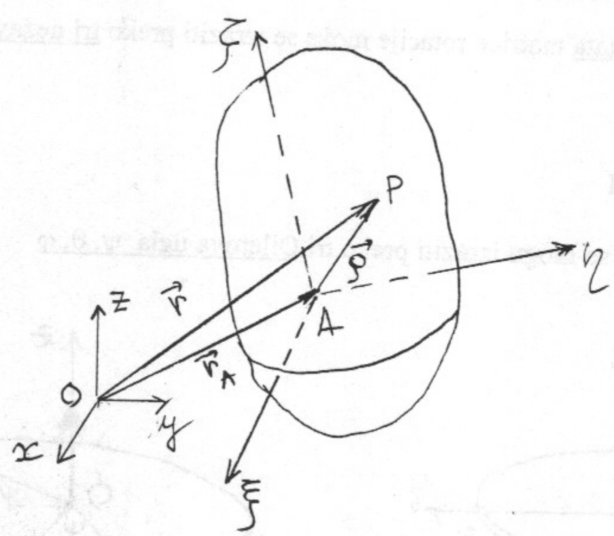
KINEMATIKA KRUTOG TELA

1. ODREĐIVANJE POLOŽAJA KRUTOG TELA U PROSTORU



x-y-z <u>prostorni (nepokretan)</u> koordinatni sistem sa jediničnim vektorima $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$

ξ-η-ζ <u>materijalni (pokretan)</u> koordinatni sistem sa jediničnim vektorima $\vec{\lambda}(t), \vec{\mu}(t), \vec{\nu}(t)$

Položaj proizvoljne tačke P tela je:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t)$$

gde su vektori položaja u prostornom i materijalnom trijedru:

$$\vec{r}(t) = x(t)\ \vec{i} + y(t)\ \vec{j} + z(t)\ \vec{k}$$

$$\vec{\rho}(t) = \xi\ \vec{\lambda}(t) + \eta\ \vec{\mu}(t) + \zeta\ \vec{\nu}(t)$$

$$\vec{r}_A(t) = x_A(t)\vec{i} + y_A(t)\vec{j} + z_A(t)\vec{k}$$

2. POLOŽAJ PROSTORNOG TRIJEDRA PREMA MATERIJALNOM TRIJEDRU

$$\begin{Bmatrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \\ \vec{\nu} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

gde su $a_{ij}(t)$ elementi <u>matrice rotacije</u> [A].

Koeficijenti matrice rotacije a_{ij} nisu medjusobno nezavisni jer važi:

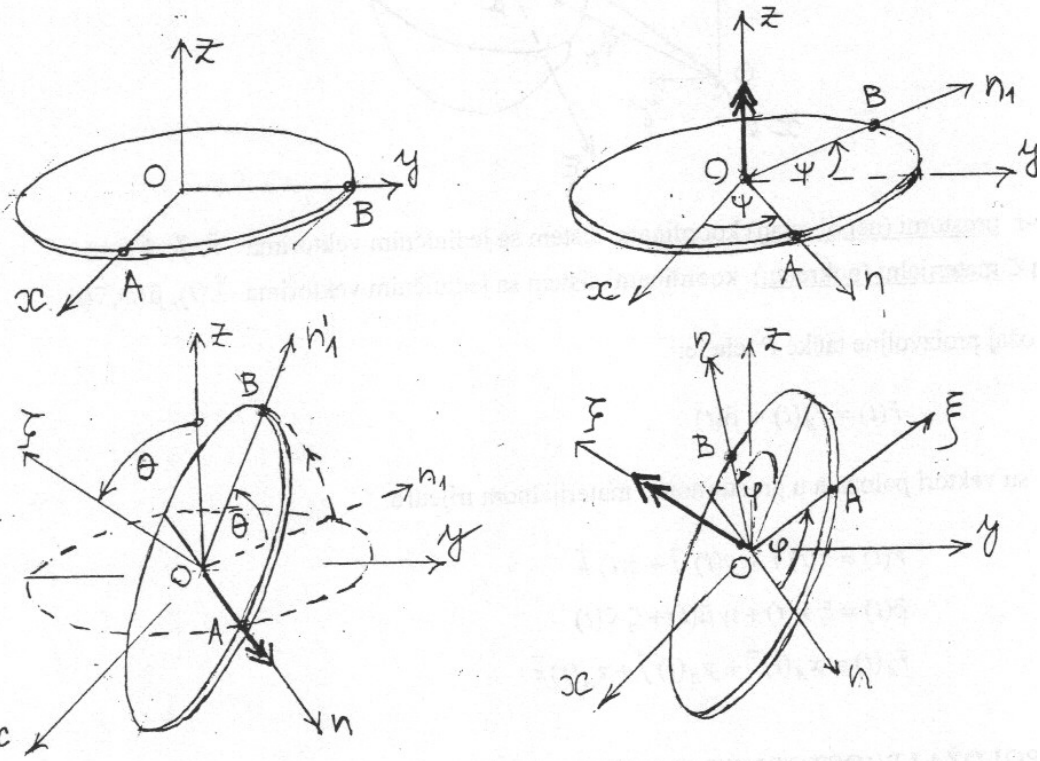
$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \cancel{k} = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad i,j = 1,2,3$$

tj. u matričnom obliku $[A][A]^T = [I]$ $\quad \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, a_{jk} = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

Prema tome, devet elemenata matrice rotacije može se izraziti preko tri nezavisne funkcije vremena.

