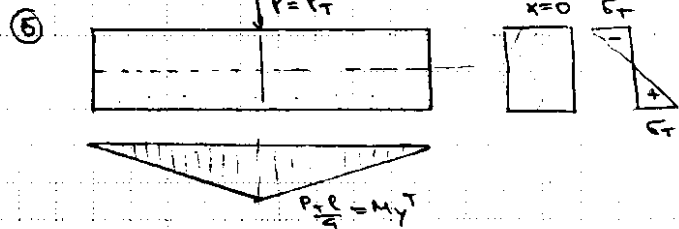
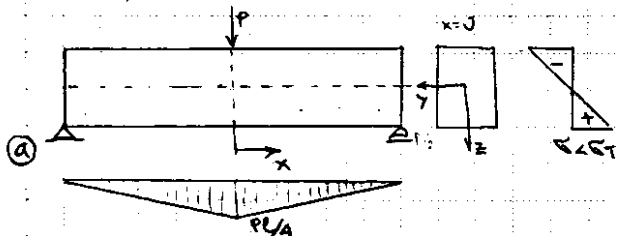


$$W_y = 4$$



• ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНО САВИЈАЊЕ ГРЕДЕ СИЛАМА

Ако је греда изложена савијању силама, поред нормалног напона  $\sigma_x$  јавља се и ситички напон  $\tau$ . Међутим ако је греда витка ( $l \gg b$  и  $l \gg h$ ) ситички напон  $\sigma_x \gg \tau$  па се утицај ситичког напона на утицај тежећа може занемарити.





Овај -на се може употребити и у случају расподелених статичких сила. У том случају  $P_i$  је резултанта расподеле силе  $P_i$ , а  $\delta \varphi_i$  је виртуелно збиранимано померање, износине тачке је резултанте.

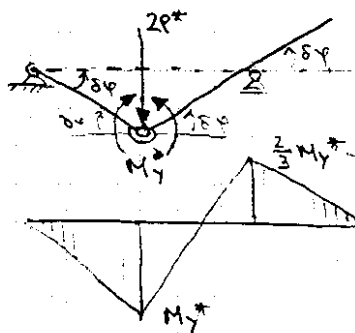
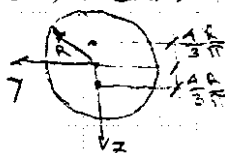
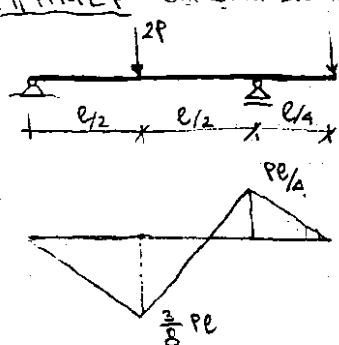
Ако су расподелене силе постане пласичним зглобовима на билине делова, резултанте се морају одредити посебно за сваки од тих делова.

Што се тиче знака, виртуелни рад спољашњих сила је позитиван ако су  $P_i$  и  $\delta \varphi_i$  истог смера, док је виртуелни рад унутрашњих сила који се акумулира у пласичним зглобовима увек позитиван.

## ГРАНИЧНА НОСИВОСТ КОД СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИХ НОСАЧА

- Код аксијално оптерећеног носача, гранично стање настаје када нормални напон досегне  $\sigma_T$
- Код торзије на брегу - када се у критичном пресеку, где је момент торзије највећи достигне  $M_T^*$
- Код равних носача оптерећених на савијање гранично стање настаје када се у пресеку где је момент савијања највећи формира пласични зглоб - тачке носач прелазу у механизам

**ПРИМЕР** Определи граничну силу носача. Дато  $l, R$  и  $\sigma_T$



тор је  $\frac{3}{8} Pl = M_T^*$   
а  $\frac{Pl}{4}$  је сак  $\frac{2}{3}$  од тога

### I НАЧИН

$$W_{y*} = \frac{4}{3} R^3$$

$$M_{y*} = \frac{1}{2} F d \sigma_T = \frac{1}{2} R^2 \pi \cdot \frac{2}{3} \frac{4R}{3\pi} \sigma_T = \frac{4}{3} R^3 \sigma_T$$

$$\frac{3}{8} Pl = \frac{4}{3} R^3 \sigma_T \rightarrow P^* = \frac{4 \cdot 8 R^3 \sigma_T}{3 \cdot 3} = \frac{32}{9} \frac{R^3}{l} \sigma_T$$

### II НАЧИН (крупнотетичко померање)

$$\sum P_i \delta \varphi_i = \sum M_{y_i}^* \delta \varphi_i$$

$$\Rightarrow 2P^* \cdot \frac{l}{2} \delta \varphi - P^* \frac{l}{4} \delta \varphi = 2M_{y*}^* \delta \varphi$$

$$\Rightarrow P = \frac{32}{9} \frac{R^3}{l} \sigma_T$$

## \* ГРАНИЧНА НОСИВОСТ КОД СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИХ

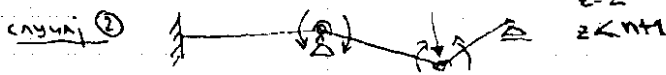
Носивост статички одређеног равног носача изложеног савијању исцртава се кад се формира само једна једини пласични зглоб.

Код статички неодређеног носача, формирање једног пласичног зглоба само резукује смањем статичке неодређености, тако да је носач још увек у стању да преноси додатно оптерећење.

Носивост носача биве исцртава када пласичним формирањем укупно  $Z$  пласичних зглобова цео носач или само део носача прелазу у механизам са бар једним степенем слободе и који се назива механизам слободе.

• Ако је носач  $n$ -пута статички неодређен, гранично стање настаје

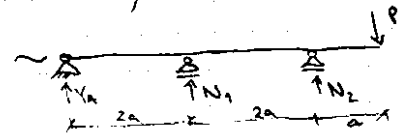
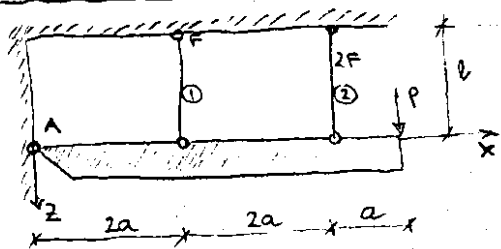
- ① формирањем  $Z = n+1$  пласичних зглобова, када носач прелазу у механизам са 1 степеном слободе
- ② формирањем  $Z < n+1$  пл. зглобова када само део носача прелазу у механизам (локални лач)
- ③ формирањем вишег броја пласичних зглобова од  $n+1$  ( $Z > n+1$ ) када носач прелазу у механизам са  $S > 1$  степени слободе



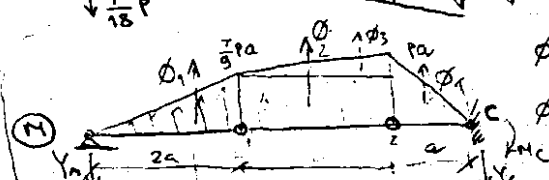
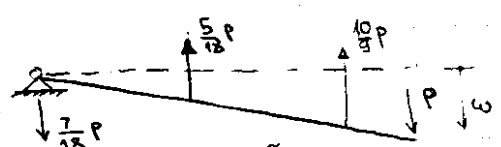
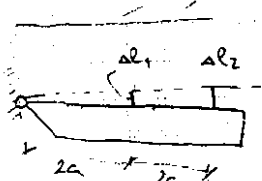
# • ДИРЕКТНА МЕТОДА

-метод се састоји у поступном повећавању интензитета оптерећења, од којег путем сукобљивања сиверва јеласичних зглодова носач или неки јорлов део прелазу у механизам са једним свеленом споде. Предност ове методе је што поред зрничног оптерећења могу се одредити и ботерава носача у току инкременталног процеса оптерећивања.

