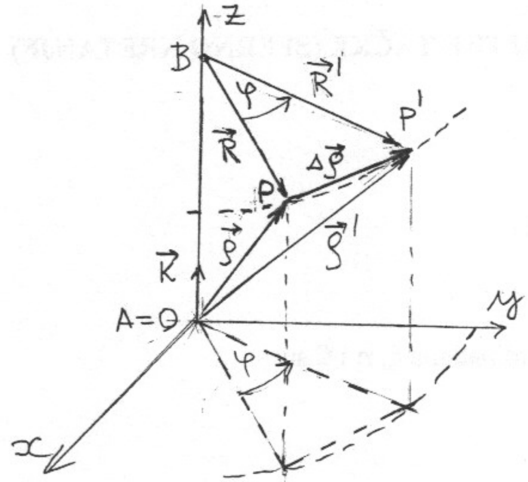
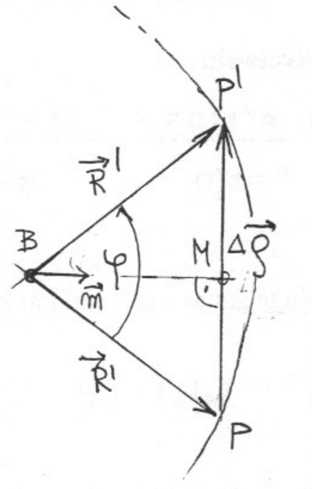
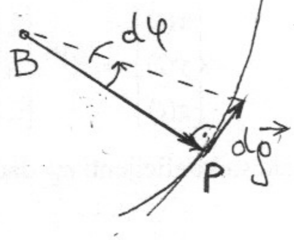
7.1 Rodrigov obrazac







$$|\Delta\vec{\rho}| = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = 2\, tg\frac{\varphi}{2}\, \left|\overrightarrow{BM}\right| \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{\rho} = 2\left|\overrightarrow{BM}\right|\, tg\frac{\varphi}{2}\, \vec{k}\times\vec{m}$$

$$\Delta\vec{\rho} = tg\frac{\varphi}{2}\,\vec{k}\times(\vec{R}+\vec{R}\,') \quad \text{jer je} \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{R}+\vec{R}\,')$$

Odavde, imajući u vidu $\vec{R}\times\vec{k} = \vec{\rho}\times\vec{k}$, sledi <u>Rodrigov obrazac</u>:

$$\Delta\vec{\rho} = tg\frac{\varphi}{2}\,\vec{k}\times(\vec{\rho}+\vec{\rho}\,')$$

<u>koji odredjuje vektor pomeranja tačke tela pri obrtanju tela za ugao φ.</u> U slučaju elementarne rotacije tj. kada $\varphi \rightarrow d\varphi$, zanemarujući male veličine višeg rada, dobijamo <u>vektor elementarnog pomeranja tačke tela.</u>

$$d\vec{\rho} = d\vec{\varphi}\times\vec{\rho} = d\vec{\varphi}\times\vec{R} \qquad d\vec{\varphi} = d\varphi\,\vec{k}$$

7.2 Brzina i ubrzanje pri obrtanju tela oko nepokretne ose

<u>Vektor brzine proizvoljne tačke</u> tela je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{\omega}\times\vec{R}$$

<u>gde je vektor ugaone brzine</u> je $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k} = \omega\,\vec{\nu}$ a <u>algebarska vrednost ugaone brzine</u> $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

<u>Vektor ubrzanja tačke</u> tela je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \vec{\varepsilon}\times\vec{R} - \omega^2\vec{R}$$

gde su <u>vektor ugaonog ubrzanja</u> i <u>algebarska vrednost ugaonog ubrzanja</u>:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\,\vec{k} = \varepsilon\,\vec{\nu} \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

8. OBRTANJE KRUTOG TELA OKO NEPOKRETNE TACKE (SFERNO KRETANJE)

8. 1 Konačne jednačine kretanja

Konačne jednačine kretanja tela:

$$\psi = \psi(t) \qquad \theta = \theta(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$$

Konačne jednačine kretanja tačke sa materijalnim koordinatama ξ, η i ζ su:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \qquad [A] = \left[a_{ij}(t)\right]$$

gde su koeficijenti a_{ij} dati u funkciji Ojlerovih uglova (poglavlje 3).

8. 2 Dalamberova (D'Alambert) teorema, osa ekvivalentne rotacije i trenutna osa rotacije

Prema Dalamberovoj teoremi, svako telo koje vrši sferno kretanje možemo prevesti iz polaznog položaja (trenutak t_1) u neki drugi položaj (trenutak t_2) obrtanjem oko ose koja prolazi kroz tu tačku. Ova osa se zove osa ekvivalentne rotacije i ona zavisi od ova dva položaja.