3. OJLEROVI UGLOVI

Elementi matrice rotacije se mogu izraziti preko tri Ojlerova ugla ψ, θ, φ



$$a_{11} = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \cos\theta \sin\psi$$
$$a_{12} = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\theta \cos\psi$$
$$a_{13} = \sin\varphi \sin\theta$$

$$a_{21} = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \cos\theta \sin\psi$$
$$a_{22} = -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi$$
$$a_{23} = \cos\varphi \sin\theta$$

$$a_{31} = \sin\theta \sin\psi$$
$$a_{32} = -\sin\theta \cos\psi$$
$$a_{33} = \cos\theta$$

$\psi(t)$	*ugao precesije*
$\theta(t)$	*ugao nutacije*
$\varphi(t)$	*ugao sopstvene rotacije*

4. KONACNE JEDNACINE KRETANJA

- Konačne jednačine kretanja krutog tela

Konačne jednačine kretanja slobodnog krutog tela u prostoru su date sa šest funkcija:

$$
\begin{aligned}
x_A &= x_A(t) \qquad & \psi &= \psi(t) \\
y_A &= y_A(t) \qquad & \theta &= \theta(t) \\
z_A &= z_A(t) \qquad & \varphi &= \varphi(t)
\end{aligned}
$$

- Konačne jednačine kratanja tačke krutog tela

Poći ćemo od jvektorske ednačine kretanja za proizvoljne tačku tela i naći njene projekcije na o prostornog koordinatnog sistema:

$$
\vec{r}(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t) \quad \begin{cases} \cdot\, \vec{i} \\ \cdot\, \vec{j} \\ \cdot\, \vec{k} \end{cases}
$$

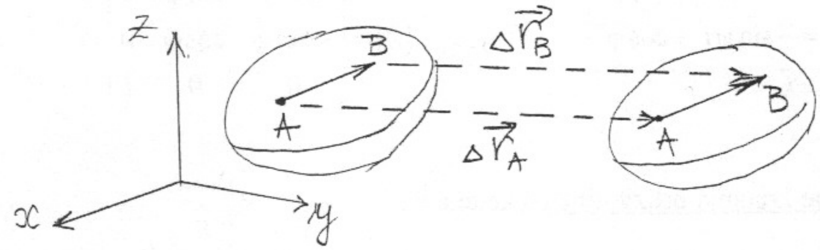
Za tačku sa materijalnim koordnatama ξ, η i ζ konačne jednačine kretanja glase:

$$
\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_B \\ z_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}
$$

5. VRSTE KRETANJA KRUTOG TELA

- Translatorno kretanje
- Obrtanje oko nepokretane ose
- Sferno kretanje (obrtanje oko nepokretne tačke)
- Ravno (ili ravansko kretanje)
- Opšte kretanje
- Složemo kretanje tela (kretanje tela po pokretnom telu)

6. TRANSLATORNO KRETANJE KRUTOG TELA



Pri translatornom kretanju svaki vektor tela AB zadržava svoj pravac i smer, Dakle:

$$
\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B \quad \rightarrow \quad d\vec{r}_A = d\vec{r}_B \quad \rightarrow \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B
$$

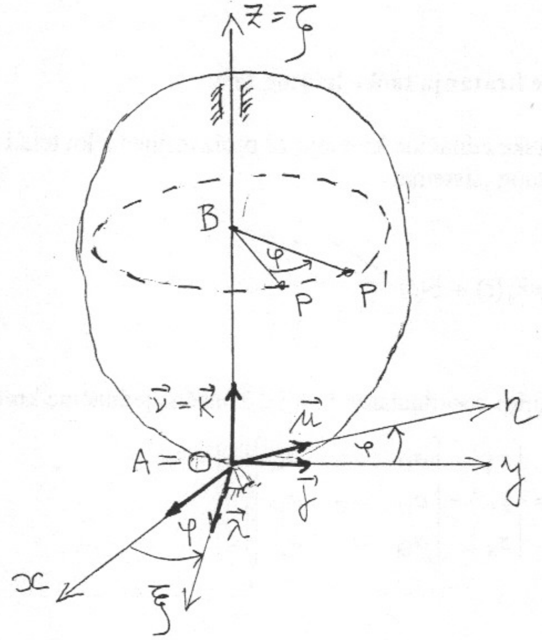
Vektori pomeranja (konačnih i elementarnih) kao i vektori brzine svih tačaka tela su jednaki.

Konačne jednačine kratanja tela su $(\psi = \theta = \varphi = 0)$:

$$x_A = x_A(t) \qquad y_A = y_A(t) \qquad z_A = z_A(t)$$

7. OBRTANJE KRUTOG TELA OKO NEPOKRETNE OSE

7.1 Kretanje tela



Telo ima jedan stepen slobode i konačna jednačina kretanja je

$$\varphi = \varphi(t)\,.$$

Elementi matrice rotacije se mogu dobiti iz opštih izraza za a_{ij} usvajajući da je $\psi = \theta = 0$. Takodje, matricu rotacije moguće je izvesti direktno, analizirajući obratanje materijalnog u odnosu na prostorni trijedar:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \bar{\mu} &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\ \bar{\nu} &= \vec{k} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad [A] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačne jednačine kretanja prozvoljne tačke tela su:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{Bmatrix}$$