**ПРИМЕР 1** ДАТО  $E, F, l$  и  $\sigma_T$  одређи  $P^*$  а злици и заостале напоне у штабовима 1 и 2 у домену линеарних еласичних деформација



$$\begin{aligned} (1) \quad 2N_1 + 4N_2 &= 5P \\ (2) \quad \frac{2N_1 l'}{EF} &= \frac{N_2 l'}{EF \cdot 2} \Rightarrow 4N_1 = N_2 \\ \Rightarrow (1) \wedge (2) &\Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{5}{18} P \\ N_2 = \frac{10}{9} P \end{cases} \quad (A) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{3} Pa \cdot \frac{2a}{2} = \frac{7}{9} Pa^2 & \phi_3 &= \frac{2}{9} Pa \cdot \frac{2a}{2} = \frac{2}{9} Pa^2 \\ \phi_2 &= \frac{1}{3} Pa \cdot 2a = \frac{14}{9} Pa^2 & \phi_4 &= \frac{Pa \cdot a}{2} = \frac{1}{2} Pa^2 \end{aligned}$$

$$M_A = 0 = \frac{7}{9} Pa^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{14}{9} Pa^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} Pa^2 \cdot \frac{10}{3} + \frac{13}{3} a \cdot \frac{1}{2} Pa^2 = 5aY_C + M_C$$

$$M_C = aY_C + M_C = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} Pa^2$$

$$Y_C = \frac{1}{3} a \cdot \frac{7}{9} Pa^2 = \frac{7}{27} Pa^2 \Rightarrow Y_A = \frac{7}{27} Pa^2$$

$$Y_C = \sum \phi_i - \frac{7}{27} Pa^2 = \left[ \frac{7}{9} + \frac{2}{9} + \frac{14}{9} + \frac{1}{2} - \frac{7}{27} \right] Pa^2 = \left[ \frac{63}{27} + \frac{1}{2} - \frac{7}{27} \right] Pa^2 = \frac{124 + 27}{54} Pa^2 = \frac{151}{54} Pa^2$$

$$M_C = \frac{Pa^3}{6} - \frac{151}{54} Pa^3 = \frac{9 - 151}{54} Pa^3 = \frac{142}{54} Pa^3 = \frac{71}{27} Pa^3$$

УГИБ штабове јачке силе  $P$  је из пропорције  $\frac{5a}{\omega} = \frac{4a}{\frac{N_2 \cdot l}{EF \cdot 2}} \Rightarrow \omega = \frac{25}{36} \frac{Pl}{EF}$

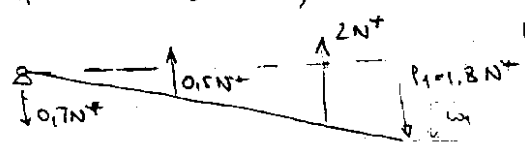
Силе у штабовима не могу прекорачити вредности  $N_1^*$  и  $N_2^*$  јер су то аксијално максималне штабови  $\Rightarrow N_1^* = F \cdot \sigma_T = N^*$   $N_2^* = 2F \sigma_T = 2N^*$

Означимо са  $P_1$  земичну силе у тренутку када долази до тоталне еласификације једног од штабов

$$\begin{aligned} 1. \quad N_1 &= N_1^* \quad \frac{5}{18} P_1^{(1)} = N^* \Rightarrow P_1^{(1)} = \frac{18}{5} N^* \\ N_2 &= N_2^* \quad \frac{10}{9} P_1^{(2)} = 2N^* \Rightarrow P_1^{(2)} = \frac{9}{5} N^* \end{aligned}$$

Од је  $P_1 = \min \{ P_1^{(1)}, P_1^{(2)} \} = \frac{9}{5} N^* = 1,8 N^*$

При томе су силе у штабовима  $N_1^{(1)} = \frac{5}{18} \cdot \frac{9}{5} N^* = \frac{1}{2} N^* = 0,5 N^*$   $N_2^{(1)} = \frac{10}{9} \cdot \frac{9}{5} N^* = 2 N^*$  А УГИБ  $\omega_1 = \frac{25}{36} \frac{9 Pl^*}{5 EF} = 1,25 \frac{N^* l}{F}$



Носач је у стању з прици јов и додату силу  $\Delta P_1$ . Пошто је штап 2 тојално еласификован приштају силе  $\Delta P$ . Штенос само штап 1 који је јов уфек еласично деформисан ( $N_1^* = 0,5 N^* < N^*$ )

Из услова равно-тепе помената  $2a \cdot 0,5 N^* = 5 \Delta P_1 \Rightarrow \Delta P_1 = 0,2 N^*$

\* ПРЕМА ТОМЕ граничне вредности силе и УГИБ су

$$P^* = P_1 + \Delta P_1 = 1,8 N^* + 0,2 N^* = 2 N^*$$

$$\omega = \omega_1 + \Delta \omega_1 = 1,25 \cdot 2 \frac{N^* l}{EF} = 2,50 \frac{N^* l}{EF}$$

приштају УГИБ  $\frac{2a}{2 N^* l / EF} = \frac{5a}{\Delta \omega} \Rightarrow \Delta \omega = \frac{5}{4} \frac{N^* l}{EF}$

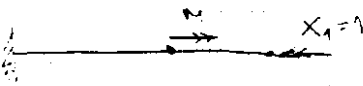
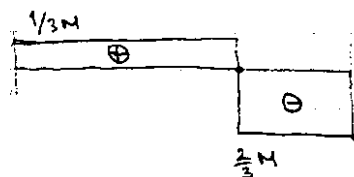
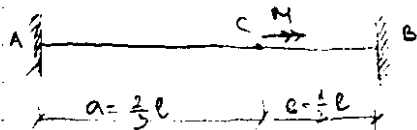
8) Ако небезбедно не ком додизања граничне силе  $P^*$  посматрајући носач, ај одберићемо та силу  $P' = P = 2N^*$  суђороме силе  $0$ , силе силе  $P$ . С обзиром  $P$  је при раскретку носач доњава линеарно, са засовање силе = утврђица и заостали утврђица добијамо:

$$N_1^c = N^* - \frac{5}{18} P' = N^* - 0,556 N^* = 0,444 N^*$$

$$N_2^T = 2N^* - \frac{10}{9} P' = 2N^* - 2,222 N^* = -2,222 N^*$$

### ПРИМЕР 2

- Одредити граничну вредност момента  $M^*$
- Одредити јаве заосталих торзионих момента у греју.

