DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA SISTEMA MATERIJALNIH TAČKA

1. DALAMBEROV PRINCIP

2.1 Dalamberov (D'Alambert) princip za jednu materijalnu tačku

Polazimo do II Njutnovog zakona:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \qquad \vec{F} = \text{aktivna sila} \quad \vec{R} = \text{reakcija veze}$$

koji se može napisati u obliku:

$$\vec{F} + \vec{R} + \overbrace{(-m\vec{a})}^{\vec{F}^{in}} = 0$$

Gornja relacija se može interpretirati kao uslov ravnoteže pri čemu član $\vec{F}^{in} = -m\vec{a}$ predstavlja inercijalnu silu koja deluje na posmatranu tačku.

2.1 Dalamberov princip za sistem tačaka

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \qquad k=1,2\ldots.N$$

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + (-m_k\vec{a}_k) = 0$$

$\vec{F}_k$ = rezultanta aktivnih sila koje deluju na tačku k

$\vec{R}_k$ = rezultanta reaktivnih sila koje deluju na tačku k

$$\boxed{\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in} = 0 \qquad k=1,2\ldots.N}$$

$\boxed{\vec{F}_k^{in} = -m_k\vec{a}_k}$ inercijalna sila koja deluje na tačku "k"

U proizvoljnom vremenskom trenutku zbir aktivnih, reaktivnih i inercijalnih sila za svaku od materijalnih tačka sistema je jednak nuli (=> uslovi ravnoteže !)

2. SISTEM TAČAKA, OSNOVNI OBLIK DIF. JEDNAČINA KRETANJA

Za svaku od k=1,2…N tačaka važi II Njutnov zakon (odnosno "uslov ravnoteže" po Dalamberovom principu):

$$\boxed{m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \qquad k=1,2\ldots.N}$$

U koordinatnom obliku:

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= F_{k_x} + R_{k_x} \\ m_k\ddot{y}_k &= F_{k_y} + R_{k_y} \\ m_k\ddot{z}_k &= F_{k_z} + R_{k_z} \end{aligned}\right| \longrightarrow 3N \text{ uslovnih jednačina}$$

Kod sistema sa r holonomnih (u opštem slučaju nestacionarnih) veza koordinate tačaka se mogu izraziti preko n=3N-r generalisanih koordinata:

$$x_k(t) = x_k(q_1(t), q_2(t), q_3(t)............q_n(t),\ t)$$
$$y_k(t) = ...$$
$$z_k(t) = ...$$

Prema tome, broj <u>nepoznatih generalisanih koordinata</u> q_i(t) i <u>reakcija veza</u> $S_m(t)$ je:

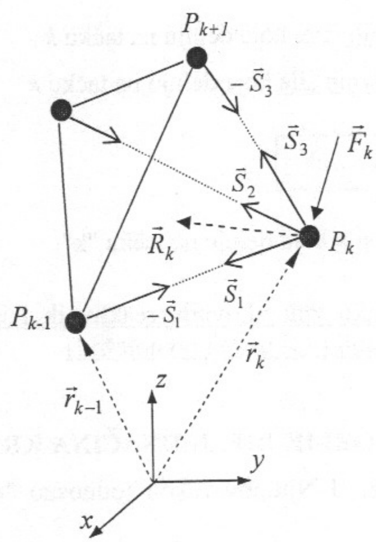
$$\left.\begin{array}{ll} q_i(t) & i=1,2\ldots\ldots n \\ S_m(t) & m=1,2\ldots.r \end{array}\right| \longrightarrow n+r \ \text{broj nepoznatih}$$

Dakle, <u>broj jednačina je jednak broju nepoznatih</u>:

U prostoru: $3\,N = n + r$

(U ravni: $\underbrace{2\,N}_{\text{broj jednačina}} = \underbrace{n + r}_{\text{broj nepoznatih}}$)