Vektor pomeranja tačke tela usled obrtanja tela oko osa ekevivalentne rotacije je, prema Rodrigovom obrazcu, dat sa:

$$\Delta\vec{\rho} = tg\frac{\Phi_E}{2}\,\vec{s}_E \times (\vec{\rho} + \vec{\rho}\,')$$

gde je Φ_E ugao ekvivalentne rotacije. Interval t_2-t_1 se može podeliti na iz podintervala $\Delta t=(t_2-t_1)/n$, Svakom od tih podintervala odgovara jedna osa ekvivalentne rotacije, pa se sferno kretanje može prikazati kao niz uzastopnih obrtanja oko osa ekvivalentnih rotacije u pomenutim intervalima. Kada $\Delta t \to 0$, osa ekvivalentne rotacije iz tog intervala teži trenutnoj osi rotacije kojoj odgovara elementarno (infinitezimalno) obrtanje:

$$\vec{d\!\!\!^{-}\Phi} = d\!\!\!^{-}\Phi\ \vec{s}_0 = \text{vektor elementarne rotacije,}$$

$$\vec{s}_0 = \text{jedinični vektor trenutne ose rotacije.}$$

Naglasimo da $d\!\!\!^{-}\Phi$ (za razliku od $d\Phi$) ne predstavlja diferencijal neke funkcije već samo oznaku za infinitezimalno obrtanje.

Infinitezimalno pomeranje tačke tela usled infinitezimalnog obrtanja oko trenutne ose rotacije je:

$$d\vec{\rho} = \vec{d\!\!\!^{-}\Phi} \times \vec{\rho}$$

8. 3 Infinitezimalne (elementarne) i konačne rotacije

Ako telu koje može da se obrće oko nepokretne tačke saopštimo niz uzastopnih elementarnih obrtanja, vektor pomeranja tačke tela čiji je početni vektor položaja $\vec{\rho}$ dat je sa:

$$d\vec{\rho} = (d\vec{\Phi}_1 + d\vec{\Phi}_2 + \dots\dots + d\vec{\Phi}_n) \times \vec{\rho} \; + \underbrace{(\dots\dots\dots\dots)}_{\approx 0}$$

Član (……) predstavlja male veličine višeg reda. Zanemarivanjem ovog člana dobijamo da je pomeranje tela posledica rezultujuće elementarne rotacije koja je jednaka vektorskom zbiru pojedinih rotacija. Redosled elementarnih rotacija ne utiče na definitivni položaj tela, što je neposredna posledica komutativnosti vektorskog zbira. Definitivno, elementarne rotacije ispunjavaju sve uslove da budu tretirane kao vektorske veličine.

Ako telu saopštimo niz konačnih obrtanja oko pojedinih osa, završni položaj proizvoljne tačke tela je:

$$\{x\} = [A_1]^T \, [A_2]^T \cdots\cdots\cdots\cdots [A_n]^T \, \{\xi\}$$

Zbog nekomutativnosti matričnih prosizvoda, zaključujemo da je završni položaj tela zavisi od redosled konačnih rotacija.
ka

8.4 Ugaona brzina i brzina tačke tela

Brzina proizvoljne tačke tela je:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

gde je $\vec{\rho}$ vektor položaja tačke a $\vec{\omega}(t)$ vektor ugaone brzine:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \omega(t)\, \vec{s}_0(t)$$

Vektor ugaone brzine u prostornom i materijalnom trijedru:

$$\vec{\omega}(t) = \omega_x(t)\,\vec{i} + \omega_y(t)\,\vec{j} + \omega_z(t)\,\vec{k} = \omega_\xi(t)\,\vec{\lambda}(t) + \omega_\eta(t)\,\vec{\mu}(t) + \omega_\zeta(t)\,\vec{\nu}(t)$$

Ugaonu brzinu je moguće dovesti u vezu sa brzinom promene Ojlerovih uglova. Poći ćemo od rezultujućeg elementarnog obrtanja koje je posledica infinitezimalne promene Ojlerovih uglova je:.

$$d\vec{\Phi} = d\psi\,\vec{k} + d\theta\,\vec{n} + d\varphi\,\vec{\nu}$$

Odatle se za vektor ugaone brzine dobija:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\vec{n} + \dot{\varphi}\,\vec{\nu} \qquad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\Phi}}{dt}$$

-

Projekcije gornje relacije na ose prostornog i materijalnog trijedra daju vezu izmedju koordinata vektora ugaone brzine i brzine priraštaja Ojlerovih uglova:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{\nu} \quad \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{\nu} \quad \begin{matrix} \vec{\lambda} \\ \vec{\mu} \\ \vec{\nu} \end{matrix} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}$$