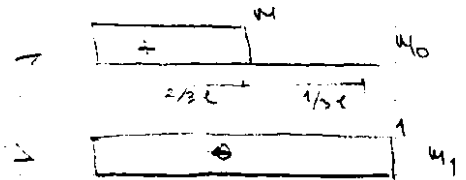


$$\delta_{11} = l \cdot 1 \cdot 1$$

$$\delta_{10} = \frac{2}{3} l \cdot M_1$$

$$\delta_{11} X_1 = -\delta_{10}$$

$$l X_1 = +\frac{2}{3} l M \Rightarrow X_1 = +\frac{2}{3} M$$



Одговор је:

$$\text{како је } \frac{2}{3} M > \frac{1}{3} M \text{ одговор } \frac{2}{3} M_1 = M^* \Rightarrow M_1 = \frac{3}{2} M^*$$

када долази до јављане класификације је према на делу СВ

$$\text{При томе је знао одржавање } \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2} M^* \frac{2}{3} l}{G I_t} = \frac{1}{3} \frac{M^* l}{G I_t} \quad \text{јер је } \varphi = \int_0^x \frac{M(x)}{G I_t} dx \quad \checkmark$$

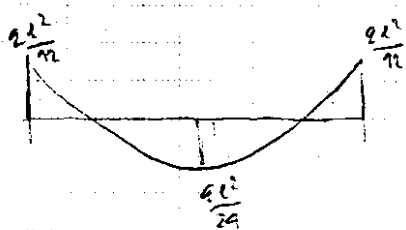
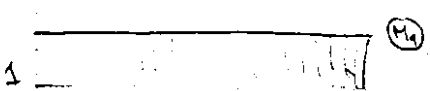
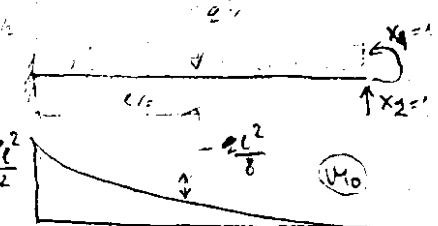
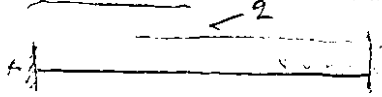
Други момент  $\Delta M$  који може да прими део АС је:

$$\frac{1}{3} M = \frac{M^*}{2} \quad \text{па је } \Delta M = \frac{1}{2} M^* \quad \text{па је догађање одржавање } \Delta \varphi = \frac{M_1 \frac{2}{3} l}{2 G I_t} = \frac{1}{3} \frac{M^* l}{G I_t}$$

Ореша томе граничне вредности момента и знају су:

$$M^* = M_1 + \Delta M = \frac{3}{2} M_1 + \frac{1}{2} M_1 = 2 M_1^* \quad \varphi^* = \varphi_1 + \Delta \varphi = \frac{2}{3} \frac{M_1^* l}{G I_t}$$

### ПРИМЕР 3



$$M_{1T} = \frac{ql^2}{12}$$

$$\Rightarrow Z_T = \frac{M_{1T} \cdot 12}{q \cdot l^2} = \frac{12 M_{1T}}{q \cdot l^2}$$

$$Z_T = \frac{12}{1,387 \cdot l^2} M_{1T}^* = 8,652 M_{1T}^*$$

Ово је интеграл одржавање  $Z_T$  на трају бечева

$$\delta_{10} = \frac{l}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{2} + l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{1}{6} ql^3$$

$$\delta_{20} = -l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} = -\frac{1}{8} ql^3$$

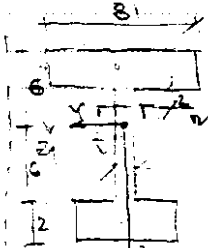
$$\delta_{11} = 1 \cdot l \cdot 1 = l \quad \delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{2}$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{8}$$

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

$$l \cdot X_1 + \frac{l^3}{8} X_2 = +\frac{1}{6} ql^3 \quad \left[ X_1 = -\frac{1}{12} q \right]$$



$$Z_t = \frac{1 \cdot 16 l^2 + 10 l^2 \cdot 7 l^2}{36 l^2}$$

$$Z_t = \frac{216 l^2}{36} = 6 l^2$$

ЕЛАСТИЧАН ДЕО

$$F = 18 \cdot 2 l + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 2 l^2 = 36 l^2$$

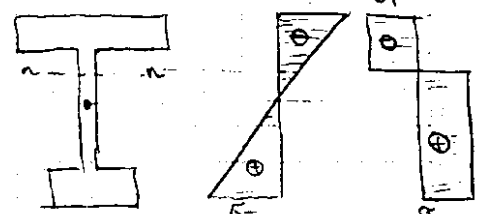
$$I_y = \frac{1}{12} [8 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^3 + 1 \cdot 10^3] l^4$$

$$+ [16 \cdot 5^2 + 10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 7^2] l^4 = 992 l^4$$

$$Z_{max} = 8 l^2 \Rightarrow W_y = \frac{I_y}{Z_{max}} = \frac{992 l^4}{8} = 124 l^3$$

ПЛАСТИЧАН ДЕО

$n-n'$  је брзина како се  $n-n'$  дисциплна покретност одређује.



$$M_{yT} = W_y \cdot \sigma_T = 124 l^3 \sigma_T$$



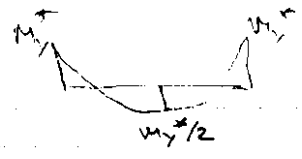
5) Директним методом одређујемо граничну вредност оптерећења  $q^*$

136

$q_1$  - јесу оптерећења при коме долази до истовременог формирања пластичних зглобова у члановима.

$$M_y^* = \frac{1}{12} q_1 l^2 \Rightarrow q_1 = \frac{12 M_y^*}{l^2}$$

при томе  $M_{y,c} = \frac{1}{24} q_1 l^2 = \frac{1}{2} M_y^*$  и  $\omega_c = \frac{1}{384} \frac{q_1 l^4}{EI_y} = \frac{1}{32} \frac{M_y^* l^2}{EI_y}$



3) додатно оптерећење  $\Delta q$  које долази у просеку преко

Дакле се у тачки С формира и други пластични зглоб пошто је

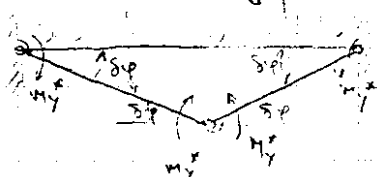
$$\frac{1}{2} M_y^* + \frac{1}{8} \Delta q l^2 = M_y^* \Rightarrow \Delta q = \frac{4 M_y^*}{l^2}$$

Овај додатни оптерећење износи  $\omega = \frac{5}{384} \frac{\Delta q l^4}{EI_y} = \frac{5}{96} \frac{M_y^* l^2}{EI_y}$

$$q^* = q_1 + \Delta q = \frac{16 M_y^*}{l^2}$$

$$\omega^* = \omega_1 + \Delta \omega = \frac{1}{12} \frac{M_y^* l^2}{EI_y}$$

6) исто што и под 5) само кинематичком методом



$$2 \cdot \left( \frac{1}{2} M_y^* \right) \cdot \left( \frac{1}{4} \delta \right) = 4 M_y^* \delta \Rightarrow q^* = \frac{16 M_y^*}{l^2}$$

4) После заосталих момената - због се при расчећу почела линеарно еластично

$$M_A^* = M_B^* = -M_y^* + \frac{1}{12} q^* l^2 = \frac{1}{3} M_y^*$$

## \* ТЕОРЕМЕ ПЛАСТИЧНЕ АНАЛИЗЕ

### УВОДНЕ ПРЕПОСЛАВКЕ

- У попречном пресеку носача због се формира пластични зглоб, гранични моменти  $M_y^*$  који је константан у току деформације.
- Утицај нормалних и трансверзалних сила на величине граничних момената у пл. зглобовима се занемарује
- услови равнотеже се посматрају на недеформисаној конфигурацији носача
- Оптерећење је пропорционално фактору оптерећења  $\lambda$  тако да је  $Q_i = \lambda P_i$  ( $i=1,2,\dots,k$ ) где је  $P_i$  интезит оптерећења који се примењује на јединичну вредност фактора оптерећења ( $\lambda=1$ )

Задатак пластичне анализе је одређивање граничног фактора оптерећења  $\lambda^*$  при коме долази до лоп. расподела момената сабијања која се односи на одређене граничне равнотеже (лоша) носача мора да буде истовремено статички допустива, кинематички допустива и сигурна.