Integracijom 3N (u ravni 2N) diferencijalnih jednačina kretanja paraleleno se odredjuju nepoznate generalisane koordinate $q_i(t)$ i reakcije veza $S_m(t)$



$$\vec{R}_k = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$$

$$\vec{S}_3 = S_3 \frac{\overrightarrow{P_k P_{k+1}}}{\left|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\right|}$$

3. OPŠTA JEDNAČINA DINAMIKE (LAGRANŽ-DALAMBEROV PRINCIP)

3.1 Virtuelna pomeranja sistema tačaka

Vektor položaja proizvoljne tačke P_k je:

$$\bar{r}_k(t) = \bar{r}_k\big(q_1(t), q_2(t), q_3(t)............q_n(t), t\big) \qquad k=1,2\ldots.N$$

Vektora virtuelnog pomeranja tačke $\vec{r}_k$ je:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

gde su δq_i nezavisne varijacije generalisanih koordinata q_i $i=1.2\ldots.n$

3.2 Opšta jednačina dinamike

Polazimo od:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in} = 0 \qquad\qquad k=1,2\ldots.N$$

Množeći gornju relaciju sa $\delta\vec{r}_k$ dobijamo da je virtuelni rad aktivnih, reaktivnih i inercijalnih sila koje deluju na tačku jednak nuli:

$$(\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in})\cdot\delta\vec{r}_k = 0 \qquad\qquad k=1,2\ldots.N$$

Sumiranjem po svim tačkama sledi:

$$\sum_{k=}^{N}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}}_{=0} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{in}\cdot\delta\vec{r}_k = 0$$

kod sistema sa <u>idealnim vezama</u>

Ukupan virtuelni rad kod sistema tačaka sa idealnim vezama je:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{in}\cdot\delta\vec{r}_k = 0 \quad <=> \quad \sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k - m_k\vec{a}_k)\cdot\delta\vec{r}_k = 0}$$

Gornja relacija je **Opšta jednačina dinamike** (**Lagranž-Dalamberova jednačina**) prema kojoj je <u>zbir radova aktivnih i inercijalnih sila na virtuelnim pomeranjima sistema tačaka sa idealnim vezama u svakom vremenskom trenutku je jednak nuli:</u>

$$\boxed{\delta A_F + \delta A_{in} = 0}$$

3.3 Opšta jednačina statike

Kada su ubrzanja jednaka nuli (sistem miruje ili se kreće translatorno konstantnom brzinom), tada je:

$$\delta A_F = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0$$

4. LAGRANŽOVE JEDNAČINE KRETANJA DRUGE VRSTE

Virtuelni rad aktivnih sila se može transformisati na:

$$\delta A_F = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

gde je Q_i generalisana sila koja odgovara stepenu slobode $i=1,2\ldots.n$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Virtuelni rad inercijalnih sila se može transformisati na:

$$\delta A_{in} = \sum_{k=1}^{N} (-m_k \vec{a}_k) \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} (-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i})\ \delta q_i$$

Ukupan virtuelni rad je:

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} (Q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i})\ \delta q_i = 0$$

Pošto su δq_i medjusobno nezavisne varijacije, iz gornje jednačine sledi n diferencijalnih jednačina kretanja koje se zovu **Lagranžove jednačine kretanja druge vrste**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i=1,2\ldots.n} \qquad => \qquad q_i = q_i(t)$$

Kinetička energija sistema tačaka je:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m \vec{v}_k^2$$

U zadacima, generalisana sila Q_i se najčešće sračunava iz virtuelnog rada:

$$Q_i = \frac{\delta A_{F\_i}}{\delta q_i} = \frac{1}{\delta q_i} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_{k(i)}$$

δA_{F_i} = virtuelni rad aktivnihi sila

$\delta\vec{r}_{k(i)}$ = virtuelno pomeranje tačke k $\quad\longmapsto\quad$ za $\delta q_i \neq 0 \quad \delta q_j = 0 \quad j \neq i. \quad i,j=1,2\ldots.n$

Дејан Поповић