

UDAR i SUDAR

1. KLASIČNA TEORIJA UDARA

1.1 Definicije

Udar - kratkotrajno mehaničko dejstvo između tela od kojih se jedno kreće a drugo miruje.
Sudar je kratkotrajno mehaničko dejstva između dva tela koje se kreću.

1.2 Pretpostavke klasične teorije udara (sudara):

- Mehanički kontakt dva dela (udar ili sudar) se dešava u tački.
- Trajanje sudara (udara) se odvija u beskonačno kratkom intervalu ($t, t+\tau \rightarrow 0$). Pretpostavka o trenutnom kontaktu ima za posledicu da je pomeranja tačaka tela tokom trajanja samog udara (sudara) je zanemarljivo. Takođe zbog $\tau \rightarrow 0$ impulsi svih neudarnih sila su zanemarljivi.
- U tački kontakta javljaju velike udarne sile, ali udarni impuls u tački dodira ima konačnu vrednost. Postojanje trenutnog impulsa znači da tokom udara (sudara) brzine tačaka ~~dela~~ ^t dobijaju trenutni konačan priraštaj.
- Postoji tangenta ravan na koju je, u odsustvu trenja, upravan udarni impuls. Ako udarni impuls prolazi kroz središte mase oba tela to je centralni (centrični) udar ili sudar. U suprotnom reč je u ekcentričnom sudaru (udar).

1.3 Jednačine klasične teorije udara (sudara)

1.3.1 Osnovni zakoni

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R \quad \Rightarrow \quad \vec{K}'' - \vec{K}' = \vec{I}_R \quad \vec{I}_R = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_R dt$$

$$\frac{d\vec{D}^{(S)}}{dt} = \vec{M}_R^{(S)} \quad \Rightarrow \quad \vec{D}^{(S)''} - \vec{D}^{(S)'} = \vec{H}_R^{(S)} \quad \vec{H}_R^{(S)} = \int_t^{t+\tau} \vec{M}_R^{(S)} dt$$

$(...)'$ veličina neposredno pre udara ili sudara $(...)^{''}$ neposredno posle udara ili sudara

\vec{I}_R = glavni udarni impuls $\vec{H}_R^{(S)}$ = glavni udarni impulsni momenat

1.3.2 Vrste udara (sudara)

a) Idealno elastičan sudar / udar

$T'' - T' = 0$ ukupna kinetička energija sistema pre i posle sudara (udara) je ista

b) Idealno plastičan sudar / udar

$v_{n1}'' = v_{n2}''$ brzine dodirnih tačaka (u pravcu n) oba tela pre posle sudara su jednake

c) Elasto-plastičan sudar / udar - slučaj između a) i b)

Uvođenjem **koefficijenta udara k (koefficijenta restitucije)** moguće je na jedinstven način matematički opisati gornje slučajeve

2. UDAR

2.1 Upravni udar tačke u nepokretnu prepreku

a) Zakon o promeni količine kretanja

$$\vec{K}'' - \vec{K}' = \vec{I}$$

$$m v_n'' - m v_n' = I_n$$

v_n', v_n'' su algebarske vrednosti brzine materijalne tačke neposredno pre i neposredno posle udara ($v_n' < 0$ $v_n'' \geq 0$)

b) Uvodimo pojam **koefficijenta udara (restitucije)**:

$$k = -\frac{v_n''}{v_n'} = \frac{|v_n''|}{|v_n'|} \quad 0 \leq k \leq 1$$

$$\vec{v}_n' = -|v_n'| \vec{n}_0$$

$$\vec{v}_n'' = v_n'' \vec{n}_0 = k |v_n'| \vec{n}_0$$

$$I_n = (1+k)m|v_n'|$$

Granični slučajevi su:

$$1) k=1 \text{ idealno elastičan udar } k=1 \Leftrightarrow T'' - T' = 0 \Rightarrow v_n'' = -v_n'$$