### • СТАТИЧКА ТЕОРЕМА

Уколико скупу оптерећења  $\lambda P_i$  ( $i=1,\dots,k$ ) одговара статички допустива и сигурна расподела момената сабијања, тада је гранични фактор оптерећења  $\lambda$  мања или је једнака граничној вредности  $\lambda^*$  тј.  $\lambda \leq \lambda^*$

Значи  $\lambda$  гранични фактор оптерећења  $\lambda^*$  или гранични фактор оптерећења је највећа вредност фактора оптерећења  $\lambda$  према статичкој теорему  $\lambda^* = \lambda_{\max}$

### • КИНЕМАТИЧКА ТЕОРЕМА

Вредност фактора оптерећења  $\lambda$  која одговара произвољном могућем механизму лоша је или једнака граничној вредности  $\lambda^*$  тј.  $\lambda \geq \lambda^*$

Дакле  $\lambda$  произвољна вредност граничног фактора оптерећења  $\lambda^*$  или гранични фактор оптерећења је најмања вредност фактора оптерећења  $\lambda$  према кинематичкој теорему тј.  $\lambda^* = \lambda_{\min}$

### • КИНЕМАТИЧКА ДОПУСТИВА

- фактор оптерећења  $\lambda$  који одговара произвољном могућем механизму лоша је или једнака граничној вредности  $\lambda^*$  тј.  $\lambda \geq \lambda^*$
- Уколико је расподела момената која за вредност момената сабијања није једнака попречном пресеку не одговара једном граничном моменту  $M_y^*$ , тада је та расподела **СИГУРНА**
- СТАТИЧКА ДОПУСТИВА је расподела момената која одговара условима равнотеже између изнела спољних и унутрашњих сила

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be carefully documented to ensure the integrity of the financial data. This includes recording dates, amounts, and the nature of the transactions.

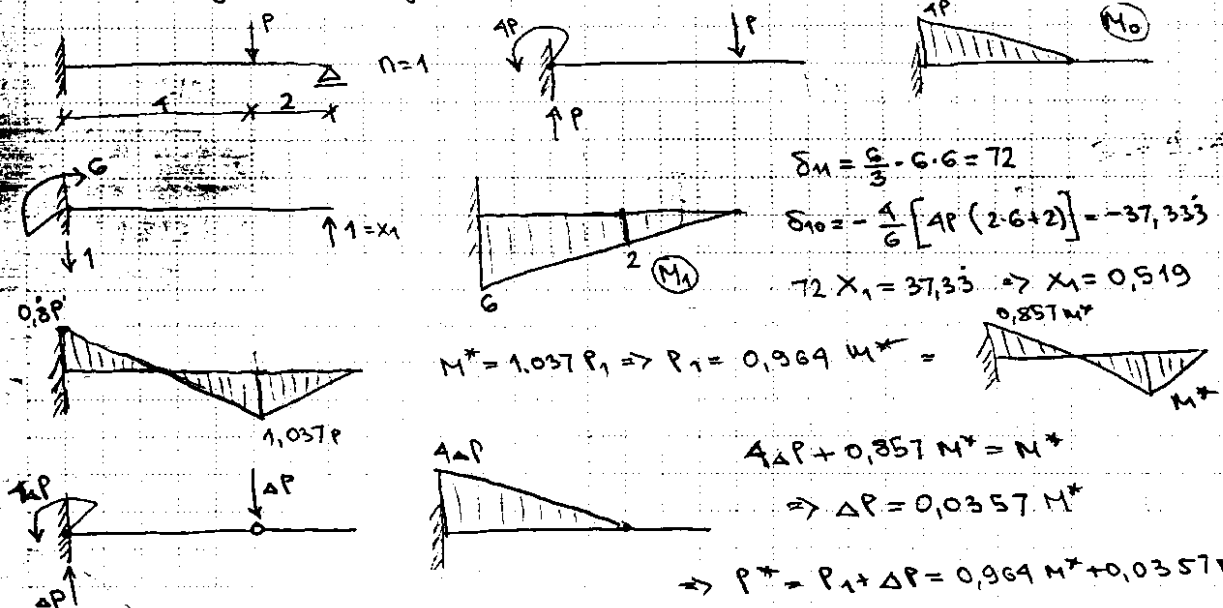
The second part of the document provides a detailed breakdown of the company's revenue for the quarter. It lists various sources of income, such as sales of goods and services, and provides a clear comparison between the actual results and the budgeted figures. This analysis helps in identifying areas of strength and areas that need improvement.

The third part of the document focuses on the company's expenses. It categorizes them into fixed and variable costs, allowing for a more precise understanding of the cost structure. The document also highlights the impact of these expenses on the overall profitability of the business.

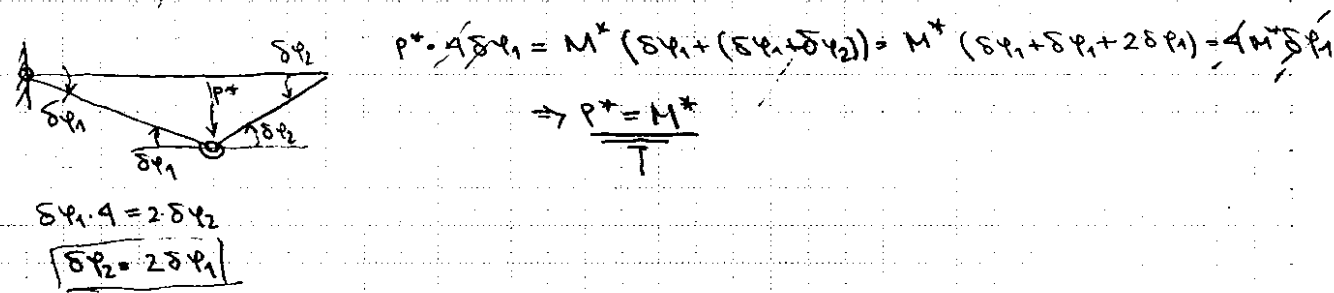
The fourth part of the document discusses the company's financial position at the end of the period. It includes a summary of the balance sheet, showing the company's assets, liabilities, and equity. This provides a snapshot of the company's financial health and its ability to meet its obligations.

The fifth part of the document provides a conclusion and recommendations for the future. It summarizes the key findings from the financial analysis and offers suggestions for how the company can improve its financial performance in the coming period. This includes recommendations related to cost management, revenue growth, and overall financial strategy.

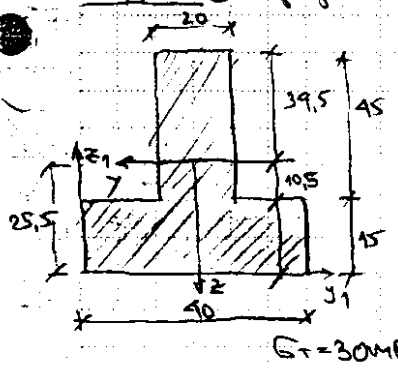
**ЗАДАЧА ①** Определить величину критической силы  $P^*$ , функции момента  $M^*$ , кривую, как по корак и добираться в величину проверить кинематическим способом.