Pri gornjim izračunavanjima uzeto je obzir da su veze izmedju jediničnih vektora materijalnog i prostornog trijedra date preko elemenata matrice rotacije a_{ij}. Jasno je da važi:

$$\begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix}$$

8.5 Jednačina trenutne ose, nepokretan i pokratan aksioid.

Na trenutnoj osi brzine svih tačaka su nula, odnosno:

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0 .$$

Razvijanjem ovog vektorskog proizvoda moguće je u svakom vremenskom trenutku dobiti jednačine trenutne ose rotacije u prostornom i materijalnom trijedru:

$$\frac{x}{\omega_x(t)} = \frac{y}{\omega_y(t)} = \frac{z}{\omega_z(t)} \qquad \frac{\xi}{\omega_\xi(t)} = \frac{\eta}{\omega_\eta(t)} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta(t)}$$

Sa promenom ugaone brzine trenutna osa rotacija menja tokom vremena svoj položaj u prostoru (dakle, u odnosu na nepokretni strijedru) i u odnosu na telo (dakle, prema materijalnom trijedru). Skup svih osa obrtanja u odnosu na nepokretni trijedar daje konusne površ koja se zove nepokretni aksioid. Isto tako skup svih trenutnih osa u odnosu na pokretan trijedar daje pokretan aksiod. Može se pokazati da je sferno kretanje tela moguće interpretirati kao kotrljanje pokretnog aksioida po nepokretnom aksoidu.

8.6 Ubrzanja tačaka tela i ugaono ubrzanje pri sfernom kretanju

Ubrzanje proizvoljne tačke tela je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Prvi član je obrtno (ili rotaciono obrzanje), dok je drugi član aksipetalo ubrzanje čiji je vektor usmeren nomalno ka trenutnoj osi obrtanja. Vektor ugaonog ubrzanja je:

$$\vec{\varepsilon}(t)=\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}=\frac{d\omega(t)}{dt}\,\vec{s}_0(t)+\omega(t)\,\frac{d\vec{s}_0(t)}{dt}$$

i on sadrži dve karakteristične komponente. Prva je posledica promene algebarske vrednosti ugaon brzine, a druga nastaje od promene pravca vektora ugaone brzine.

Koordinate vektora ugaonog ubrzanja koje odgovaraju prostornom trijedru su:

$$\vec{\varepsilon}(t)=\frac{d}{dt}(\omega_x(t)\,\vec{i}+\omega_y(t)\,\vec{j}+\omega_z(t)\,\vec{k})=\varepsilon_x(t)\,\vec{i}+\varepsilon_y(t)\,\vec{j}+\varepsilon_z(t)\,\vec{k}$$

gde su:

$$\varepsilon_x=\dot{\omega}_x=\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\,\cos\psi+\dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\theta)$$

$$\varepsilon_y=\dot{\omega}_y=\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\theta)$$

$$\varepsilon_z=\dot{\omega}_z=\frac{d}{dt}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\,\cos\theta)$$

Koordinate vektora ugaonog ubrzanja u materijalnom trijedru su:

$$\vec{\varepsilon}(t)=\frac{d}{dt}\Big(\omega_\xi(t)\,\vec{\lambda}(t)+\omega_\eta(t)\,\vec{\mu}(t)+\omega_\zeta(t)\,\vec{\nu}(t)\Big)=\dot{\omega}_\xi(t)\,\vec{\lambda}(t)+\dot{\omega}_\eta(t)\,\vec{\mu}(t)+\dot{\omega}_\zeta(t)\,\vec{\nu}(t)+\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{\omega}}_{0}=$$

$$=\varepsilon_\xi(t)\,\vec{\lambda}(t)+\varepsilon_\eta(t)\,\vec{\mu}(t)+\varepsilon_\zeta(t)\,\vec{\nu}(t)$$

gde su:

$$\varepsilon_\xi=\dot{\omega}_\xi=\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\,\sin\varphi\,\sin\theta+\dot{\theta}\,\cos\varphi)$$

$$\varepsilon_\eta=\dot{\omega}_\eta=\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\,\cos\varphi\,\sin\theta-\dot{\theta}\,\sin\varphi)$$

$$\varepsilon_\zeta=\dot{\omega}_\zeta=\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,\cos\theta)$$

Pri izračunavanju izvoda vektora ugaone brzine uzeto je u obzir da su izvodi po vremenu jediničnih vektora materijalnog trijedra: $\frac{d\vec{\lambda}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\lambda}$, $\frac{d\vec{\mu}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\mu}$ i $\frac{d\vec{\nu}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\nu}$.