$$2) k=0 \text{ idealno plastičan udar } k=0 \Leftrightarrow v_n'' = 0$$

c) Eksperimentalno određivanje koefficijenta udara k

$$v_n' = -\sqrt{2gh_1}$$

$$v_n'' = \sqrt{2gh_2}$$

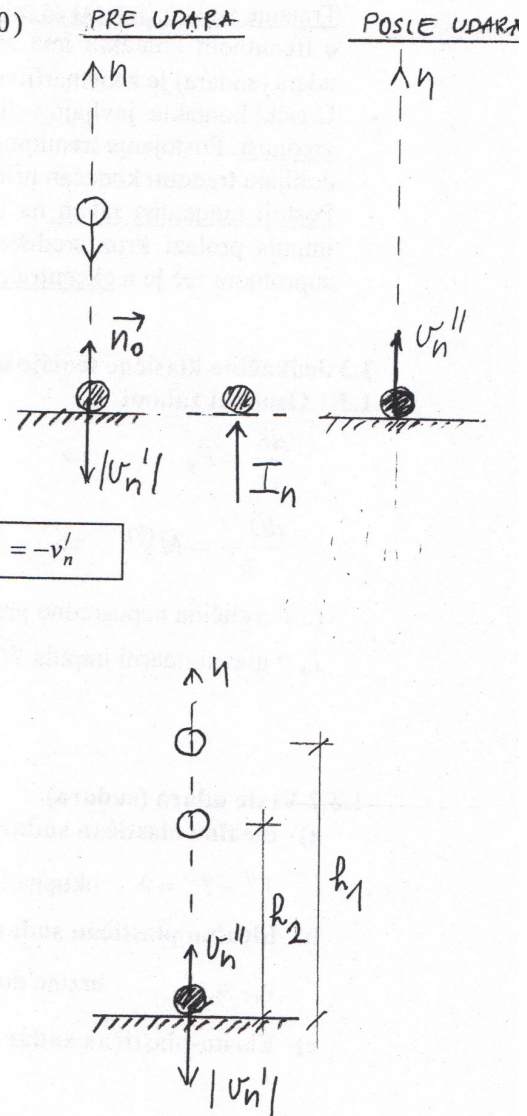
$$k = -\frac{\sqrt{2gh_2}}{-\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

2.2 Kosi udar tačke u glatku prepreku

$$\vec{K}'' - \vec{K}' = \vec{I}$$

$$m v_n'' - m v_n' = I_n$$

$$m v_t'' - m v_t' = 0$$



model udara:

$$k = -\frac{v_n''}{v_n'}$$

$$v_i'' = v_i' \Leftrightarrow I_i = 0$$

U vektorskom obliku

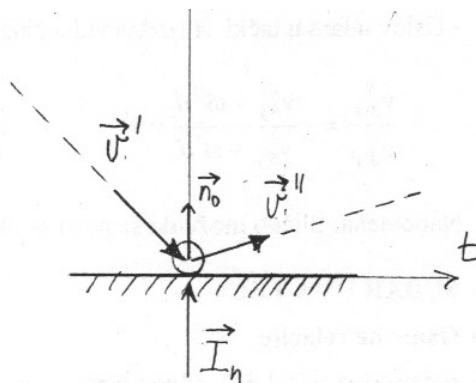
$$\vec{v}_n' = -|v_n'| \vec{n}_0 \quad \vec{v}_n'' = v_n'' \vec{n}_0 = k|v_n'| \vec{n}_0$$

Udarni impuls:

$$I_n = m |v_n'| (1 + k)$$

$$\vec{I}_n = I_n \vec{n}_0 = m |v_n'| (1 + k) \vec{n}_0$$

Napomena: Uticaj hrapave podloge može se uzeti u obzir uvođenjem u analizu impulsa I_t u pravcu tangente.