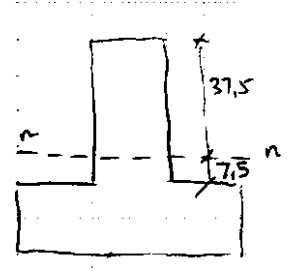
б) проверка кинематическим способом



**ЗАДАЧА ②** Определить величину граничного момента  $M^*$  из условия его горизонтальной осе

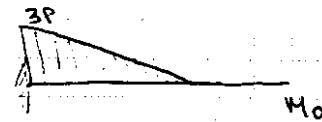
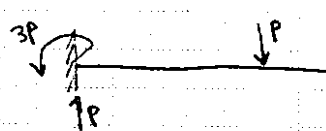
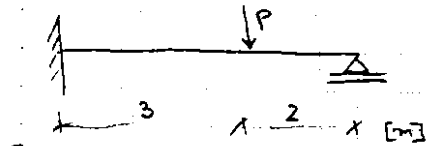


$F = 40 \cdot 15 + 20 \cdot 45 = 600 + 900 = 1500 \text{ см}^2$   
 $F/2 = 750 \text{ см}^2$   
 $Z_T = \frac{600 \cdot 7.5 + 900 \cdot 37.5}{1500} = 25.5 \text{ см}$   
 $I_y = \frac{1}{12} [40 \cdot 15^3 + 20 \cdot 45^3] + 600 \cdot 18^2 + 900 \cdot 12^2 = 487125 \text{ см}^4$   
Вычисления  
 $750 = 600 + x \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{150}{20} = 7.5$



$S_y^{* \text{ top}} = \frac{20 \cdot 37.5 \cdot 37.5}{2} = 14062.5 \text{ см}^3$   
 $S_y^{* \text{ base}} = \frac{20 \cdot 7.5^2}{2} + 600 \cdot 15 = 9562.5 \text{ см}^3$   
 $W^* = S_y^{* \text{ top}} + S_y^{* \text{ base}} = 23625 \text{ см}^3$   
 $M^* = 23625 \cdot 30 = 708.75 \text{ кНм}$

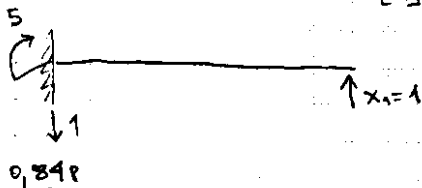
**ЗАДАЧА 1** Определить критическую силу  $P^*$  и функцию граничного момента  $M^*$  методом координат по координате  $x$  и добить кривую верховой проверки кинематическим методом.



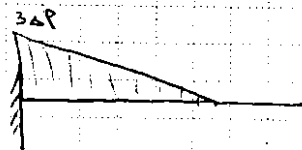
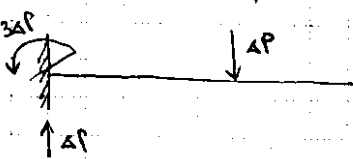
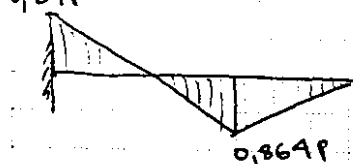
$$\delta M = \frac{5}{3} \cdot 5 \cdot 5 = 41,6$$

$$\delta M_0 = \frac{3}{6} [3P(2,5+2)] = -18P$$

$$41,6 X_1 = 18P \Rightarrow X_1 = 0,432$$

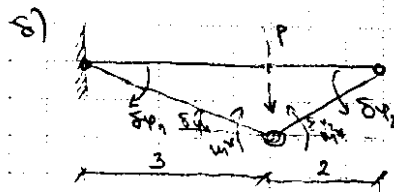


$$0,864P_1 = M^* \Rightarrow P_1 = 1,1574 M^*$$



$$3\Delta P + 0,972 M^* = M^* \Rightarrow \Delta P = 0,009259 M^*$$

$$P^* = P_1 + \Delta P = 1,1666 M^* \approx 1,17 M^*$$



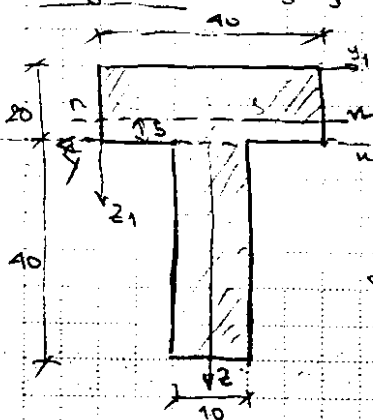
$$P^* \cdot 2 \cdot \delta \varphi_2 = M^* \cdot (\delta \varphi_1 + (\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2)) \Rightarrow 3P^* = 3,5 M^*$$

$$3\delta \varphi_1 = 2\delta \varphi_2$$

$$\Rightarrow \delta \varphi_2 = \frac{3}{2} \delta \varphi_1 \checkmark$$

$$P^* = \frac{3,5}{3} M^* = 1,1666 M^*$$

**ЗАДАЧА 2** Определить верховый критический момент  $M^*$  за сдвиганием горизонтальной оси



$$F = 40 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 800 + 100 = 900 \text{ cm}^2$$

$$F/2 = 450 \text{ cm}^2$$

$$Z_T = \frac{800 \cdot 10 + 100 \cdot 40}{900} = 20 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{1}{12} [40 \cdot 20^3 + 10 \cdot 40^3] + 800 \cdot 10^2 + 100 \cdot 20^2 = 320000 \text{ cm}^4$$

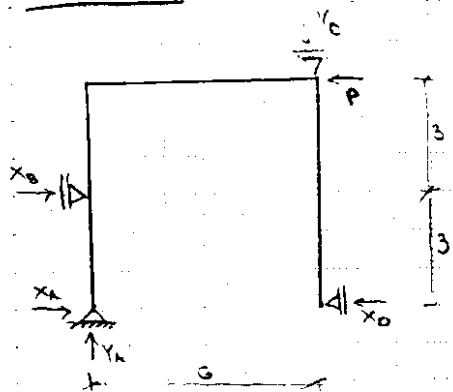
$$S_{y, \text{flange}} = 40 \cdot 15 \cdot 7,5 = 4500 \text{ cm}^3$$

$$S_{y, \text{web}} = 100 \cdot 25 + 5 \cdot 40 \cdot 25 = 10500 \text{ cm}^3$$

$$W_y^* = S_{y, \text{flange}} + S_{y, \text{web}} = 15000 \text{ cm}^3$$

$$(G_T = 30 \text{ MPa})$$

$$M^* = W_y^* \cdot G_T = 15000 \cdot 30 = 450 \text{ kNm}$$



$$\hat{M}_A = 3X_B + 6Y_C - 6P = 0$$

$$3X_B + 6Y_A = 6P$$

сп. неопределенных 5

$$\hat{M}_B = -6P + 3X_B + 6Y_A = 0$$

$$3X_B + 6Y_A = 6P$$

$\Rightarrow$  ст. нес. ж-на 3

$$\sum Y = Y_A = Y_C$$

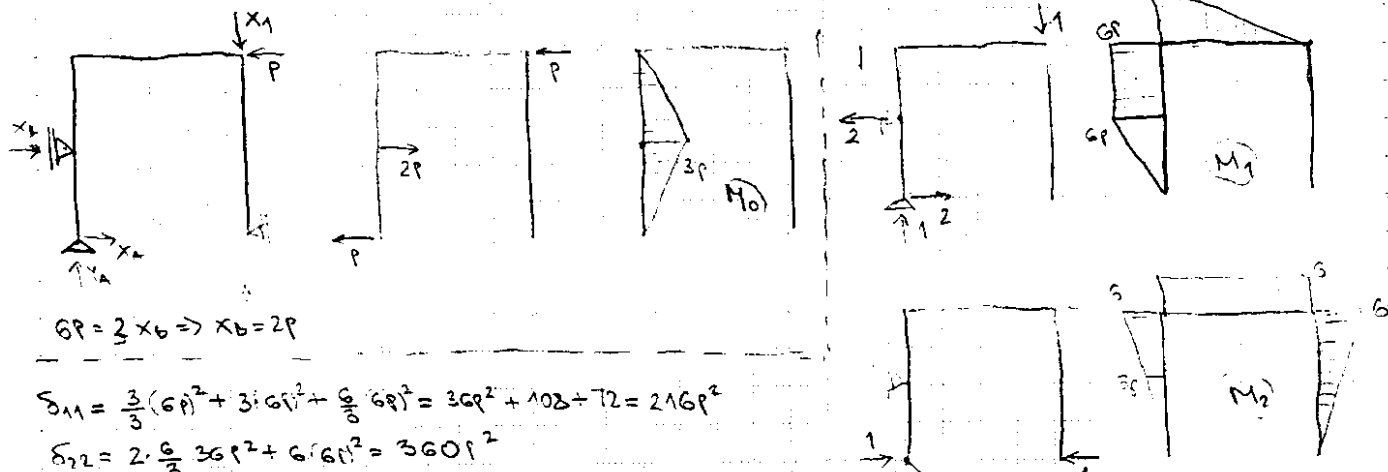
$$Y_A = Y_C$$

$$\sum X = X_A + X_B - P - X_D = 0$$

$$X_A + X_B - P - X_D = 0$$

$$\boxed{n = 5 - 3 = 2}$$

основная система



$$6P = 3X_B \Rightarrow X_B = 2P$$

$$\delta_{11} = \frac{3}{5}(6P)^2 + 3(6P)^2 + \frac{6}{5}(6P)^2 = 36P^2 + 108 + 72 = 216P^2$$

$$\delta_{12} = 2 \cdot \frac{6}{5} 36P^2 + 6(6P)^2 = 360P^2$$

$$\delta_{10} = -\frac{3}{5} 3P \cdot 6P - \frac{3}{2} 3P \cdot 6P = -45P^2$$

$$\delta_{20} = \frac{3}{5}(3P)^2 - \frac{3}{5} 3P(6P + 6P) = -27P^2$$

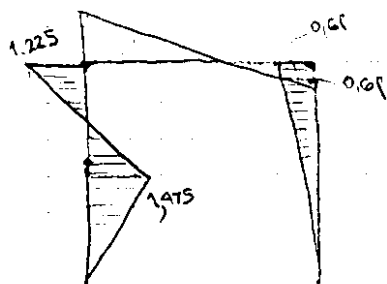
$$\delta_{22} = \frac{6}{5} 36P^2 + \frac{3}{5} 6P \cdot 3P + \frac{3}{5} [6(2 \cdot 6 + 3P) + 6P(6P + 6P)] = 108P^2 + 18P^2 + 61P^2 = 207P^2$$

$$216X_1 + 207X_2 = 45 \Rightarrow X_1 = \frac{45 - 207X_2}{216} \Rightarrow 207 \cdot \frac{(45 - 207X_2)}{216} + 360X_2 = 27$$

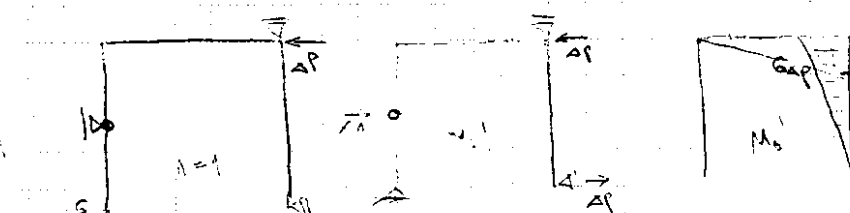
$$207X_2 + 360X_2 = 27$$

$$\Rightarrow 43,125 - 198,915X_2 + 360X_2 = 27$$

$$\Rightarrow X_2 = -\frac{16,125}{161,025} = -0,09977P \Rightarrow X_1 = 0,304P$$



$$M_{\max} M = M^* = 1,475 P_1 \Rightarrow P_1 = 0,677 M^*$$



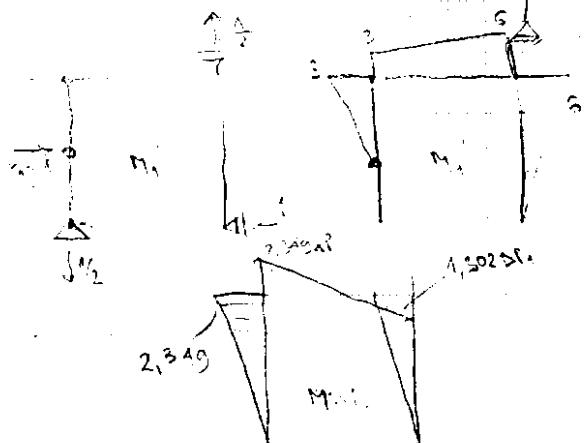
$$\delta_{11} = \frac{3}{5} \cdot 3^2 + \frac{3}{5} [3^2 + 18 + 36] + \frac{6}{5} \cdot 36 = 207$$

$$\delta_{10} = -\frac{6}{5} 3 \cdot 6P - \frac{6}{5} [6AP \cdot (2 \cdot 6 + 3)] = -162$$

$$207X_1 = 162 \Rightarrow X_1 = 0,783P$$

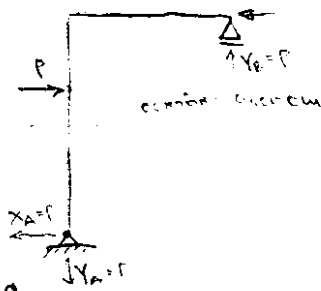
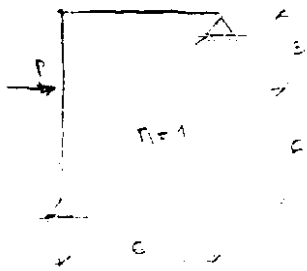
$$0,677 \cdot 0,783 M^* + 3,35 \Delta f_1 = M^* \Rightarrow \Delta f_1 = 0,073 M^*$$

$$\Rightarrow P^* = 0,677 M^* + 0,073 M^* = 0,75 M^*$$

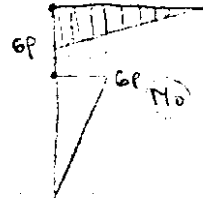


## ЗАДАЧА

- а) Определить значения, в том числе параметра деформации  $P^*$  (в кН) и  $\sigma$ ,  $\mu$ ).
- б) Определить  $M^*$  за данным значением  $P^*$ .



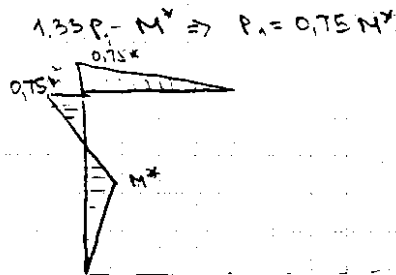
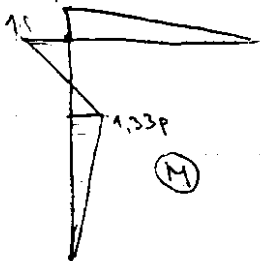
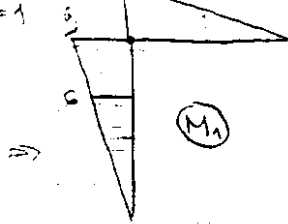
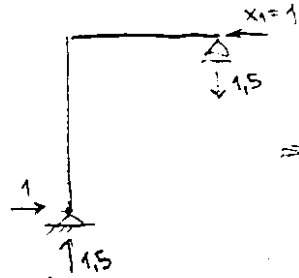
$$6P = 6Y_B \Rightarrow Y_B = P \Rightarrow Y_A = P \text{ и } X_A = P$$