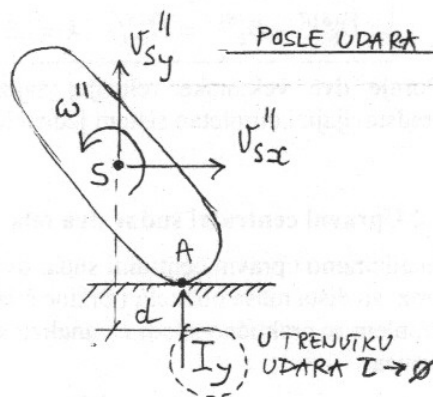
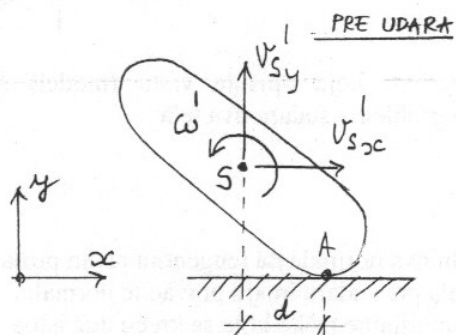
2.3 Upravni centralni udar tela

Važi isto kao i za udar tačke

2.4 Ekcentričan udar tela u nepokretnu prepreku

Posmatra se kretanje krute ploče u ravni x-y i njen udar u nepokretnu glatku prepreku.

Nepoznate: Brzine centra mase i ugaona brzina posle udara: v_{Sx}'' v_{Sy}'' ω'' i udarni impuls I_y (ukupno 4 nepoznate)



Na raspolaganju su 4 jednačine:

- Zakon o promeni količine kretanja i moment količine kretanja (3 jednačine)

$$\vec{K}'' - \vec{K}' = \vec{I} \Rightarrow mv_{Sx}'' - mv_{Sx}' = 0$$

$$mv_{Sy}'' - mv_{Sy}' = I_y$$

$$\vec{D}^{(S)''} - \vec{D}^{(S)'} = \vec{H} \Rightarrow$$

$$J^{(S)} \omega'' - J^{(S)} \omega' = I_y d \quad S = \text{centar mase tela}$$

- Uslov udara u tački A (jedna jednačina):

$$-\frac{v_{Ay}''}{v_{Ay}'} = -\frac{v_{Sy}'' + \omega'' d}{v_{Sy}' + \omega' d} = k \quad k = \text{koeficijent udara}$$

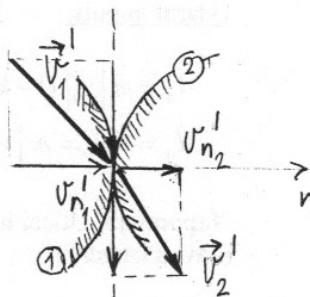
Napomena: Slično može da se postupi i kod prostornog kretanja tela

3. SUDAR DVA TELA

3.1 Osnovne relacije

Pri sudaru dva tela 1 i 2, odnos razlike brzina u tački kontakta u pravcu n određuju koeficijent restitucije:

$$k = -\frac{\Delta v_n''}{\Delta v_n'} = -\frac{v_{n1}'' - v_{n2}''}{v_{n1}' - v_{n2}'} \quad 0 \leq k \leq 1$$



Vodeći računa o orijentaciji brzina prema osi n (vidi sliku), zaključujemo:

a) Kada je $v_{n1}' > v_{n2}'$ dolazi do sudara (recimo: $v_{n1}' = 8 \text{ m/s}$ $v_{n2}' = 6 \text{ m/s}$

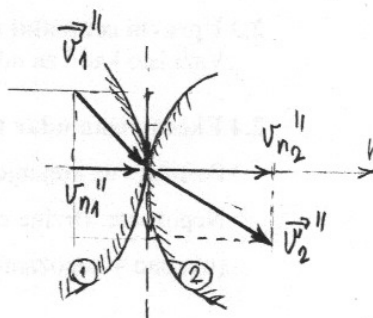
ili $v_{n1}' = -6 \text{ m/s}$ $v_{n2}' = -8 \text{ m/s}$)

b) Za $v_{n1}' \leq v_{n2}'$ ne dolazi do sudara.