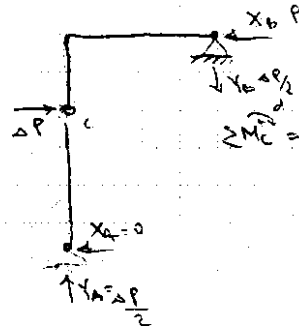
$$EI \delta_{11} = \frac{9}{3} \cdot 3^2 + \frac{6}{3} \cdot 3^2 = 243 + 162 = 405$$

$$EI \delta_{10} = -\frac{6}{3} \cdot 9 \cdot 6P - \frac{3}{6} [6P(2 \cdot 6 + 9) + 6P(2 \cdot 9 + 6)] + \frac{6}{3} \cdot 6P \cdot 6 = -108P - 3P[45] - 72P = -315P$$

$$405 X_1 = 315P \Rightarrow X_1 = 0,77P$$



$$1,33P - M^* \Rightarrow P_1 = 0,75M^*$$



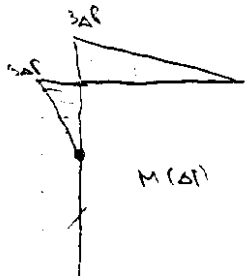
$$\sum M_C = 6Y_B = 3X_B \Rightarrow X_B = 2Y_B$$

$$X_A = 0$$

$$X_B = \Delta P = 2Y_B \Rightarrow Y_B = \frac{\Delta P}{2}$$

$$Y_A = \frac{\Delta P}{2}$$

$$P^* = P_1 + \Delta P = 0,75M^* + 0,0833M^* = 0,833M^*$$



$$3\Delta P + 0,75M^* = M^*$$

$$3\Delta P_1 = 0,25M^*$$

$$\Delta P_1 = \frac{0,25M^*}{3} = 0,0833M^*$$

$$F = 18 \cdot 30 - 12 \cdot 18 = 324 \text{ cm}^2$$

$$Z_1 = \frac{18 \cdot 30 \cdot 15 - 12 \cdot 18 \cdot 13}{324} = 16,5 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{1}{12} [18 \cdot 30^3 - 12 \cdot 18^3] + 18 \cdot 30 \cdot (1,933)^2 - 12 \cdot 18 \cdot (3,333)^2 = 34668 + 960 - 2400 = 33228 \text{ cm}^4$$

$$F/2 = 162 \text{ cm}^2 \quad 8 \cdot 18 + X \cdot 6 = 162 \Rightarrow X = 3$$

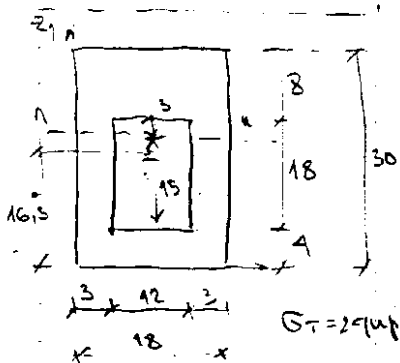
$$S_y^{*mc} = 18 \cdot 8 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 1035 \text{ cm}^3$$

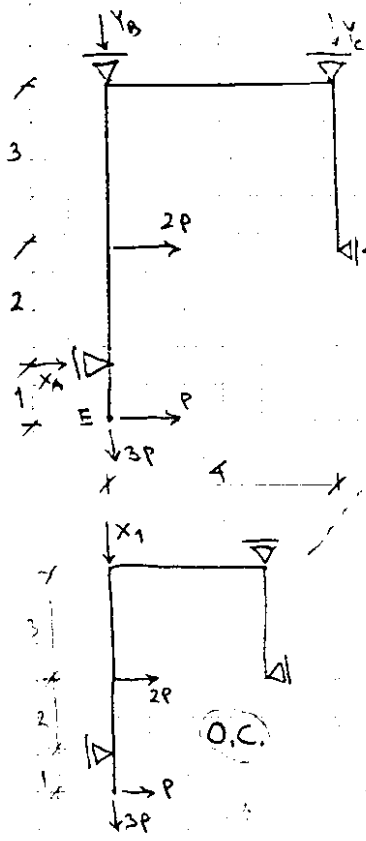
$$S_y^{*dole} = 18 \cdot 4 \cdot 17 + 6 \cdot 15 \cdot 7,5 = 1224 + 675 = 1899 \text{ cm}^3$$

$$W = S_y^{*dole} + S_y^{*mc} = 1035 + 1855 = 2934 \text{ cm}^3$$

$$M^* = W \cdot \sigma = 2934 \cdot 24 = 70,416 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow P^* = 0,833M^* = 58,678 \text{ kN}$$

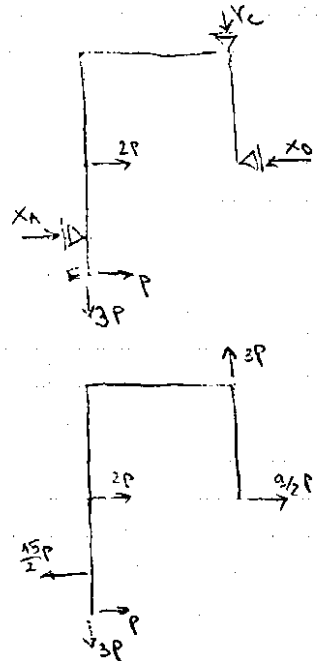




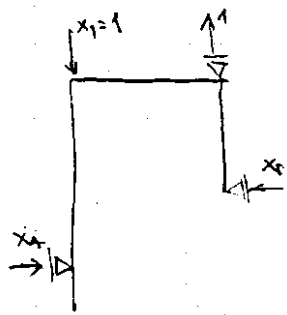
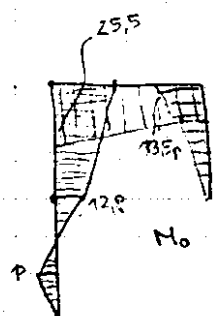
$$\begin{aligned} (1) \sum Y = 0 & \quad 3P + Y_B + Y_C = 0 \\ (2) \sum X = 0 & \quad 2P + X_A = X_D \\ (3) \sum M_E = 0 & \quad X_A \cdot 1 + 3 \cdot 2P + 4 \cdot Y_C - 3X_D = 0 \\ (4) \sum M_D = 0 & \quad -Y_B \cdot 4 - 2X_A - 3P - 3P \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

независиме 3-е равнотеже на је систем статички одређен  
 $n = 4 - 3 = 1$

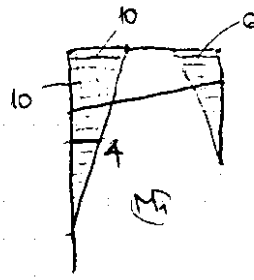
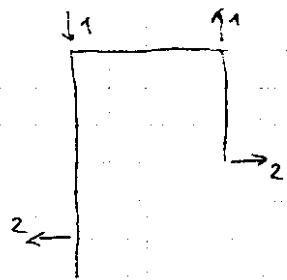
Можемо оформити основни систем



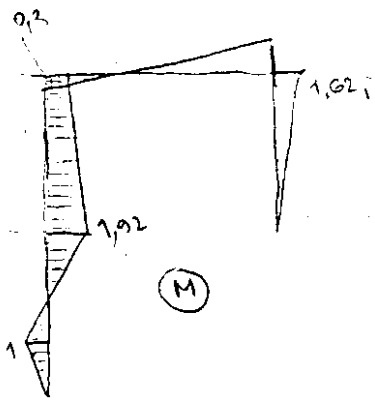
$$\begin{aligned} \sum Y = 0 & \quad 3P = -Y_C \\ \sum X = 0 & \quad X_A + 2P + P = X_D \\ \sum M_E = 0 & \quad X_A + 3 \cdot 2P + 4(-3P) - 3X_D = 0 \\ & \quad X_A + 6P - 12P - 3X_D - 9P = 0 \\ & \quad -2X_A - 15P = 0 \Rightarrow X_A = -\frac{15}{2}P \\ X_D = -\frac{15}{2}P + 3P & = -\frac{15}{2}P + \frac{6}{2}P = -\frac{9}{2}P \end{aligned}$$



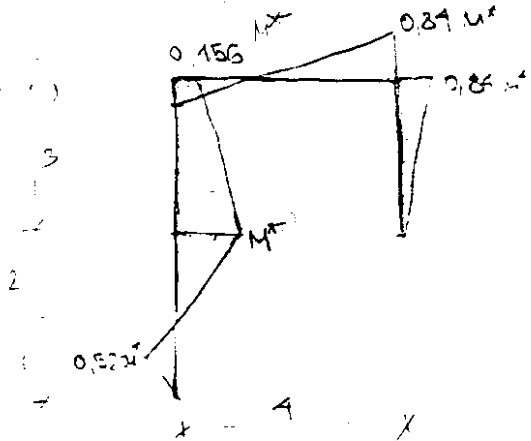
$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad Y_A = X_D \\ \sum M_E = 0 & \quad X_A - 4 - 3X_D = 0 \\ & \quad -X_A = X_D = -2 \end{aligned}$$

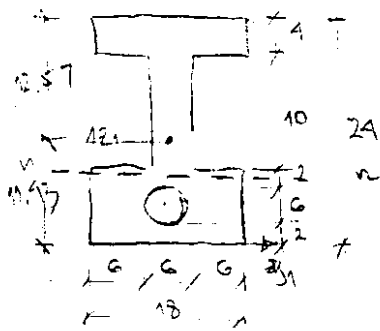


$$\begin{aligned} EI \delta_{11} &= \frac{5}{3} (10P)^2 + \frac{3}{3} 6P^2 + \frac{4}{3} [10^2 + 10 \cdot 6 + 6^2] = 166.67P^2 + 36P^2 + 261.33P^2 = 464P^2 \\ EI \delta_{10} &= \frac{3}{3} 13.5P \cdot 6P + \frac{4}{6} [10(2 \cdot 25.5 + 13.5) + 6(25.5 + 2 \cdot 13.5)] + \frac{3}{6} [10(25.5 \cdot 2 + 12P) + 4(25.5 + 12 \cdot 2P)] \\ &+ \frac{2}{6} [4(2 \cdot 12P - P) + 0(\dots)] = 81 + \frac{4}{6} [645 + 315] + \frac{3}{6} [630 + 198] + \frac{2}{6} [82] = \\ &= 81 + 690 + 414 + 30.66 = 1165.6 \\ \delta_{11} X_1 + \delta_{10} &= 0 \Rightarrow X_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{-1165.6}{464} = -2.52 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X_1 &= -2.52 = -2.52 \cdot 1 \\ 1 &= 0.521 M^* \\ 0.3 &= 0.156 M^* \\ 1.62 &= 0.893 M^* \end{aligned}$$





$$F = 4 \cdot 18 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 18 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \pi = 72 + 60 + 180 - 28,274 = 283,726$$

$$Z_T = \frac{4 \cdot 18 \cdot 22 + 10 \cdot 6 \cdot 15 + 10 \cdot 18 \cdot 5 - 28,274 \cdot 5}{283,726} = \frac{3242,63}{283,726} = 11,43$$

$$I_{ys} = \frac{1}{12} [15 \cdot 4^3 + 18 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3] - \frac{1}{4} \pi \cdot 3^4 = 2036 - 63,617 = 2032,383$$

$$I_{ys} = 72 \cdot 10,57^2 + 60 \cdot 3,57^2 + 180 \cdot 6,43^2 - 28,274 \cdot 6,43^2 = 15081,98$$

$$I_y = I_{ys} + I_{ys} = 17114,66 \text{ cm}^4$$

$$W_{yt} = \frac{I_y}{Z_{max}} = \frac{17114,66}{12,57} = 1361,5$$

$$M_T = W_y \cdot \sigma_T = 1361,52 \cdot 10^6 \cdot 26 \cdot 10^6 = 3540 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = M^* - 1,02 P \Rightarrow P = 0,52 M^* \Rightarrow$$

$$P_1^T = 0,52 \cdot 35,92 \text{ kNm} = 18,61 \text{ kN}$$

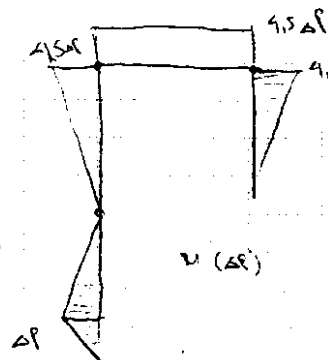
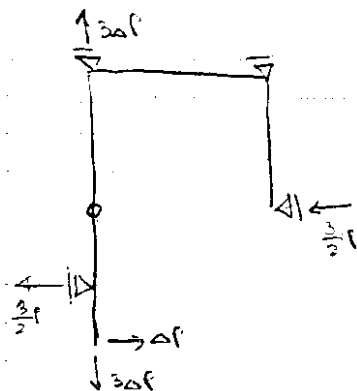
$$\text{Будем считать } F = 283,726$$

$$4 \cdot 18 + 10 \cdot 6 + x \cdot 18 = 191,86 \Rightarrow x = 0,548$$

$$F/2 = 141,86$$

$$S_{pe} = 4 \cdot 18 \cdot 12,548 + 60 \cdot 5,48 + 18 \cdot \frac{0,548^2}{2} + \frac{(10 - 0,548)^2}{2} \cdot 18 - 3^2 \pi \cdot 1,452 = 1239,04 + 309,06 + 125,877 = 2168,98$$

$$M^* = S_{pe} \cdot \sigma_T = 56,393 \quad P_1^* = 0,52 \cdot 56,393 = 29,324$$



$$(I) -0,156 M^* + 1,5 \Delta P = M^*$$

$$\Delta P = 0,257 M^* = 11,493$$

$$P^* = P_1^* + \Delta P = 29,324 + 11,493 = 40,817 \text{ kN}$$

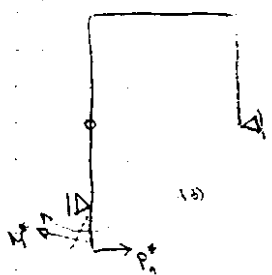
$$(II) -0,84 M^* + 1,5 \Delta P = M^*$$

$$\Delta P = 0,0555 \cdot 56,393 = 2,0 \text{ kN}$$

$$P = P_1^* + \Delta P = 29,324 + 2,0 = 31,324 \text{ kN}$$

б) Определим значения сил, т.е.  $P^*$  кинематическим методом.

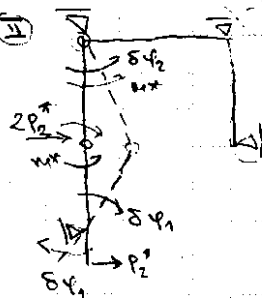
(I)



$$P_1^* \cdot \delta y_1 = M^* \cdot 1 \cdot \delta y$$

$$P_1^* = M^*$$

(II)



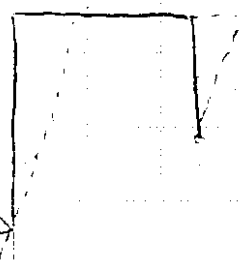
$$2P_2^* \cdot 2\delta y_1 - P_2^* \cdot \delta y_1 =$$

$$= 2M^* \delta y_2 + M^* \delta y_1$$

$$2\delta y_1 = 3\delta y_2 \Rightarrow \delta y_2 = \frac{2}{3} \delta y_1$$

$$P_2 = 0,778 M^*$$

(III)



сложим на (III)

$$2P_3^* \cdot 2\delta y_1 - P_3^* \delta y_1 =$$

$$P_3^* = M^* \delta y_1 + M^* \delta y_3$$

$$4 - 5y_1 + 3y_3 = \delta \quad P^* = 0,883 M^*$$

$$P^* = \min \{P_1^*, P_2^*, P_3^*\} = 0,778 M^* = 43,873 \checkmark$$