c) Posle sudara je $v_{n1}'' \leq v_{n2}''$

d) Kada je telo 2 nepokretna podloga, tada je $v_{n2}'' = v_{n2}' = 0$, pa se

koeficijent k svodi na ranije prikazani koeficijent udara. $k = -v_{n1}''/v_{n1}'$



Za svako od dva tela $k=1,2$ važi:

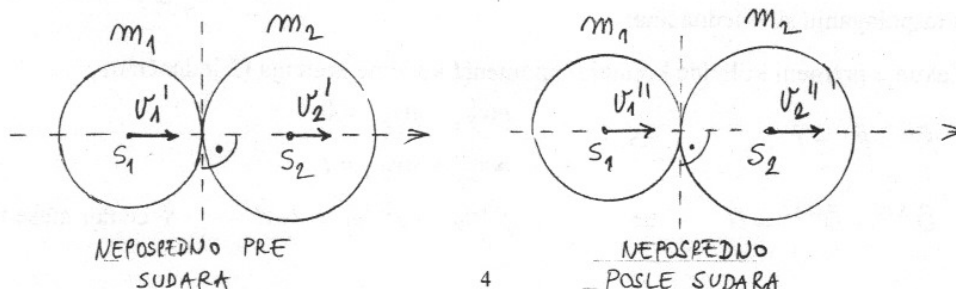
$$\begin{aligned} \vec{K}_k'' - \vec{K}_k' &= \vec{I}_{Rk} \\ \vec{D}_k^{(S)''} - \vec{D}_k^{(S)'} &= \vec{H}_{Rk}^{(S)} \quad k=1,2 \end{aligned}$$

Gornje dve vektorske relacije, zajedno sa relacijom koja opisuje vrstu (model) sudara, predstavljaju kompletan sistem jednačina za rešenje problema sudara dva tela

3.2 Upravni centralni sudar dva tela

Analiziramo upravni centralni sudar dva tela - zajednička normala na tangentnu ravan prolazi kroz središta masa oba tela i brzine središta masa tela pre sudara imaju pravac te normale.

Problem se praktično svodi na analizu sudara dve materijalne tačke koje se kreću duž istog pravca.



$\bar{K}'' - \bar{K}' = 0$ nema spoljašnjih impulsa

$$m_1 v_1'' + m_2 v_2'' - (m_1 v_1' + m_2 v_2') = 0$$

Da bi došlo do sudara: $v_1' > v_2'$

$$k = -\frac{v_1'' - v_2''}{v_1' - v_2'}$$

Brzine posle sudara:

$$v_1'' = v_1' - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2')$$

$$v_2'' = v_2' + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2')$$

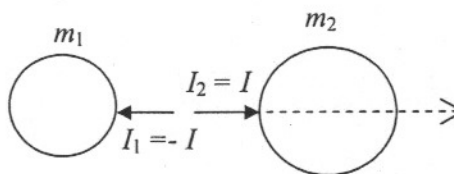
Posle sudara važi: $v_1'' \leq v_2''$

Udarni impuls izmedju tela

$$I_2 = I = m_2 (v_2'' - v_2')$$

$$I_1 = -I = m_1 (v_1'' - v_1')$$

$$I = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2')$$



a) Idealno plastičan sudar $k=0$

$$v_1'' = v_2'' = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}$$

Kada je $m_1 = m_2$ tada:

$$v_1'' = v_2'' = \frac{1}{2} (v_1' + v_2')$$

b) Idealno elastičan sudar $k=1$

$$v_1'' = v_1' - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2')$$

$$v_2'' = v_2' + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_1' - v_2')$$

Kada je $m_1 = m_2$ tada:

$$v_1'' = v_2'$$

$$v_2'' = v_1'$$

(tela „razmenjuju“ brzine)